









Miles Bland's

sämmtliche

algebraische Gleichungen

des I. und II. Grades,

theils mit, theils ohne Auflösungen,

mit einem Anhange,

enthaltend

Aufgaben aus der höheren Mathematik.

Nach dem

englischen Originale mit Benutzung von Dr. Nagel's deutscher Ausgabe bearbeitet

von

Celsus Girl,

königl. bayerischem Artillerie-Oberlieutenant und
Lehrer der Chemie am Cadeten-Corps.

Erster Band.

Aufgaben mit Auflösungen.

Halle a/S.,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1857.


BIBLIOTHECA·BODLEIANA

Vorrede.

Während einer dreijährigen Verwendung als Hülfslehrer der niedern Mathematik am königl. Cadeten-Corps befand ich mich öfters in der Lage, für meine Zöglinge passende Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen ersten und zweiten Grades aufsuchen zu müssen. Da die mathematische Litteratur meines Wissens keine Sammlung algebraischer Aufgaben für den speciellen militairischen Zweck enthält, wie sie uns Soldaten für die Arithmetik in unübertroffener Weise und Reichhaltigkeit vom Herrn Major Malaisé geboten wurden, und da die Ausarbeitung einer solchen Sammlung mehr Zeit erfordert hätte, als mir mein Dienst übrig liess, so benützte ich vorzüglich die Sammlungen von Meier Hirsch, Heis, Wiegand, Pollack, Rouvroy, Salomon u. A., im verflossenen Jahre aber nur jene von Miles Bland. Ich gab ihr den Vorzug vor allen andern wegen des geringen Maasses von Vorkenntnissen, das sie voraussetzt, wegen der möglichst allseitigen Anwendung, die sie von diesen wenigen Grundlagen macht, wegen der reichen Auswahl von Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade, die sie enthält, und wegen des eleganten, den Schüler anziehenden und anregenden Gewandes, in welches die meisten derselben gekleidet sind. Ich erwähne diese Vorzüge hier nur, weil ich die Erfahrung gemacht habe, dass die Miles Bland'schen Aufgaben trotz der in England bereits erlebten neunten Auflage und trotz der vortrefflichen deutschen Bearbeitung des Herrn Dr. Nagel bei uns noch so gut wie unbekannt sind. Ich kann mir als Grund dieser geringen Verbreitung obiger Aufgaben nur allein den Umstand denken, dass ihre Lösung schwieriger ist, und grössere Umsicht, sowie eine grössere Mannigfaltigkeit elemen-

tarer Rechnungs-Operationen oder sogenannter Kunstgriffe erfordert als die Meier Hirsch'schen, Heis'schen und andern Beispiele gleicher Grade, es müsste denn sein, dass sich der Widerwille, den manche, bloss theoretisirende Mathematiker gegen praktische Aufgaben empfinden, auch gegen dieses, in seiner Art gewiss klassische Buch gewendet habe. Da ich aber von der Aussicht ausging, der mathematische Unterricht einer militairischen Anstalt müsse auf die dereinstige praktische Lebensrichtung der Jünglinge Rücksicht nehmen, und als coordinirten Hauptzweck die Ausbildung der jungen Geister zu möglichster Klarheit und Selbständigkeit des Denkens, sowie zur Unabhängigkeit von mechanischem Formel-Gebrauch anstreben, so waren gerade die oben angeführten Eigenschaften jener Sammlung in meinen Augen ebenso viele Empfehlungen derselben. Ich empfahl sie desshalb auch meinen Schülern, jungen Leuten von 14—15 Jahren, und liess von diesen die meisten Aufgaben theils allein, theils unter meiner Leitung auflösen. —

Ueber die Zweckmässigkeit der Herausgabe von Auflösungen ist man verschiedener Meinung, desshalb dürfte es nicht überflüssig sein, das Verhalten der Schüler gegen solche Hülfsmittel näher zu beleuchten. Der lässige Schüler wird möglicherweise sogar den Versuch scheuen, die eigene Kraft an einer Aufgabe zu erproben; er wird vielmehr sogleich nach der Lösung greifen, und das Buch als eine Esels-Brücke benützen. Zugegeben, dass dem so sei, so wird doch nicht in Abrede gestellt werden können, dass er dabei noch etwas lernt, da es immerhin eine geistige und desshalb fruchtbringende Uebung bleibt, in das Verständniss der Lösung einzudringen. Der ganze Euclid ist ja von Anfang bis zu Ende eine Esels-Brücke, und wie viele grosse Mathematiker hat er gebildet! — Kommen wir nun zu dem strebsamen Schüler, so werden wir schwerlich die Auflösungen vor ihm aufgeschlagen finden; er bemüht sich, und setzt eine Ehre darein, durch eigene Kraft zum Ziele zu gelangen, und sieht höchstens am Schlusse nach, ob die Muster-Lösung der seinigen entspreche. Wie aber, wenn die Lösung nicht gelingen will? Ein einziger Blick ins Buch wird hinreichen, ihm einen neuen Impuls zu geben; er erkennt, dass er verkehrt ausgeholt, und, auf den ihm nun angedeuteten Wege fortschreitend, wird er die Aufgabe ohne weitere Schwierigkeiten bewältigen, während er früher, im Zweifel, ob er das Richtige getroffen, keine Veranlassung hatte, einen neuen Anlauf zu dessen

Erringung zu nehmen. — So leicht es einerseits möglich ist, dass der träge Schüler, dem man Lösungen in die Hand giebt, gar Nichts mehr thun, sondern nur dem Lehrer vorlügen wird, er habe sich so und so lange vergeblich abgemüht, so wenig lässt sich andererseits läugnen, dass eben die vergebliche Bemühung, einen Eingang zur Lösung einer schwierigen Aufgabe aufzufinden, oder begangene Irrthümer zu entdecken, nicht minder als die Unmöglichkeit, sich über die Richtigkeit seiner Folgerungen eine beruhigende Gewissheit zu verschaffen, dem fleissigen Schüler sehr oft ein Gefühl der Unsicherheit, der Entmuthigung und endlich des Widerwillens einflösst, das seinem Studium nichts weniger als förderlich ist.

So sehe ich das Verhältniss an, und eben weil ich diese Ansicht von der Sache habe, konnte ich über die Zweckmässigkeit meines Unternehmens nicht im Zweifel sein, ganz abgesehen davon, dass mathematische Autoritäten wie Grüson, Wiegand, Sachs, Sohncke u. A. denselben Weg gegangen sind, und dass ihre Auflösungen fremder Aufgaben eine Anerkennung gefunden haben, die zur Genüge beweist, ihr Unternehmen sei ein ebenso gerechtfertigtes als dankbares gewesen.

Es hat mich aber auch noch ein zweites Motiv geleitet, nämlich der Wunsch, man möge die gegebenen Lösungen als einen Rapport über die Leistungen der mir anvertraut gewesenen Cadeten ansehen, und aus diesem Grunde hoffe ich auch, dass man ihnen eine nachsichtige Beurtheilung nicht versagen werde. — Es würde mich aber freuen, wenn dieser Zusammenstellung auch in anderer Beziehung eine günstige Aufnahme zu Theil würde, theils als Handbuch für die Correcturen jener meiner Herren Cameraden, welche sich mit mathematischem Unterricht beschäftigen, theils als Hülfsbuch für solche Regiments-Cadetten, die sich durch Selbst-Unterricht für die Offiziers-Prüfungen vorbereiten. Um das Werkchen namentlich in dieser letzten Hinsicht zweckdienlich zu machen, habe ich die bei den Auflösungen ausgeführten Rechnungs-Operationen stets in einigen Worten angedeutet, so weit es nämlich möglich war, ohne die Uebersichtlichkeit allzusehr zu beeinträchtigen.

Sowohl wegen der Bequemlichkeit in der Benützung, als um die Versuchung zur Durchsicht der Lösungen nicht allzusehr zu erhöhen, wollte ich anfänglich den Lösungen sämmtliche Aufgaben en bloc vorangehen lassen, wie es z. B. in der Wiegand'schen Bearbeitung der geometrischen Aufgaben des Miles Bland der

Fall ist, musste es aber unterlassen, um für werthvolleren Inhalt Raum zu gewinnen.

Um nämlich Herrn Dr. Nagel's Eigenthum nicht anzutasten, habe ich nicht allein seine Uebertragung der Aufgaben beibehalten, sondern auch die in seiner Ausgabe bereits gelösten Beispiele im zweiten Band ohne Lösungen beigefügt. Ich verweise daher bezüglich dieser letzteren auf die ausgezeichnete Arbeit des genannten Herrn, an der ich Nichts auszusetzen habe, als dass sie uns die Miles Bland'sche Sammlung nicht in ihrer ganzen Vollständigkeit bietet. Aus diesem Grunde habe ich auch aus dem englischen Originale alle fehlenden Aufgaben nachgetragen, sowohl jene aus der elementaren, wie jene aus der höheren Mathematik, und den letztern die Resultate beigesetzt, die ich bei ihrer Lösung erhalten habe.

München im Mai 1857.

C. Girl,
Oberlieutenant.

Inhalts-Verzeichniss
des ersten Bandes.

Gleichungen und Aufgaben mit Auflösungen.



I. Abschnitt.

Gleichungen vom ersten Grad mit einer unbekannten Grösse.

Nr. 1. $19x+13 = 59-4x.$

Auflösung. $19x+4x = 59-13$ (durch Versetzung),

$23x = 46$

$x = \frac{46}{23} = 2$ (durch Division mit 23).

Nr. 2. $3x+4-\frac{x}{3} = 46-2x.$

Auflösung. $9x+12-x = 138-6x$ (durch Multiplication mit 3),

$9x-x+6x = 138-12$ (durch Versetzung),

$14x = 126$

$x = \frac{126}{14} = 9$ (durch Division mit 14).

Nr. 3. $x^2+15x = 35x-x^2.$

Auflösung. $x+15 = 35-x$ (durch Division mit x),

$x+x = 35-15$ (durch Versetzung),

$2x = 20$

$x = \frac{20}{2} = 10$ (durch Division mit 2).

Nr. 4. $\frac{x}{6}-\frac{x}{4}+10 = \frac{x}{3}-\frac{x}{2}+11.$

Auflösung. $\frac{x}{6}-\frac{x}{4}-\frac{x}{3}+\frac{x}{2} = 11-10$ (durch Versetzung),

$= 1$

$2x-3x-4x-6x = 12$ (durch Multiplication mit 12 als kleinstem Dividuus von 6, 4, 3, 2).

$x = 12$

Nr. 5. $\frac{x+1}{5}+3 = \frac{2x-3}{3}.$

Auflösung. $3x+3+45 = 10x-15$ (durch Multiplikation mit $3 \cdot 5 = 15$),

$3+45+15 = 10x-3x$ (durch Versetzung),

$63 = 7x$

$\frac{63}{7} = 9 = x$ (durch Division mit 7).

Nr. 6. $\frac{7x+2}{3}+5x = 28+\frac{5x-6}{7}.$

Auflösung. $49x+14+105x = 588+15x-18$ (durch Multiplikation mit $3 \cdot 7 = 21$),

$49x+105x-15x = 588-18-14$ (durch Versetzung),

$139x = 556$

$x = \frac{556}{139} = 4$ (durch Division mit 139).

Nr. 7. $\frac{3x+4}{5}+2x = \frac{22-x}{5}+16.$

Auflösung. $3x+4+10x = 22-x+80$ (durch Multipl. mit 5),

$3x+10x+x = 22+80-4$ (durch Versetzung),

$14x = 98$

$x = \frac{98}{14} = 7$ (durch Division mit 14).

Nr. 8. $\frac{7-x}{2}+4 = \frac{3x-11}{4}+\frac{8x+15}{6}.$

Auflösung. $42-6x+48 = 9x-33+16x+30$ (durch Multiplikation mit 12, als kleinstem gemeinschaftlichen Dividuus von 6, 4, 2),

$42+48+33-30 = 9x+16x+6x$ (durch Versetzung),

$93 = 31x$

$\frac{93}{31} = 3 = x$ (durch Division mit 31).

Nr. 9. $\frac{2x-5}{18}+\frac{19-x}{3} = \frac{10x-7}{9}-\frac{5}{2}.$

Auflösung. $2x-5+114-6x = 20x-14-45$ (durch Multiplikation mit 18),

$114-5+14+45 = 20x-2x+6x$ (durch Versetzung),

$168 = 24x$

$\frac{168}{24} = 7 = x$ (durch Division mit 24).

Nr. 10. $x - \frac{2x+1}{3} = \frac{x+3}{4}$.

Auflösung. $12x - 8x - 4 = 3x + 9$ (durch Multiplikation mit $3 . 4 = 12$),

$12x - 8x - 3x = 9 + 4$ (durch Versetzung),

$x = 13$.

Nr. 11. $\frac{3x+5}{8} - \frac{21+x}{3} = 39 - 5x$.

Auflösung. $9x + 15 - 168 - 8x = 936 - 120x$ (durch Multiplikation mit $3 . 8 = 24$),

$9x - 8x + 120x = 936 - 15 + 168$ (durch Versetzung),

$121x = 1089$

$x = \frac{1089}{121} = 9$ (durch Division mit 121).

Nr. 12. $4x - \frac{19+2x}{5} = 15 - \frac{7x+11}{4}$.

Auflösung. $80x - 76 - 8x = 300 - 35x - 55$ (durch Multiplikation mit $4 . 5 = 20$),

$80x - 8x + 35x = 300 - 55 + 76$ (durch Versetz.),

$107x = 321$

$x = \frac{321}{107} = 3$ (durch Division mit 107).

Nr. 13. $\frac{21-3x}{3} - \frac{4x+6}{9} = 6 - \frac{5x+1}{4}$.

Auflösung. $252 - 36x - 16x - 24 = 216 - 45x - 9$ (durch Multiplikation mit 36),

$252 - 24 - 216 + 9 = 36x + 16x - 45x$ (durch Versetzung),

$21 = 7x$

$\frac{21}{7} = 3 = x$ (durch Division mit 7).

Nr. 14. $7\frac{5}{8} + \frac{3x-1}{4} - \frac{7x+3}{16} = \frac{8x+19}{8}$.

Auflösung. $122 + 12x - 4 - 7x - 3 = 16x + 38$ (durch Multiplikation mit 16),

$122 - 4 - 3 - 38 = 16x - 12x + 7x$ (durch Versetzung),

$77 = 11x$

$\frac{77}{11} = 7 = x$ (durch Divis. mit 11).

Nr. 15. $$\frac{6x+8}{11} - \frac{5x+3}{2} = \frac{27-4x}{3} - \frac{3x+9}{2}.$$

Auflösung. $36x+48-165x-99 = 594-88x-99x-297$ (durch Multipl. mit 66),

$36x-165x+88x+99x = 594-297-48+99$ (durch Versetzung),

$58x = 348$

$x = \frac{348}{58} = 6$ (durch Division mit 58).

Nr. 16. $$x+\frac{27-9x}{4} - \frac{5x+2}{6} = \frac{61}{12} - \frac{2x+5}{3} - \frac{29+4x}{12}.$$

Auflösung.

$12x+81-27x-10x-4 = 61-8x-20-29-4x$ (durch Multiplikation mit 12),

$81-4-61+20+29 = 27x+10x-8x-4x-12x$ (durch Versetzung),

$65 = 13x$

$\frac{65}{13} = 5 = x$ (durch Division mit 13).

Nr. 17. $$\frac{7x-8}{11} + \frac{15x+8}{13} = 3x - \frac{31-x}{2}.$$

Auflösung.

$182x-208+330x+176 = 858x-4433+143x$ (durch Multipl. mit $2.11.13=286$),

$176-208+4433 = 858x+143x-182x-330x$ (durch Versetzung),

$4401 = 489x$

$\frac{4401}{489} = 9 = x$ (durch Division mit 489).

Nr. 18. $$\frac{5x-1}{2} - \frac{7x-2}{10} = 6\frac{3}{5} - \frac{x}{2}.$$

Auflösung. $25x-5-7x+2 = 66-5x$ (durch Multiplikation mit 10),

$25x-7x+5x = 66+5-2$ (durch Versetzung)

$23x = 69$

$x = \frac{69}{23} = 3$ (durch Divis. mit 23).

Nr. 19. $$\frac{3x-3}{4} - \frac{3x-4}{3} = 5\frac{1}{3} - \frac{27+4x}{9}.$$

Auflösung. $27x-27-36x+48 = 192-108-16x$ (durch Multiplikation mit 36),

$27x - 36x + 16x = 192 - 108 + 27 - 48$ (durch Versetzung),

$7x = 63$

$x = \frac{63}{7} = 9$ (durch Division mit 7).

Nr. 20. $\frac{4x - 34}{17} - \frac{258 - 5x}{3} = \frac{69 - x}{2}$.

Auflösung. $24x - 204 - 8772 + 170x = 3519 - 51x$ (durch Multiplikation mit $2.3.17 = 102$),

$24x + 170x + 51x = 3519 + 204 + 8772$ (durch Versetzung),

$245x = 12495$

$x = \frac{12495}{245} = 51$ (durch Division mit 245),

Nr. 21. $2x - \frac{4x - 2}{13} = \frac{2x + 11}{5} - \frac{7 - 8x}{7}$.

Auflösung. $910x - 140x + 70 = 182x + 1001 - 455 + 520x$ (durch Multiplikation mit $5.7.13 = 455$).

$910x - 140x - 182x - 520x = 1001 - 455 - 70$ (durch Versetzung),

$68x = 476$

$x = \frac{476}{68} = 7$ (durch Divis. mit 68).

Nr. 22. $\frac{2x + 1}{29} - \frac{402 - 3x}{12} = 9 - \frac{471 - 6x}{2}$.

Auflösung. $24x + 12 - 11658 + 87x = 3132 - 81954 + 1044x$ (durch Multiplikation mit $12.29 = 348$),

$12 - 11658 - 3132 + 81954 = 1044x - 24x - 87x$ (durch Versetzung),

$67176 = 933x$

$\frac{67176}{933} = 72 = x$ (durch Divis. mit 933).

Nr. 23. $\frac{7x + 9}{8} - \frac{3x + 1}{7} = \frac{9x - 13}{4} - \frac{249 - 9x}{14}$.

Auflösung. $49x + 63 - 24x - 8 = 126x - 182 - 996 + 36x$ (durch Multiplikation mit 56),

$63 - 8 + 182 + 996 = 126x + 36x - 49x + 24x$ (durch Versetzung),

$1233 = 137x$

$\frac{1233}{137} = 9 = x$ (durch Division mit 137).

Nr. 24. $5 - \frac{3x+25}{4} - \frac{17+6x}{9} = 2\frac{1}{36} + x - \frac{9x+40}{8}$.

Auflösung.

$360 - 54x - 450 - 136 + 48x = 146 + 72x - 81x - 360$
(durch Multiplikation mit 72),

$48x - 54x - 72x + 81x = 146 - 360 - 360 + 450 + 136$
(durch Versetzung),

$3x = 12$

$x = \frac{12}{3} = 4$ (durch Divis. mit 3).

Nr. 25.

$\frac{7x-43}{12} + 13\frac{1}{2} - \frac{5+4x}{6} = 256 - \frac{3x-12}{9} - \frac{5x+29}{8} - 12x$.

Auflösung.

$42x - 258 + 972 - 60 - 48x = 18432 - 24x + 96 - 45x - 261 - 864x$
(durch Multiplikation mit 72),

$42x - 48x + 24x + 45x + 864x = 18432 + 96 - 261 + 258 - 972 + 60$
(durch Versetzung),

$927x = 17613$

$x = \frac{17613}{927} = 19$ (durch Division mit 927).

Nr. 26. $4x + \frac{1}{10} - \frac{3x-13}{16} - \frac{12+7x}{9} = 7x - 33 - \frac{9+5x}{10} - \frac{11x-17}{8}$.

Auflösung.

$2880x + 72 - 135x + 585 - 960 - 560x = 5040x - 23760 - 648 - 360x - 990x + 1530$
(durch Multipl. mit 720),

$72 + 585 - 960 + 23760 + 648 - 1530 = 5040x - 360x - 990x - 2880x + 135x + 560x$
(durch Versetzung),

$22575 = 1505x$

$\frac{22575}{1505} = 15 = x$ (durch Divis. mit 1505).

Nr. 27.

$\frac{31+4x}{3} - \frac{3x+47}{8} - \frac{3x-19}{16} = 47\frac{3}{4} + \frac{16-10x}{11} - \frac{5x+20}{7}$.

Auflösung.

$38192 + 4928x - 1386x - 21714 - 693x + 4389 = 176484 + 5376 - 3360x - 2640x - 10560$ (durch Multiplikation mit 3696),

$$4928x - 1386x - 693x + 3360x + 2640x = 176484 + 5376 - 10360 - 38192 + 21714 - 4389$$ (durch Versetzung),

$$8849x = 150433$$

$$x = \frac{150433}{8849} = 17$$ (durch Div. m. 8849).

Nr. 28. $\frac{3a+x}{x} - 5 = \frac{6}{x}$.

Auflösung. $3a + x - 5x = 6$ (durch Multiplikation mit x),

$3a - 6 = 5x - x$ (durch Versetzung),

$= 4x$

$\frac{3a-6}{4} = x$ (durch Division mit 4).

Nr. 29. $\frac{5}{6}ab + \frac{4}{5}ac - \frac{2}{3}cx = \frac{3}{4}ac + 2ab - 6cx$.

Auflösung. $50ab + 48ac - 40cx = 45ac + 120ab - 360cx$ (durch Multiplikation mit 60),

$360cx - 40cx = 45ac + 120ab - 50ab - 48ac$ (durch Versetzung),

$320cx = 70ab - 3ac$

$x = \frac{70ab - 3ac}{320c}$ (durch Division mit $320c$).

Nr. 30.

$$\frac{11x-13}{25} + \frac{19x+3}{7} - \frac{5x-25\frac{1}{3}}{4} = 28\frac{1}{7} - \frac{17x+4}{21}.$$

Auflösung.

$924x - 1092 + 5700x + 900 - 2625x + 13300 = 59100 - 1700x - 400$ (durch Multipl. mit 2100),

$924x + 5700x - 2625x + 1700x = 59100 - 400 + 1092 - 13300 - 900$ (durch Versetzung),

$5699x = 45592$

$x = \frac{45592}{5699} = 8$ (durch Divis. mit 5699).

Nr. 31. $\frac{\frac{3x}{2} - 4}{6} - \frac{4x-7}{9} + x = \frac{8 - \frac{x+4}{2}}{3}$.

Auflösung. $9x - 24 - 16x + 28 + 36x = 96 - 6x - 24$ (durch Multiplikation mit 36).

$9x - 16x + 36x + 6x = 96 - 28$ (durch Weglassen der gleichen Glieder u. Versetz.),

$35x = 68$

$x = \frac{68}{35} = 1\frac{33}{35}$ (durch Division mit 35).

Nr. 32. $\frac{x-1\frac{25}{26}}{2}-\frac{2-6x}{13}=x-\frac{5x-\frac{10-3x}{4}}{39}.$

Auflösung. $78x-153-24+72x = 156x-20x+10-3x$ (durch Multipl. mit 156),

$78x+72x-156x+20x+3x = 10+153+24$ (durch Versetzung),

$17x = 187$

$x = \frac{187}{17} = 11$ (durch Division mit 17).

Nr. 33. $\frac{a^2x}{bc}-\frac{d^2}{a}+bx=\frac{ex}{f}-b+(d+b)x.$

Auflösung. $\frac{a^2x}{bc}-\frac{ex}{f}-dx = -b+\frac{d^2}{a}$ (durch Weglassen der gleichen Gl. u. Versetzen),

$(a^2f-abce-abcdf)x = bcd^2f-ab^2cf$ (durch Multiplikation mit $abcf$),

$x = \frac{bcd^2f-ab^2cf}{a^2f-abce-abcdf}$ (durch Division mit $a^2f-abce-abcdf$.

$= \frac{bcf(d^2-ab)}{a(a^2f-bce-bcdf)}$

Nr. 34. $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{ex}{f}-g=h.$

Auflösung. $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{ex}{f} = g+h$ (durch Versetzung),

$(adf+bcf+bde)x = (g+h)\,bdf$ (durch Multiplikation mit bdf),

$x = \frac{(g+h)\,bdf}{adf+bcf+bde}$ (durch Divis. mit $adf+bcf+bde$).

Nr. 35. $\frac{a^2x}{b-c}-dc = bx-ac.$

Auflösung. $\frac{a^2x}{b-c}-bx = dc-ac$ (durch Versetzung),

$(a^2-b^2+bc)\,x = c(d-a)(b-c)$ (durch Multipl. mit $b-c$),

$x = \frac{c(d-a)(b-c)}{a^2-b^2+bc}$ (durch Division mit a^2-b^2+bc).

Nr. 36. $\frac{2x}{3} - \frac{1 - \frac{x}{2}}{4x} = \frac{x-1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{7}{12}.$

Aufl**ö**sung. $16x - \frac{6-3x}{x} = 12x - 12 + 4x + 14$ (durch Multiplikation mit 24),

$12 - 14 = -2 = \frac{6-3x}{x}$ (durch Versetzung),

$-2x = 6 - 3x$ (durch Multiplikation mit x),

$3x - 2x = 6$ (durch Versetzung),

$x = 6.$

Nr. 37. $\frac{9x+20}{36} = \frac{4x-12}{5x-4} + \frac{x}{4}.$

Auflösung. $9x + 20 = \frac{144x - 432}{5x - 4} + 9x$ (durch Multipl. mit 36),

$20 = \frac{144x - 432}{5x - 4}$ (durch Weglassen der gleichen Glieder),

$5 = \frac{36x - 108}{5x - 4}$ (durch Division mit 4).

$25x - 20 = 36x - 108$ (durch Multipl. mit $5x - 4$),

$108 - 20 = 36x - 25x$ (durch Versetzung),

$88 = 11x$

$\frac{88}{11} = 8 = x$ (durch Division mit 11).

Nr. 38. $\frac{20x + 36}{25} + \frac{5x + 20}{9x - 16} = \frac{4x}{5} + \frac{86}{25}.$

Auflösung. $20x + 36 + \frac{25(5x+20)}{9x - 16} = 20x + 86$ (durch Multipl. mit 25),

$\frac{25(5x+20)}{9x - 16} = 86 - 36 = 50$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$\frac{5x + 20}{9x - 16} = 2$ (durch Divis. mit 25),

$5x + 20 = 18x - 32$ (durch Multipl. mit $9x - 16$),

$32 + 20 = 18x - 5x$ (durch Versetzung),

[illegible] $= 13x$

$\frac{52}{13} = 4 = x$ (durch Division mit 13).

Nr. 39. $\frac{10x+17}{18} - \frac{12x+2}{13x-16} = \frac{5x-4}{9}$.

Auflösung. $10x+17 - \frac{216x+36}{13x-16} = 10x-8$ (durch Multipl. mit 18),

$17+8 = 25 = \frac{216x+36}{13x-16}$ (durch Weglassen der gleichen Gl. u. Versetzen),

$325x - 400 = 216x+36$ (durch Multipl. mit $13x-16$),

$325x - 216x = 400+36$ (durch Versetzung),

$109x = 436$

$x = \frac{436}{109} = 4$ (durch Division mit 109).

Nr. 40. $\frac{18x-19}{28} + \frac{11x+21}{6x+14} = \frac{9x+15}{14}$.

Auflösung. $18x-19 + \frac{14(11x+21)}{3x+7} = 18x+30$ (durch Multiplikation mit 28),

$\frac{14(11x+21)}{3x+7} = 30+19 = 49$ (durch Weglassen der gleichen Glieder u. Versetzen),

$\frac{2(11x+21)}{3x+7} = 7$ (durch Divis. mit 7),

$22x+42 = 21x+49$ (durch Multiplik. mit $3x+7$),

$22x - 21x = 49-42$ (durch Versetzen),

$x = 7$.

Nr. 41. $\frac{2x+8\frac{1}{2}}{9} - \frac{13x-2}{17x-32} + \frac{x}{3} = \frac{7x}{12} - \frac{x+16}{36}$.

Auflösung.

$8x+34 - \frac{468x-72}{17x-32} + 12x = 21x - x - 16$ (durch Multiplikation mit 36),

$34+16 = 50 = \frac{468x-72}{17x-32}$ (durch Versetz.),

$25 = \frac{234x-36}{17x-32}$ (durch Division mit 2).

$425x - 800 = 234x - 36$ (durch Multipl. mit $17x-32$),

$425x - 234x = 800 - 36$ (durch Versetzung)

$191x = 764$

$x = \frac{764}{191} = 4$ (durch Div. m. 191).

Nr. 42. $\frac{7x+6}{28} - \frac{2x+4\frac{2}{7}}{23x-6} + \frac{x}{4} = \frac{11x}{21} - \frac{x-3}{42}$.

Auflösung.

$21x+18 - \frac{84(2x+4\frac{2}{7})}{23x-6} + 21x = 44x - 2x + 6$ (durch Multipl. mit 84).

$18-6 = 12 = \frac{84(2x+4\frac{2}{7})}{23x-6}$ (durch Versetz.),

$1 = \frac{7(2x+4\frac{2}{7})}{23x-6}$ (durch Div. mit 12),

$23x-6 = 14x+30$ (durch Multipl. mit $23x-6$),

$23x-14x = 30+6$ (durch Versetzung),

$9x = 36$

$x = \frac{36}{9} = 4$ (durch Div. mit 9).

Nr. 43. $\frac{6-5x}{15} - \frac{7-2x^2}{14(x-1)} = \frac{1+3x}{21} - \frac{2x-\frac{11}{5}}{6} + \frac{1}{105}$.

Auflösung.

$84-70x - \frac{15(7-2x^2)}{x-1} = 10+30x-70x+77+2$ (durch Multiplikation mit 210),

$84-10-30x-77-2 = \frac{15(7-2x^2)}{x-1}$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$-5-30x = \frac{15(7-2x^2)}{x-1}$

$-1-6x = \frac{3(7-2x^2)}{x-1}$ = (durch Div. mit 5),

$-x-6x^2+1+6x = 21-6x^2$ (durch Mult. mit $x-1$),

$6x-x = 21-1$ (durch Versetzung),

$5x = 20$

$x = \frac{20}{5} = 4$ (durch Division mit 5).

Nr. 44. $\frac{a(b^2+x^2)}{bx} = ac+\frac{ax}{b}$.

Auflösung. $ab^2+ax^2 = abcx+ax^2$ (durch Multipl. mit bx),

$ab^2 = abcx$ (durch Weglassen der gleichen Glieder),

$\frac{ab^2}{abc} = \frac{b}{c} = x$ (durch Division mit abc).

Nr. 45. $\frac{cx^m}{a+bx} = \frac{dx^m}{e+fx}$.

Auflösung. $\frac{c}{a+bx} = \frac{d}{e+fx}$ (durch Division mit x^m),

$ce+cfx = ad+bdx$ [durch Mult. mit $(a+bx)(e+fx)$],

$(cf-bd)x = ad-ce$ (durch Versetzung),

$x = \frac{ad-ce}{cf-bd}$ (durch Division mit $cf-bd$),

$= \frac{ce-ad}{bd-cf}$ (durch Multiplikation von Zähler und Nenner durch -1).

Nr. 46. $\frac{a}{bx}+\frac{c}{dx}+\frac{e}{fx}+\frac{g}{hx} = k$.

Auflösung. $adfh+bcfh+bdeh+bdfg = bdfhkx$ (durch Multipl. mit $bdfhx$),

$\frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfhk} = x$ (durch Div. mit $bdfhk$),

$\frac{fh(ad+bc)+(eh+fg)bd}{bdfhk} = x$.

Nr. 47. $(a+x)(b+x)-(b+c)a = \frac{a^2c}{b}+x^2$.

Auflösung.

$ab+bx+ax+x^2-ab-ac = \frac{a^2c}{b}+x^2$ (durch Auflösen der Klammer),

$(a+b)x = \frac{a^2c}{b}+ac$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$(a+b)bx = ac(a+b)$ (durch Mult. mit b),

$x = \frac{ac(a+b)}{b(a+b)} = \frac{ac}{b}$ [durch Div. mit $b(a+b)$].

Nr. 48. $\frac{10+x}{5} : \frac{4x-9}{7} = 14:5$.

Auflösung. $10+x = 8x-18$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

$10+18 = 8x-x$ (durch Versetzung),

$28 = 7x$

$\frac{28}{7} = 4 = x$ (durch Division mit 7).

Nr. 49. $\frac{17-4x}{4} : \left(\frac{15+2x}{3} - 2x\right) = 5 : 4.$

Auflösung. $17-4x = \frac{75+10x}{3} - 10x$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

$51-12x = 75+10x-30x$ (durch Multipl. mit 3),

$30x-12x-10x = 75-51$ (durch Versetz.),

$8x = 24$

$x = \frac{24}{8} = 3$ (durch Div. mit 8).

Nr. 50. $(16x+5) : \frac{4x+14}{9x+31} = (36x+10) : 1.$

Auflösung. $16x+5 = \frac{144x^2+40x+504x+140}{9x+31}$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

$144x^2+45x+496x+155 = 144x^2+544x+140$ (durch Multipl. mit $9x+31$),

$155-140 = 544x-45x-496x$ (durch Weglassen der gleichen Gl. u. Versetz.),

$15 = 3x$

$\frac{15}{3} = 5 = x$ (durch Division mit 3).

Nr. 51. $\frac{4x+3}{6x-43} : 1 = (2x+19) : (3x-19).$

Auflösung. $\frac{12x^2+9x-76x-57}{6x-43} = 2x+19$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

$12x^2-67x-57 = 12x^2+114x-86x-817$ (durch Mult. m. $6x-43$),

$817-57 = 114x-86x+67x$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$760 = 95x$

$\frac{760}{95} = 8 = x$ (durch Divis. mit 95).

Nr. 52. $5x + \frac{7x+9}{4x+3} = 9 + \frac{10x^2-18}{2x+3}.$

Auflösung. $\frac{20x^2+15x+7x+9}{4x+3} = \frac{18x+27+10x^2-18}{2x+3}$ (durch Bringen auf gleiche Benennung),

$\frac{20x^2+22x+9}{4x+3} = \frac{18x+10x^2+9}{2x+3}$

$$40x^3+44x^2+18x+60x^2+66x+27 = 72x^3+40x^3+36x+54x+30x^2+27$$ [durch Mult. mit $(4x+3)(2x+3)$],

$$44x^3+60x^2-72x^2-30x^2 = 36x+54x-18x-66x$$ (durch Weglassen der gleichen Gl. u. Versetz.),

$$2x^2 = 6x$$

$$x = \frac{6x}{2x} = 3$$ (durch Division mit $2x$).

Nr. 53. $\sqrt[3]{10x+35}-1 = 4$.

Auflösung. $\sqrt[3]{10x+35} = 4+1 = 5$ (durch Versetzung),

$10x+35 = 125$ (durch Erheben in den Kubus),

$10x = 125-35 = 90$ (durch Versetzung),

$x = \frac{90}{10} = 9$ (durch Division mit 10).

Nr. 54. $\sqrt[5]{9x-4}+6 = 8$.

Auflösung. $\sqrt[5]{9x-4} = 8-6 = 2$ (durch Versetzung),

$9x-4 = 32$ (durch Erheben in die fünfte Potenz),

$9x = 32+4 = 36$ (durch Versetzung),

$x = \frac{36}{9} = 4$ (durch Division mit 9).

Nr. 55. $\sqrt{x+16} = 2+\sqrt{x}$.

Auflösung. $x+16 = 4+4\sqrt{x}+x$ (durch Erheben zum Quadrat),

$16-4 = 12 = 4\sqrt{x}$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzung),

$3 = \sqrt{x}$ (durch Division mit 4),

$9 = x$ (durch Erheben zum Quadrat).

Nr. 56. $\sqrt{x-32} = 16-\sqrt{x}$.

Auflösung. $x-32 = 256-32\sqrt{x}+x$ (durch Erheben zum Quadrat),

$32\sqrt{x} = 256+32 = 288$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$\sqrt{x} = 9$ (durch Division mit 32),

$x = 81$ (durch Erheben zum Quadrat).

Nr. 57. $\sqrt{4x+21} = 2\sqrt{x}+1$.

Auflösung. $4x+21 = 4x+4\sqrt{x}+1$ (durch Erheben z. Quadrat).

$21-1 = 20 = 4\sqrt{x}$ durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$5 = \sqrt{x}$ (durch Division mit 4),

$25 = x$ (durch Erheben zum Quadrat).

Nr. 58. $a\sqrt[3]{bx-c} = d\sqrt[3]{ex+fx-g}$.

Auflösung. $a^3bx - a^3c = d^3ex + d^3fx - d^3g$ (durch Erheben in den Kubus),

$(a^3b - d^3e - d^3f)x = a^3c - d^3g$ (durch Versetzung),

$x = \dfrac{a^3c - d^3g}{a^3b - d^3e - d^3f}$ (durch Division mit $a^3b - d^3e - d^3f$).

$= \dfrac{d^3g - a^3c}{d^3e + d^3f - a^3b}$ (durch Multipl. von Zähler u. Nenner mit -1).

Nr. 59. $\sqrt[3]{a^2+c} = \sqrt[4]{\dfrac{a^2+c}{d(x+b)}}$.

Auflösung. $(a^2+c)^4 = \dfrac{(a^2+c)^3}{d^3(x+b)^3}$ (durch Erhebung in die 12te Potenz),

$a^2+c = \dfrac{1}{d^3(x+b)^3}$ (durch Division mit $(a^2+c)^3$),

$(x+b)^3 \,.\, (a^2+c) = \dfrac{1}{d^3}$ (durch Multiplikation mit $(x+b)^3$),

$(x+b)^3 = \dfrac{1}{(a^2+c)\,d^3}$ (durch Division mit a^2+c),

$x+b = \dfrac{1}{d\sqrt[3]{a^2+c}}$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),

$x = \dfrac{1}{d\sqrt[3]{a^2+c}} - b$ (durch Versetzung).

Nr. 60. $\sqrt[m]{a+x} = \sqrt[2m]{x^2+5ax+b^2}$.

Auflösung. $a^2+2ax+x^2 = x^2+5ax+b^2$ (durch Erhebung in in die $2m$te Potenz),

$a^2 - b^2 = 5ax - 2ax = 3ax$ (durch Weglassen der gleichen Gl. u. Versetzen),

$\dfrac{a^2-b^2}{3a} = x$ (durch Division mit $3a$).

Nr. 61. $a + b\sqrt[m]{x+d} = c$.

Auflösung. $b\sqrt[m]{x+d} = c - a$ (durch Versetzung),

$\sqrt[m]{x+d} = \dfrac{c-a}{b}$ (durch Division mit b),

$x+d = \left(\dfrac{c-a}{b}\right)^m$ (durch Erheb. in die $m$te Potenz),

$x = \left(\dfrac{c-a}{b}\right)^m - d$ (durch Versetzung).

Nr. 62. $$\frac{\sqrt{9x}-4}{\sqrt{x}+2} = \frac{15+\sqrt{9x}}{\sqrt{x}+40}.$$

Auflösung.

$3x-4\sqrt{x}+120\sqrt{x}-160 = 15\sqrt{x}+3x+30+6\sqrt{x}$ (durch Multipl. mit $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+40)$),

$120\sqrt{x}-4\sqrt{x}-15\sqrt{x}-6\sqrt{x} = 30+160$ (durch Weglassen der gleichen Gl. u. Versetzen),

$95\sqrt{x} = 190$

$\sqrt{x} = 2$ (durch Division mit 95),

$x = 4$ (durch Erheben z. Quadrat).

Nr. 63. $$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{b}}{\sqrt{x}-\sqrt{b}} = \frac{a}{b}.$$

Auflösung. $b\sqrt{x}+b\sqrt{b} = a\sqrt{x}-a\sqrt{b}$ [durch Multiplik. mit $b(\sqrt{x}-\sqrt{b})$]

$(a+b)\sqrt{b} = (a-b)\sqrt{x}$ (durch Versetzung),

$\frac{a+b}{a-b}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{x}$ (durch Division mit $a-b$),

$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 . b = x$ (durch Erheben zum Quadrat).

Nr. 64. $$\frac{\sqrt{6x}+2}{\sqrt{6x}+2} = \frac{4\sqrt{6x}-9}{4\sqrt{6x}+6}.$$

Auflösung.

$24x-8\sqrt{6x}+6\sqrt{6x}-12 = 24x-9\sqrt{6x}+8\sqrt{6x}-18$ [durch Multipl. mit $(\sqrt{6x}+2)(4\sqrt{6x}+6)$],

$18-12 = 8\sqrt{6x}-9\sqrt{6x}+8\sqrt{6x}-6\sqrt{6x}$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$6 = \sqrt{6x}$

$36 = 6x$ (durch Erheben zum Quadrat),

$\frac{36}{6} = 6 = x$ (durch Division mit 6).

Nr. 65. $$\frac{5x-9}{\sqrt{5x}+3}-1 = \frac{\sqrt{5x}-3}{2}.$$

Auflösung. $\sqrt{5x}-3-1 = \frac{\sqrt{5x}-3}{2}$ (durch Divis. von Zähler und Nenner mit $\sqrt{5x}+3$, weil nemlich $\sqrt{5x}-9 = (\sqrt{5x}+3)(\sqrt{5x}-3)$ ist),

$2\sqrt{5x}-6-2 = \sqrt{5x}-3$ (durch Multipl. mit 2),

$\sqrt{5x} = 6+2-3 = 5$ (durch Versetzung),

$5x = 25$ (durch Erheben zum Quadrat),

$x = \frac{25}{5} = 5$ (durch Division mit 5).

Nr. 66. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+12}} = 1+x.$

Auflösung. $1+x\sqrt{x^2+12} = 1+2x+x^2$ (durch Erheben zum Quadrat),

$\sqrt{x^2+12} = 2+x$ (durch Weglassen der gleichen Glieder u. Div. mit x),

$x^2+12 = 4+4x+x^2$ (durch Erheben zum Quadrat),

$12-4=8 = 4x$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzung),

$\frac{8}{4}=2 = x$ (durch Division mit 4).

Nr. 67. $\frac{ax}{b}\sqrt{c^2x^2+d^2}+\frac{acx^2}{b} = ex.$

Auflösung. $\frac{a}{b}\sqrt{c^2x^2+d^2}+\frac{acx}{b} = e$ (durch Division mit x),

$a\sqrt{c^2x^2+d^2}+acx = be$ (durch Multipl. mit b),

$a\sqrt{c^2x^2+d^2} = be-acx$ (durch Versetz.),

$a^2c^2x^2+a^2d^2 = b^2e^2-2abcex+a^2c^2x^2$ (durch Erheben z. Quadrat),

$2abcex = b^2e^2-a^2d^2$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$x = \frac{b^2e^2-a^2d^2}{2abce}$ (durch Division mit $2abce$),

$= \frac{(be+ad)(be-ad)}{2abce}$ (weil die Differenz der Quadrate dem Produkte aus Summe und Differenz der Wurzeln gleich ist).

Nr. 68. $\sqrt{x}+\sqrt{x-9} = \frac{36}{\sqrt{x-9}}.$

Auflösung. $\sqrt{x^2-9x}+x-9 = 36$ (durch Multipl. mit $\sqrt{x-9}$),

$\sqrt{x^2-9x} = 36+9-x$ (durch Versetzung),

$= 45-x$

$x^2-9x = 2025-90x+x^2$ (durch Erheben zum Quadrat),

$90x-9x=81x = 2025$ (durch Weglassen der gleichen Glieder u. Versetzen),

$x = \frac{2025}{81} = 25$ (durch Div. mit 81).

II. Abschnitt.

Gleichungen vom ersten Grad mit mehreren unbekannten Grössen.

Nr. 1.
$\begin{cases} \text{I.} & x+15y = 53 \\ \text{II.} & y+3x = 27. \end{cases}$

Auflösung.
III. $3x+45y = 159$ (Aus I. durch Multipl. mit 3),
$44y = 132$ (durch Subtraction von II. von III.),
*IV. $y = 3$ (durch Division mit 44),
V. $x = 53 = 15y$ (aus I. durch Versetz.),
$= 53 - 45$ (durch Substitution von IV. in V.),
*VI. $= 8$.

Nr. 2.
$\begin{cases} \text{I.} & 4x+9y = 51 \\ \text{II.} & 8x-13y = 9. \end{cases}$

Auflösung.
III. $8x+18y = 102$ (aus I. durch Multipl. mit 2),
$31y = 93$ (durch Subtr. von II. von III.),
*IV. $y = 3$ (durch Division mit 31),
V. $4x = 51 - 9y$ (aus I. durch Versetz.),
$= 51 - 27 = 24$ (durch Substitution von IV. in V.),
*VI. $x = 6$ (durch Division mit 4).

Nr. 3.
$\begin{cases} \text{I.} & \frac{x}{6}+\frac{y}{4} = 6 \\ \text{II.} & \frac{x}{4}+\frac{y}{6} = 5\frac{2}{3}. \end{cases}$

Auflösung.
III. $2x+3y = 72$ (aus I. durch Multipl. mit 12),
IV. $3x+2y = 68$ (aus II. durch Multipl. mit 12),
$5x+5y = 140$ (durch Addition von III. u. IV.),
$x+y = 28$ (durch Division mit 5),
V. $2x+2y = 56$ (durch Multiplikation mit 2),
*VI. $y = 16$ (durch Subtr. von V. von III.),
*VII. $x = 12$ (durch Subtr. von V. von IV.).

Nr. 4. $\begin{cases} \text{I.} & \frac{x}{8} + 8y = 194 \\ \text{II.} & \frac{y}{8} + 8x = 131. \end{cases}$

Auflösung.
III. $x + 64y = 1552$ (aus I. durch Mult. mit 8),
IV. $y + 64x = 1048$ (aus II. durch Mult. mit 8),
$65y + 65x = 2600$ (durch Add. von III. u. IV.),
V. $x + y = 40$ (durch Division mit 65),
$63y = 1512$ (durch Subtr. von V. von III.),
* VI. $y = 24$ (durch Division mit 63),
$63x = 1008$ (durch Subtr. von V. von IV),
* VII. $x = 16$ (durch Division mit 63).

Nr. 5. $\begin{cases} \text{I.} & \frac{3x-1}{5} + 3y - 4 = 15 \\ \text{II.} & \frac{3y-5}{6} + 2x - 8 = 7\frac{2}{3}. \end{cases}$

Auflösung.
$3x - 1 + 15y - 20 = 75$ (aus I. durch Mult. mit 5),
$3x + 15y = 96$ (durch Versetzung),
III. $x + 5y = 32$ (durch Divis. mit 3),
$3y - 5 + 12x - 48 = 46$ (aus II. durch Mult. mit 6),
$3y + 12x = 99$ (durch Versetzung),
IV. $y + 4x = 33$ (durch Div. mit 3),
V. $4x + 20y = 128$ (aus III. durch Mult. mit 4),
$19y = 95$ (durch Subtr. von IV. von V.),
* VI. $y = 5$ (durch Divis. mit 19),
VII. $x = 32 - 5y$ (aus III. durch Versetzung),
$= 32 - 25$ (durch Substit. von VI. in VII),
* VIII. $= 7$.

Nr. 6. $\begin{cases} \text{I.} & 9x + \frac{8y}{5} = 70 \\ \text{II.} & 7y - \frac{13x}{3} = 44. \end{cases}$

Auflösung. III. $45x + 8y = 350$ (aus I. durch Multipl. mit 5),

IV. $21y - 13x = 132$ (aus II. durch Multipl. mit 3),

V. $945x + 168y = 7350$ (aus III. durch Multipl. mit 21),

VI. $168y - 104x = 1056$ (aus IV. durch Multipl. mit 8),

$1049x = 6294$ (durch Subtr. v. VI. von V.),

*VII. $x = 6$ (durch Division mit 1049),

VIII. $8y = 350 - 45x$ (aus III. durch Vers.),

$= 350 - 270 = 80$ (durch Subst. von VII. in VIII.),

*IX. $y = 10$ (durch Division mit 8).

Nr. 7. $\begin{cases} \text{I.} & \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = 3y - 5 \\ \text{II.} & \frac{5y-7}{2} + \frac{4x-3}{6} = 18 - 5x. \end{cases}$

Auflösung. $28 + 4x - 10x + 5y = 60y - 100$ (aus I. durch Mult. mit 20),

III. $128 = 55y + 6x$ (durch Vers.),

$15y - 21 + 4x - 3 = 108 - 30x$ (aus III. durch Mult. mit 6),

IV. $15y + 34x = 132$ (durch Versetzung),

V. $165y + 18x = 384$ (aus III. durch Mult. mit 3),

VI. $165y + 374x = 1452$ (aus IV. durch Mult. mit 11),

$356x = 1068$ (durch Subtr. von V. von VI.),

*VII. $x = 3$ (durch Divis. mit 356),

VIII. $15y = 132 - 34x$ (aus IV. durch Versetzung),

$= 132 - 102 = 30$ (durch Subst. vor VII. in VIII),

*IX. $y = 2$ (durch Division mit 15),

Nr. 8. $\begin{cases} \text{I.} & x+1-\frac{3y+4x}{7} = 7-\frac{9y+33}{14} \\ \text{II.} & y-3-\frac{5x-4y}{2} = x-\frac{11y-19}{4}. \end{cases}$

Auflösung. $14x+14-6y-8x = 98-9y-33$ (aus I. durch Mult. mit 14),

$6x+3y = 51$ (durch Versetzung),

III. $2x+y = 17$ (durch Divis. mit 3),

$4y-12-10x+8y = 4x-11y+19$ (aus II. durch Mult. mit 4),

IV. $23y-14x = 31$ (durch Versetzung),

V. $14x+7y = 119$ (aus III. durch Mult. mit 7),

$30y = 150$ (durch Add. v. IV. u. V.),

*VI. $y = 5$ (durch Division mit 30),

VII. $2x = 17-y$ (aus III. durch Vers.),

$= 17-5 = 12$ (durch Substit. von VI. in VII.),

*VIII. $x = 6$ (durch Division mit 2).

Nr. 9. $\begin{cases} \text{I.} & 4x+\frac{15-x}{4} = 2y+5+\frac{7x+11}{16} \\ \text{II.} & 3y-\frac{2x+y}{5} = 2x+\frac{2y+4}{3}. \end{cases}$

Auflösung. $64x+60-4x = 32y+80+7x+11$ (aus I. durch Mult. mit 16),

III. $53x-32y = 31$ (durch Versetzung),

$45y-6x-3y = 30x+10y+20$ (aus II. durch Mult. mit 15),

IV. $32y-36x = 20$ (durch Versetzung),

V. $8y-9x = 5$ (durch Division mit 4),

$17x = 51$ (durch Add. von III. u. IV),

*VI. $x = 3$ (durch Division mit 17),

VII. $8y = 5+9x$ (aus V. durch Vers.),

$= 5+27 = 32$ (durch Substit. von VI. in VII.),

*VIII. $y = 4$ (durch Division mit 8).

Nr. 10. $\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & x-\frac{3x+5y}{17}+17=5y+\frac{4x+7}{3} \\ \text{II.} & \frac{22-6y}{3}-\frac{5x-7}{11}=\frac{x+1}{6}-\frac{8y+5}{18}. \end{array}\right.$

Auflösung. $51x-9x-15y+867=255y+68x+119$ (aus I. durch Mult. mit 51),

III. $748=270y+26x$ (durch Vers.),

IV. $374=135y+13x$ (durch Divis. mit 2),

$1452-396y-90x+126=33x+33-88y-55$ (aus II. durch Mult. mit 198),

V. $1600=123x+308y$ (durch Vers.),

VI. $3198x+33210y=92004$ (aus II. durch Mult. mit 123),

VII. $3198x+8008y=41600$ (aus V. durch Mult. mit 26),

$25202y=50404$ (durch Subtr. von VII. von VI.),

*VIII. $y=2$ (durch Div. mit 25202),

IX. $13x=374-135y$ (aus IV. durch Versetzung),

$=374-270=104$ (durch Subst. von VIII. in IX.),

*X. $x=8$ (durch Divis. mit 13).

Nr. 11. $\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{7x-21}{6}+\frac{3y-x}{3}=4+\frac{3x-19}{2} \\ \text{II.} & \frac{2x+y}{2}-\frac{9x-7}{8}=\frac{3y+9}{4}-\frac{4x+5y}{16}. \end{array}\right.$

Auflösung. $7x-21+6y-2x=24+9x-57$ (aus I. durch Mult. mit 6),

$12=4x-6y$ (durch Vers.),

III. $6=2x-3y$ (durch Divis. mit 2),

$16x+8y-18x+14=12y+36-4x-5y$ (aus II. durch Mult. mit 16),

IV. $2x+y=22$ (durch Versetzung),

$y+6=22-3y$ (durch Addit. von III. u. IV. u. Weglassen der gleich. Gl.),

$4y = 16$ (durch Versetzung),

*V. $y = 4$ (durch Division mit 4),

VI. $2x = 22 - y$ (aus IV. durch Vers.),

$= 22 - 4 = 18$ (durch Subst. von V. in VI.),

*VII. $x = 9$ (durch Division mit 2).

Nr. 12. I. $\frac{a}{b+y} = \frac{b}{3a+x}$

II. $ax + 2by = c$

Auflösung. $3a^2 + ax = b^2 + by$ [aus I. durch Mult. mit $(b+y)(3a+x)$],

III. $ax - by = b^2 - 3a^2$ (durch Versetzung),

IV. $2ax - 2by = 2b^2 - 6a^2$ (durch Mult. mit 2),

$3by = c - b^2 + 3a^2$ (durch Subtr. von III. von II.),

*V. $y = \frac{3a^2 + c - b^2}{3b}$ (durch Div. mit $3b$),

$3ax = c + 2b^2 - 6a^2$ (durch Addit. von II. und IV),

*VI. $x = \frac{2b^2 + c - 6a^2}{3a}$ (durch Div. mit $3a$).

Nr. 13. I. $\frac{7x+6}{11} + \frac{4y-9}{3} = 3x - \frac{13-x}{2} - \frac{3y-x}{5}$

II. $(3x+4) : (2y-3) = 5 : 3.$

Auflösung. $210x + 180 + 440y - 990 = 990x - 2145 + 165x - 198y + 66x$ (aus I. durch Mult. mit 330),

III. $1335 = 1011x - 638y$ (durch Versetzung),

$9x + 12 = 10y - 15$ (aus II. durch Bildung gleich. Produkte),

IV. $27 = 10y - 9x$ (durch Vers.),

V. $3033x - 1914y = 4005$ (aus III. durch Mult. mit 3),

VI. $3370y - 3033x = 9099$ (aus IV. durch Mult. mit 337),

$1456y = 13104$ (durch Add. von V. und VI.),

*VII. $y = 9$ (durch Divis. mit 1456),

VIII. $9x = 10y - 27$ (aus IV. durch Vers.),

$= 90 - 27 = 63$ (durch Substit. von VII. in VIII.),

*IX. $x = 7$ (durch Division mit 9).

Nr. 14. I. $\frac{5x+13}{2} - \frac{8y-3x-5}{6} = 9 + \frac{7x-3y+1}{3}$

II. $\frac{x+7}{3} : \left(\frac{3y-8}{4} + 4x\right) = 4 : 21.$

Auflösung. $15x + 39 - 8y + 3x + 5 = 54 + 14x - 6y + 2$ (aus I. durch Mult. mit 6),

$4x - 2y = 12$ (durch Versetzung),

III. $2x - y = 6$ (durch Div. mit 2),

$7x + 49 = 3y - 8 + 16x$ (aus II. durch Bildung gleicher Produkte),

$57 = 9x + 3y$ (durch Vers.),

IV. $3x + y = 19$ (durch Div. mit 3),

$5x = 25$ (durch Addit. von III. und IV.),

*V. $x = 5$ (durch Div. mit 5),

VI. $y = 19 - 3x$ (aus IV. durch Versetzung),

$= 19 - 15$ (durch Subst. von V. in VI.).

*VII. $= 4.$

Nr. 15. I. $(x+y) : (4x+)y = 4 : 7$

II. $\frac{\frac{11y}{6} - 2x}{5} - \frac{21 - 3y}{4} = \frac{2 + \frac{x}{10}}{3} - \frac{1}{12}.$

Auflösung. $7x + 7y = 16x + 4y$ (aus I. durch Bildung der gleich. Prod.),

$3y = 9x$ (durch Versetzung),

III. $y = 3x$ (durch Divis. mit 3),

$22y - 24x - 315 + 45y = 40 + 2x - 5$ (aus II. durch Mult. mit 60),

IV. $67y - 26x = 350$ (durch Versetzung),

$201x - 26x = 175x = 350$ (d. Subst. v. III. in IV.),

*V. $x = 2$ (durch Divis. mit 175),

*VI. $y = 6$ (durch Subst. v. V. in III.).

Nr. 16. $\begin{cases} \text{I.} \quad \dfrac{3x+4y+3}{10} - \dfrac{2x+7-y}{15} = 5 + \dfrac{y-8}{5} \\ \text{II.} \quad \dfrac{9y+5x-8}{12} - \dfrac{x+y}{4} = \dfrac{7x+6}{11}. \end{cases}$

Auflösung. $9x+12y+9-4x-14+2y = 150+6y-48$ (aus I. durch Mult. mit 30),

III. $5x+8y = 107$ (durch Versetz.),

$99y+55x-88-33x-33y = 84x+72$ (aus II. durch Mult. mit 132),

$66y-62x = 160$ (durch Vers.),

IV. $33y-31x = 80$ (durch Div. mit 2),

V. $155x+248y = 3317$ (aus III. durch Mult. mit 31),

VI. $165y-155x = 400$ (aus IV. durch Mult. mit 5),

$413y = 3717$ (durch Add. von V. und VI.),

*VII. $y = 9$ (durch Div. mit 413),

VIII. $5x = 107-8y$ (aus III. durch Vers.),

$= 107-72 = 35$ (durch Subst. von VII. in VIII.),

*IX. $x = 7$ (durch Div. mit 5).

Nr. 17.

$\begin{cases} \text{I.} \quad 13x + \dfrac{4y-17+x}{12} - \dfrac{15-3x}{4} = \dfrac{12y+11}{3} - \dfrac{12x+7y+28}{6} \\ \text{II.} \quad \dfrac{9x+18}{4} - \dfrac{12+5y-6x}{5} = \dfrac{15x-3y-5}{8} - \dfrac{7x+y-10}{15} \end{cases}$

Auflösung.

$156x+4y-17+x-45+9x = 48y+44-24x-14y-56$ (aus I. durch Mult. mit 12),

$190x-30y = 50$ (durch Versetzung),

III. $19x-3y = 5$ (durch Division mit 10),

$270x+540-288-120y+144x = 225x-45y-75-56x-8y+80$ (aus II. durch Mult. mit 120),

IV. $247 = 67y-245x$ (durch Vers.),

V. $1273x-201y = 335$ (aus III. durch Mult. mit 67),

VI. $201y - 735x = 741$ (aus IV. durch Mult. mit 3),

$538x = 1076$ (durch Add. von V. und VI.),

VII. $x = 2$ (durch Div. mit 538),

VIII. $3y = 19x - 5$ (aus III. durch Versetzung),

$= 38 - 5 = 33$ (durch Subst. von VII. in VIII.),

IX. $y = 11$ (durch Div. mit 3).

Nr. 18.

I. $3x + 5y = \frac{(8a - 2b)\,ab}{a^2 - b^2}$

II. $a^2x - \frac{acb^2}{a+b} + (a+b+c)\,by = b^2x + (a+2b)\,ab.$

Auflösung. $3x = \frac{(8a-2b)\,ab}{a^2-b^2} - 5y$ (aus I. durch Vers.),

III. $x = \frac{(8a-2b)\,ab}{3\,(a^2-b^2)} - \frac{5}{3}y$ (durch Div. mit 3),

$a^2x - b^2x + (a+b+c)\,by = (a+2b)\,ab + \frac{acb^2}{a+b}$ (aus II. durch Vers.),

IV. $(a^2-b^2)x + (a+b+c)\,by = \frac{ab}{a+b}(a^2+3ab+2b^2+bc)$ (durch Vereinigung der rechten Seite),

$\frac{(8a-2b)\,ab}{3} - \frac{5}{3}(a^2-b^2)\,y + (a+b+c)\,by = \frac{ab}{a+b}(a^2+3ab+2b^2+bc)$ (durch Subst. von III. in IV),

$(8a-2b)\,ab - 5a^2y + 5b^2y + 3aby + 3b^2y + 3bcy = \frac{ab}{a+b}(3a^2+9ab+6b^2+3bc)$ (durch Mult. mit 3),

$(3ab + 8b^2 + 3bc - 5a^2)\,y = \frac{ab}{a+b}(3a^2+9ab+6b^2+3bc) - (8a-2b)\,ab$ (durch Versetzung),

$= \frac{ab}{a+b} + (3a^2+9ab+6b^2+3bc - 8a^2+2ab-8ab+2b^2)$ (durch Bringen auf gleiche Benennung),

$= \frac{ab}{a+b}(3ab+8b^2+3bc-5a^2)$

*V. $y = \frac{ab}{a+b}$ (durch Divis. mit $3ab+8b^2+2bc-5a^2$),

$x = \frac{(8a-2b)ab}{3(a^2-b^2)} - \frac{5}{3} \cdot \frac{ab}{a+b}$ (durch Subst. von V. in III.),

$= \frac{(8a-2b)ab - 5ab(a-b)}{3(a^2-b^2)}$ (durch Bringen auf gleiche Benennung),

$= \frac{ab(8a-2b-5a+5b)}{3(a+b)(a-b)}$ (durch Vereinigung des Zählers und Zerlegung des Nenners in Faktoren),

$= \frac{3ab(a+b)}{3(a+b)(a-b)}$

*VI. $= \frac{ab}{a-b}$ (durch Div. von Zähler u. Nenner mit $3(a+b)$).

Nr. 19.

I. $\frac{2x+y}{9} + \frac{7y+6x+11}{18} = 9\frac{1}{2} - \frac{5x-17}{6}$

II. $\frac{5x+3y+2}{7} : \frac{9y+6}{2} = 1:3.$

Auflösung.

$4x+2y+7y+6x+11 = 171-15x+51$ (aus I. durch Mult. mit 18),

III. $25x+5y = 211$ (durch Versetzung),

$\frac{15x+9y+6}{7} = \frac{9y+6}{2}$ (aus II. durch Bildung der gleichen Produkte),

$30x+18y+12 = 63y+42$ (durch Mult. mit 21),

$30x-45y = 30$ (durch Versetzung),

IV. $2x-3y = 2$ (durch Division mit 15),

V. $6x-9y = 6$ (durch Mult. mit 3),

$31x = 217$ (durch Add. von III. u. V.),

*VI. $x = 7$ (durch Div. mit 31),

VII. $3y = 2x-2$ (aus IV. durch Versetz.),

$= 14-2 = 12$ (durch Subst. von VI. in VII.),

*VIII. $y = 4$ (durch Div. mit 3).

Nr. 20.

$$\begin{cases} \text{I.} & \frac{3x-5y}{3} - \frac{2x-8y-9}{12} = \frac{y}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ \text{II.} & \left(\frac{x}{7} + \frac{y}{4} + 1\frac{1}{3}\right) : \left(4x - \frac{y}{8} - 24\right) = 3\frac{1}{3} : 3\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Auflösung. $12x - 20y - 2x + 8y + 9 = 6y + 4 + 3$ (aus I. durch Mult. mit 12),

$2 = 18y - 10x$ (durch Versetzung),

III. $9y - 5x = 1$ (durch Div. mit 2),

$\frac{x}{2} + \frac{7y}{8} + \frac{14}{3} = \frac{40}{3}x - \frac{5y}{12} - 80$ (aus II. durch Bildung der gleichen Produkte),

$12x + 21y + 112 = 320x - 10y - 1920$ (durch Mult. mit 24),

IV. $2032 = 308x - 31y$ (durch Versetzung),

V. $279y - 155x = 31$ (aus III. durch Mult. mit 31),

VI. $2772x - 279y = 18288$ (aus IV. durch Mult. mit 9),

$2617x = 18319$ (durch Add. von V. und VI.),

*VII. $x = 7$ (durch Div. mit 2617),

VIII. $9y = 5x + 1$ (aus III. durch Vers.),

$= 35 + 1 = 36$ (durch Subst. v. VII. in VIII.),

*IX. $y = 4$ (durch Div. mit 9).

Nr. 21.

$$\begin{cases} \text{I.} & (x+5).(y+7) = (x+1)(y-9) + 112 \\ \text{II.} & 2x + 10 = 3y + 1. \end{cases}$$

Auflösung.

$xy + 5y + 7x + 35 = xy - 9x + y - 9 + 112$ (aus I. durch Auflösen der Klammer),

$4y + 16x = 68$ (durch Weglassen der gleich. Gl. u. Vers.),

III. $y + 4x = 17$ (durch Division mit 4),

IV. $3y+12x = 51$ (durch Multiplikation mit 3),

$14x+10 = 52$ (durch Addition von II. und IV. und Weglassen der gleichen Glieder),

$14x = 42$ (durch Versetzung),

*V. $x = 3$ (durch Division mit 14),

VI. $y = 17-4x$ (aus III. durch Versetzung),

$= 17-12$ (durch Subst. von V. in VI.),

*VII. $= 5$.

Nr. 22.

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{6x+9}{4}+\frac{3x+5y}{4x-6} = 3\frac{1}{4}+\frac{3x+4}{2} \\ \text{II.} & \frac{8y+7}{10}+\frac{6x-3y}{2y-8} = 4+\frac{4y-9}{5}. \end{array}\right.$$

Auflösung.

$6x+9+\frac{2(3x+5y)}{2x-3} = 13+6x+8$ (aus I. durch Mult. mit 4),

$\frac{2(3x+5y)}{2x-3} = 12$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$\frac{3x+5y}{2x-3} = 6$ (durch Division mit 2),

$3x+5y = 12x-18$ (durch Mult. mit $2x-3$),

III. $18 = 9x-5y$ (durch Versetzen),

$8y+7+\frac{5(6x-3y)}{y-4} = 40+8y-18$ (aus II. durch Mult. mit 10),

$\frac{15(2x-y)}{y-4} = 15$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$\frac{2x-y}{y-4} = 1$ (durch Division mit 15),

$2x-y = y-4$ (durch Mult. mit $y-4$),

$4 = 2y-2x$ (durch Versetzung),

IV. $y-x = 2$ (durch Division mit 2),

V. $5y-5x = 10$ (durch Multiplikation mit 5),

$18+5x = 9x-10$ (durch Subtr. von V. von III. u. Weglassen der gleichen Glieder),

$28 = 4x$ (durch Versetzung),

*VI. $x = 7$ (durch Division mit 4),

VII. $y = x+2$ (aus IV. durch Versetzung),

$= 7+2$ (durch Subst. von VI. in VII.),

*VIII. $= 9$.

Nr. 23.

$$\begin{cases} \text{I.} & 4x - 34\frac{1}{3} - \frac{4y+13x}{27-6y} = \frac{12x+8}{3} \\ \text{II.} & 3x + \frac{21-4y}{4x-10} = \frac{18x+13}{6} - 2\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Auflösung.

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 12x - 103 - \frac{4y+13x}{9-2y} & = & 12x+8 \text{ (aus I. durch Mult. mit 3),} \\
 & -111 & = & \frac{4y+13x}{9-2y} \text{ (durch Weglassen der gleich. Glieder u. Vers.),} \\
 & 222y - 999 & = & 4y+13x \text{ (durch Mult. mit } 9-2y\text{),} \\
\text{III.} & 218y - 13x & = & 999 \text{ (durch Versetzung),} \\
 & 54x + \frac{9(21-4y)}{2x-5} & = & 54x+39-38 \text{ (aus II. durch Mult. mit 18),} \\
 & \frac{9(21-4y)}{2x-5} & = & 1 \text{ (durch Wegl. der gleich. Glieder),} \\
 & 189 - 36y & = & 2x-5 \text{ (durch Mult. mit } 2x-5\text{),} \\
 & 194 & = & 2x+36y \text{ (durch Versetzung),} \\
\text{IV.} & x+18y & = & 97 \text{ (durch Division mit 2),} \\
\text{V.} & 13x+234y & = & 1261 \text{ (durch Mult. mit 13),} \\
 & 452y & = & 2260 \text{ (durch Add. von III. u. V.),} \\
{}^*\text{VI.} & y & = & 5 \text{ (durch Division mit 452),} \\
\text{VII.} & x & = & 97-18y \text{ (aus IV. durch Vers.),} \\
 & & = & 97-90 \text{ (durch Subst. von VI. in VII.)} \\
{}^*\text{VIII.} & & = & 7.
\end{array}
$$

Nr. 24.

$$\begin{cases} \text{I.} & 16x+6y-1 = \frac{128x^2-18y^2+217}{8x-3y+2} \\ \text{II.} & \frac{10x+10y-35}{2x+2y+3} = 5 - \frac{54}{3x+2y-1}. \end{cases}$$

Auflösung.

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \begin{array}{l} 128x^2+48xy-8x- \\ 48xy-18y^2+3y+ \\ 32x+12y-2 \end{array} & = & 128x^2-18y^2+217 \text{ (aus I. durch Mult. mit } 8x-3y+2\text{),} \\
 & 24x+15y & = & 219 \text{ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),} \\
\text{III.} & 8x+5y & = & 73 \text{ (durch Division mit 3),}
\end{array}
$$

$\frac{10x+10y-35}{2x+2y+3} = \frac{15x+10y-59}{3x+2y-1}$ (aus II. durch Vereinig. der rechten Seite),

$30x^2+30xy-105x+20xy+20y^2-70y-10x-10y+35 = 30x^2+20xy-118x+30xy+20y^2-118y+45x+30y-177$ [durch Mult. mit $(2x+2y+3).(3x+2y-1)$],

$212 = 42x-8y$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

IV. $21x-4y = 106$ (durch Division mit 2),

V. $32x+20y = 292$ (aus III. durch Mult. mit 4),

VI. $105x-20y = 530$ (aus IV. durch Mult. mit 5),

$137x = 822$ (durch Addition von V. und VI.),

*VII. $x = 6$ (durch Division mit 137),

VIII. $5y = 73-8x$ (aus III. durch Versetzung),

$5y = 73-48 = 25$ (durch Subst. von VII. in VIII.),

*IX. $y = 5$ (durch Division mit 5).

Nr. 25.

$$\begin{cases} \text{I. } 4x+3y+\frac{24+\frac{11y}{2}}{2x+1} = \frac{16x^2+12xy-8x+5y+28}{4x-2} \\ \text{II. } 2x+4 = 3y+\frac{8x^2-18y^2+108}{4x+6y+3}. \end{cases}$$

Auflösung.

$16x^2+12xy-8x-6y+\frac{(48+11y)(4x-2)}{4x+2} = 16x^2+12xy-8x+5y+28$ (aus I. durch Mult. mit $4x-2$),

$\frac{(48+11y)(2x-1)}{2x+1} = 11y+28$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$96x+22xy-48-11y = 22xy+56x+11y+28$ (durch Mult. mit $2x+1$),

$40x-22y = 76$ (durch Versetzung),

III. $20x-11y = 38$ (durch Division mit 2),

$8x^2+16x+12xy+24y+6x+12 = 12xy+18y^2+9y+8x^2-18y^2+108$ (aus II. durch Mult. mit $4x+6y+3$),

IV. $22x+15y = 96$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

V. $220x-121y = 418$ (aus III. durch Mult. mit 11),

VI. $220x+150y = 960$ (aus IV. durch Mult. mit 10),

$271y = 542$ (durch Subtr. von V. von IV.),

* VII. $y = 2$ (durch Division mit 271),

VIII. $20x = 38 + 11y$ (aus III. durch Versetzung),

$= 38 + 22 = 60$ (durch Subst. von VII. in VIII),

* IX. $x = 3$ (durch Division mit 20).

Nr. 26. I. $3x + 6y + 1 = \frac{6x^2 + 130 - 24y^2}{2x - 4y + 3}$

II. $3x - \frac{151 - 16x}{4y - 1} = \frac{9xy - 110}{3y - 4}$.

Auflösung.

$6x^2 + 12xy + 2x - 12xy - 4y + 9x + 18y + 3 = 6x^2 + 130 - 24y^2$ (aus I. durch Multipl. mit $2x - 4y + 3$),

III. $11x + 14y = 127$ (durch Wegl. der gleichen Gl. u. Versetzen),

$9xy - 12x - \frac{453y - 48xy - 604 + 64x}{4y - 1} = 9xy - 110$ (aus II. durch Mult. mit $3y - 4$),

$110 - 12x = \frac{453y - 48xy - 604 + 64x}{4y - 1}$ (durch Wegl. der gleichen Glieder u. Versetzen),

$440y - 48xy - 110 + 12x = 453y - 48xy - 604 + 64x$ (durch Mult. mit $4y - 1$),

$494 = 13y + 52x$ (durch Wegl. der gleich. Gl. u. Vers.),

IV. $y + 4x = 38$ (durch Div. mit 13),

V. $14y + 56x = 532$ (durch Mult. mit 14),

$45x = 405$ (durch Subtr. von III. von V.),

* VI. $x = 9$ (durch Division mit 45),

VII. $y = 38 - 4x$ (aus IV. durch Versetzung),

$= 38 - 36$ (durch Substit.

* VIII. $= 2$. von VI. in VII),

Nr. 27.

$$\begin{cases} \text{I.} & \dfrac{x-6}{7y}+\dfrac{4x+7}{24}-\dfrac{x-\frac{y}{7}}{6}=\dfrac{19+y}{42}-\dfrac{\frac{11x}{3}+6}{56y} \\ \text{II.} & (12x-15y+\frac{13}{4}):(10y-8x+\frac{86}{2})=(93-9x):6x-\frac{14}{5}). \end{cases}$$

Auflösung.

$24x-144+28xy+49y-28xy+4y^2 = 76y+4y^2-11x-18$ (aus I. durch Mult. mit $168y$),

III. $35x-27y = 126$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$(12x-15y+\frac{13}{4}):(5y-4x+\frac{43}{2}) = (93-9x):(3x-\frac{7}{5})$ (aus II. durch Div. des 2. u. 4. Gliedes mit 2),

$36x^2-45xy+\frac{39}{4}x-\frac{84}{5}x+21y-\frac{91}{20} = 465y-45xy-372x+36x^2+1338-129x$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

$\frac{9879}{20}x-444y = \frac{26751}{20}$ (durch Wegl. der gleichen Glieder und Versetzen),

$\frac{89}{20}x-4y = \frac{241}{20}$ (durch Division mit 111),

IV. $89x-80y = 241$ (durch Mult. mit 20),

V. $2800x-1160y = 10080$ (aus III. durch Mult. mit 80),

VI. $2403x-1160y = 6507$ (aus IV. durch Mult. mit 27),

$397x = 3573$ (durch Subtr. von VI. von V.),

*VII. $x = 9$ (durch Div. mit 397),

VIII. $27y = 35x-126$ (aus III. durch Versetzung),

$= 315-126 = 189$ (durch Substit. von VII. in VIII.),

*IX. $y = 7$ (durch Div. mit 27).

Nr. 28.

I. $\dfrac{\dfrac{7x}{4}+6y}{5}-\dfrac{\dfrac{3y+6}{5}-\dfrac{3x-2}{10}}{8}=5-\dfrac{x}{16}$

II. $\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{2y}{3}+2\dfrac{1}{2}\right):\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}+\dfrac{1}{6}\right)=10\dfrac{1}{2}:1\dfrac{1}{6}.$

Auflösung.

$28x+96y-6y-12+3x-2 = 400-5x$ (aus I. durch Mult. mit 80),

$36x+90y = 414$ (durch Versetz.),

III. $2x+5y = 23$ (durch Div. mit 18),

$(9x+4y+15):(3x-2y+1) = 63:7$ (aus II. durch Mult. der 4 Glieder mit 6 und durch Div. der beiden letzten

$= 9:1$ mit 7),

$9x+4y+15 = 27x-18y+9$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

IV. $6 = 18x-22y$ (durch Versetzung),

V. $9x-11y = 3$ (durch Div. mit 2),

VI. $18x+45y = 207$ (aus III. durch Mult. mit 9),

$6+45y = 207-22y$ (durch Add. von IV. u. VI. und Weglassen der gleichen Glieder),

$67y = 201$ (durch Versetz.),

* VII. $y = 3$ (durch Div. mit 67),

VIII. $2x = 23-5y$ (aus III. durch Versetzung),

$= 23-15 = 8$ (durch Subst. von VII. in VIII.),

* IX. $x = 4$ (durch Div. mit 2).

Nr. 29.

I. $\dfrac{4x-2y+3}{3}-\dfrac{18-x+5y}{7}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}-\dfrac{1}{7}-7\dfrac{7}{10}$

II. $(2x-y+15):(y-2x+15)=\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{3}{4}\right):\left(\dfrac{y}{4}-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{12}\right).$

Auflösung.

$560x - 280y + 420 - 1080 + 60x - 300y = 105x - 84y - 60 - 3234$ (aus I. durch Mult. mit 420),

III. $2634 = 496y - 515x$ (durch Versetzung),

$30 : (4x - 2y) = \frac{10}{12} : \left(\frac{2x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{2}{3} \right)$ (aus II. nach dem Satze, dass sich die Summe der ersten beiden Glieder zu ihrer Differenz verhalte, wie die Summe der beiden letzten zu ihrer Differenz),

$3 : (2x - y) = 1 : (4x - 3y + 4)$ (durch Div. des 1. u. 3. Gliedes mit 10, durch Mult. der beiden letzten mit 12, u. durch Div. des 2. u. 4. mit 2),

$12x - 9y + 12 = 2x - y$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

$12 = 8y - 10x$ (durch Versetzung),

IV. $6 = 4y - 5x$ (durch Division mit 2),

V. $618 = 412y - 515x$ (durch Mult. mit 103),

$2016 = 84y$ (durch Subtr. von V. von III.),

*VI. $y = 24$ (durch Division mit 84),

VII. $5x = 4y - 6$ (aus IV. durch Vers.),

$= 96 - 6 = 90$ (durch Substit. von VI. in VII.),

*VIII. $x = 18$ (durch Division mit 5).

Nr. 30.

$$\begin{cases} \text{I.} \quad 4 + \dfrac{12y - \frac{6y+2}{x}}{11} = y + \dfrac{\frac{3xy - 31}{11} + 10x + 13}{3x} \\ \text{II.} \quad \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3x - 5}{y + 7} = \dfrac{4xy + \frac{170}{3}}{6y + 27}. \end{cases}$$

Auflösung.

$132x + 36xy - 18y - 6 = 33xy + 3xy - 31 + 110x + 143$ (aus I. durch Mult. mit $33x$),

$22x - 18y = 118$ (durch Versetzung),

III. $11x - 9y = 59$ (durch Division mit 2),

$4xy+18x-\frac{(3x-5)(6y+27)}{y+7} = 4xy+\frac{170}{3}$ (aus II. durch Mult. mit $6y+27$),

$18x-\frac{170}{3} = \frac{(3x-5)(6y+27)}{y+7}$ (durch Wegl. der gleichen Glieder u. Vers.),

$54xy+378x-170y-1190 = 54xy-90y+243x-405$ [durch Mult. mit $3(y+7)$],

$135x-80y = 785$ (durch Wegl. der gleichen Glieder und Versetzen),

IV. $27x-16y = 157$ (durch Division mit 5),

V. $176x-144y = 944$ (aus III. durch Mult. mit 16),

VI. $243x-144y = 1413$ (aus IV. durch Mult. mit 9),

$67x = 469$ (durch Subtr. von V. von IV.),

*VII. $x = 7$ (durch Division mit 67),

VIII. $9y = 11x-59$ (aus III. durch Vers.),

$= 77-59 = 18$ (durch Substit. von VII. in VIII.),

*IX. $y = 2$ (durch Division mit 9).

Nr. 31.

I. $\sqrt{y}-\sqrt{y-x} = \sqrt{20-x}$

II. $\sqrt{y-x}:\sqrt{20-x} = 3:2$.

Auflösung.

III. $2\sqrt{y-x} = 3\sqrt{20-x}$ (aus II. durch Bildung der gleichen Produkte),

IV. $2\sqrt{y}-2\sqrt{y-x} = 2\sqrt{20-x}$ (aus I. durch Mult. mit 2),

V. $2\sqrt{y} = 5\sqrt{20-x}$ (durch Add. von III. u. IV.),

$4y-4x = 180-9x$ (aus III. durch Erheben zum Quadrat),

VI. $4y+5x = 180$ (durch Versetzung),

VII. $4y = 500-25x$ (aus IV. durch Erheben zum Quadrat),

$5x = 25x-320$ (durch Subtr. v. VII. von VI.),

$320 = 20x$ (durch Versetzung),

*VIII. $x = 16$ (durch Division mit 20),

IX. $4y = 180-5x$ (aus VI. durch Versetzung),

$= 180-80 = 100$ (durch Substit. von VIII. in IX.),

*X. $y = 25$ (durch Division mit 4).

Anmerkung. Eine andere Auflösungsart ergiebt sich, wenn man die II. Gleichung mit 3 multiplizirt und den sich dann für $3\sqrt{20-x}$ ergebenden Werth in die III. substituirt. Man erhält hierdurch alsdann eine neue Gleichung:

$$3\sqrt{y} = 5\sqrt{y-x}, \text{ oder}$$
$$9y = 25y - 25x, \text{ oder}$$
$$25x = 16y,$$ welche Gleichung sich nun mit obiger VI. verbinden lässt.

III. Abschnitt.

Reine quadratische Gleichungen, nebst Gleichungen von höheren Graden, welche ohne Ergänzung des Quadrats gelöst werden können.

Nr. 1. $3x^2 - 4 = 28 + x^2$.

Auflösung. $2x^2 = 32$ (durch Versetzung),
$x^2 = 16$ durch Division mit 2),
$x = \pm 4$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

Nr. 2. I. $(x+y) : y = 3 : 1$
II. $xy = 18$.

Auflösung. $x+y = 3y$ (aus I. durch Bildung der gleichen Produkte),
III. $x = 2y$ (durch Versetzung),
$2y^2 = 18$ (durch Substit. von III. in II.),
$y^2 = 9$ (durch Division mit 2),
*IV. $y = \pm 3$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),
*V. $x = \pm 6$ (durch Substit. von IV. in III.),

Nr. 3. I. $(x-y) : y = 4 : 5$
II. $x^2 + 4y^2 = 181$.

Auflösung. $x : y = 9 : 5$ (aus I. nach dem Satze: die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder verhält sich zum ersten oder zweiten Glied, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zum dritten oder vierten Glied),

III. $x = \frac{9y}{5}$ (durch Bildung der gleichen Produkte und Division mit 5),

$\frac{81}{25}y^2 + 4y^2 = \frac{181}{25}y^2 = 181$ (durch Subst. von III. in II.),

$y^2 = 25$ (durch Multiplikation mit $\frac{25}{181}$),

*IV. $y = \pm 5$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

*V. $x = \pm 9$ (durch Substit. von IV. in III.).

Nr. 4. $\begin{cases} \text{I. } (x+y):(x-y) = a:b \\ \text{II. } xy = c^2. \end{cases}$

Auflösung. $2x : 2y = x : y = (a+b):(a-b)$ (aus I. nach dem Satz: die Summe der ersten zwei Glieder verhält sich zu ihrer Differenz wie die Summe der beiden letzten Glieder zu ihrer Differenz, und durch nachherige Division der beiden ersten Glieder mit 2),

III. $x = \frac{a+b}{a-b}y$ (durch Bildung der gleichen Produkte u. Div. mit $a-b$),

$\frac{a+b}{a-b}y^2 = c^2$ (durch Substit. von III. in II.),

$y^2 = \frac{a-b}{a+b}c^2$ (durch Mult. mit $\frac{a-b}{a+b}$),

*IV. $y = \pm c\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

$x = \pm c\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ (durch Substit. von IV. in III.),

*V. $= \pm c\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ (durch Bringen unter die Wurzel u. Vereinfachen des Bruches).

Nr. 5. $\begin{cases} \text{I. } (x^2+y^2):(x^2-y^2) = 17:8 \\ \text{II. } xy^2 = 45. \end{cases}$

Auflösung. $2x^2 : 2y^2 = x^2 : y^2 = 25 : 9$ (aus I. nach dem in Nr. 4 angeführten Satz),

III. $y^2 = \frac{9x^2}{25}$ (durch Bildung der gleichen Prod. u. Div. mit 25),

IV. $y = \pm \frac{3}{5}x$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\frac{9}{25}x^3 = 45$ (durch Substit. von III. in II.),

$x^3 = 125$ (durch Mult. mit $\frac{25}{9}$),

*V. $x = 5$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),

*VI. $y = \pm 3$ (durch Substit. von V. in IV).

Anmerkung. Eine Auflösung anderer Art ist folgende:

$x^2 : y^2 = 25 : 9$

$x : y = \pm 5 : \pm 3$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

VII. $x = \pm \frac{5}{3}y$ (durch Bildung der gleichen Produkte und Division mit 3).

Nun ist entweder:

$\frac{5}{3}y^3 = 45$ oder auch $-\frac{5}{3}y^3 = 45$ (durch Substit. von VII. in II.),

$y^3 = 27$ $\quad$ $y^3 = -27$

$y = 3$ $\quad$ VIII. $\quad$ $y = -3$

$x = +\frac{5}{3}y$ $\quad$ $x = -\frac{5}{3}y$ (durch Substit. von

$= 5$ $\quad$ IX. $\quad$ $= 5$ $\quad$ VIII. in VII.)

Nr. 6. $\begin{cases} \text{I.} & x^2 - xy = 54 \\ \text{II.} & xy - y^2 = 18. \end{cases}$

Auflösung. $x^2 - 2xy + y^2 = 36$ (durch Subtr. von II. von I.),

III. $x - y = \pm 6$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

*IV. $x = \pm 9$ (durch Div. von I. durch III),

*V. $y = \pm 3$ (durch Div. von II. durch III.).

Nr. 7. $\begin{cases} \text{I.} & (x+y) : (x^2 - y^2) = 1 : 4 \\ \text{II.} & xy = 21. \end{cases}$

Auflösung. $1 : (x - y) = 1 : 4$ (aus I. durch Div. der beiden ersten Glieder durch $x+y$),

III. $x - y = 4$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

IV. $x^2 - 2xy + y^2 = 16$ (durch Erheben z. Quadrat),

V. $4xy = 84$ (aus II. durch Mult. mit 4),

$x^2 + 2xy + y^2 = 100$ (durch Add. von IV. u. V.),

VI. $x + y = \pm 10$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

$2x = 14$ oder $= -6$ (durch Addit. von III. und VI.),

*VII. $x = 7$ oder $= -3$ (durch Division mit 2),

$2y = 6$ oder $= -14$ (durch Subtr. von III. von IV.),

*VIII. $y = 3$ oder $= -7$ (durch Division mit 2).

Nr. 8. $\begin{cases} \text{I.} & ax^2 + bxy = c^3 \\ \text{II.} & (x-y) : x = m : n. \end{cases}$

Auflösung. $y : x = (n-m) : n$ (aus II. nach dem in Nr. 3 angeführten Satz),

III. $y = \frac{n-m}{n} x$ (durch Bildung der gleichen Produkte und Div. durch n),

$ax^2 + \frac{n-m}{n} bx^2 = c^3$ (durch Substit. von III. in I.),

$(an + (n-m)b)x^2 = nc^3$ (durch Mult. mit n),

$x^2 = \frac{nc^3}{an+(n-m)b}$ [durch Division mit $an + b(n-m)$],

*IV. $x = \pm c \sqrt{\frac{nc}{an+b(n-m)}}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

*V. $y = \pm \frac{n-m}{n} c \cdot \sqrt{\frac{nc}{an+b(n-m)}}$ (durch Substit. von IV. in III.).

Nr. 9. $\begin{cases} \text{I.} & (x^3+y^3) : (x^3-y^3) = 559 : 127 \\ \text{II.} & x^2y = 294. \end{cases}$

Auflösung. $2x^3 : 2y^3 = 686 : 432$ (aus I. nach dem in Nr. 4 angegebenen Satze),

$x^3 : y^3 = 343 : 216$ (durch Div. mit 2),

$x : y = 7 : 6$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),

III. $y = \frac{6x}{7}$ (durch Bildung der gleichen Prod. u. Div. mit 7),

$\frac{6x^3}{7} = 294$ (durch Substit. von III. in II.),

$x^3 = 343$ (durch Mult. mit $\frac{7}{6}$),

*IV. $x = 7$ (durch Ausziehen der Kub.-Wurzel),

*V. $y = 6$ (durch Subst. von IV. in III.).

Nr. 10. $\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & (x^2 - xy):(xy - y^2) = 3:7 \\ \text{II.} & xy^2 = 147. \end{array}\right.$

Auflösung. $x:y = 3:7$ (aus I. durch Div. der beiden ersten Glieder mit $x - y$),

III. $x = \frac{3}{7}y$ (durch Bildung der gleichen Produkte u. Div. mit 7),

$\frac{3}{7}y^3 = 147$ (durch Substit. von III. in II.),

$y^3 = 343$ (durch Div. mit $\frac{3}{7}$),

*IV. $y = 7$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),

*V. $x = 3$ (durch Substit. von IV. in III.).

Nr. 11. $\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & (\sqrt{x}+\sqrt{y}):(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 4:1 \\ \text{II.} & x - y = 16. \end{array}\right.$

Auflösung. $2\sqrt{x}:2\sqrt{y} = \sqrt{x}:\sqrt{y} = 5:3$ (aus I. nach dem in Nr. IV. angeführten Satz),

$x:y = 25:9$ (durch Erheben zum Quadrat),

III. $y = \frac{9}{25}x$ (durch Bildung der gleichen Produkte u. Div. mit 25),

$x - \frac{9}{25}x = \frac{16x}{25} = 16$ (durch Substit. von III. in II.),

*IV. $x = 25$ (durch Mult. mit $\frac{25}{16}$),

*V. $y = 16$ (durch Substit. von IV. in III. oder in II.).

Anmerkung. Eine andere Lösung ist folgende:

VI. $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 4(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ (aus I. durch Bildung der gleichen Produkte),

VII. $x - y = 4(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ (durch Multipl. mit $\sqrt{x}-\sqrt{y}$),

$4(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = 16$ (durch Substit. von VII. in II.),
$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = 4$ (durch Division mit 4),
VIII. $\sqrt{x}-\sqrt{x} = \pm 2$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),
IX. $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \pm 8$ (durch Substit. von VIII. in VI. oder durch Div. von II. durch VIII.),
X. $\sqrt{x} = \pm 5$ (durch Add. von VIII. und IX. und Division durch 2),
XI. $x = 25$ (durch Erheben z. Quadrat),
$\sqrt{y} = \pm 3$ (durch Subtr. von VIII. von IX. und Division durch 2, oder durch Substit. von X. in VIII. oder in IX.),
XII. $y = 9$ (durch Erheben zum Quadrat oder durch Substit. v. XI. in II.).

Nr. 12. I. $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y} = 3$
II. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y} = 7.$

Auflösung. $2\sqrt[4]{x} = 10$ (durch Addition von I. und II.),
III. $\sqrt[4]{x} = 5$ (durch Division durch 2),
*IV. $x = 625$ (durch Erheben in die 4te Potenz),
$\sqrt[4]{y} = 2$ (durch Subtr. von I. von II. und Div. durch 2 oder auch durch Substit. von III. in I. oder in II.),
*V. $y = 16$ (durch Erheben in die 4te Potenz).

Nr. 13. I. $(x-y):(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 8:1$
II. $\sqrt{xy} = 15.$

Auflösung. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}):1 = 8:1$ (aus I. durch Div. der beiden ersten Glieder mit $\sqrt{x}-\sqrt{y}$),
III. $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 8$ (durch Bildung der gleichen Produkte),
IV. $x+2\sqrt{xy}+y = 64$ (durch Erh. zum Quadr.),
V. $4\sqrt{xy} = 60$ (aus II. durch Mult. mit 4),
$x-2\sqrt{xy}+y = 4$ (durch Subtr. v. V. von IV.),
VI. $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \pm 2$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

VII. $\sqrt{x} = 5$ oder $= 3$ (durch Add. von III. u. VI. und Div. durch 2),

*VIII. $x = 25$ oder $= 9$ (durch Erheben zum Quadrat),

$\sqrt{y} = 3$ oder $= 5$ (durch Subtr. von VI. von III. und Div. durch 2 oder auch durch Substit. von VII. in II. oder in VI.),

*IX. $y = 9$ oder $= 25$ (durch Erheben zum Quadrat).

Nr. 14. I. $(x^3 - y^3) : (x^2y - xy^2) = 7 : 2$
II. $x + y = 6.$

Auflösung. $(x^2 + xy + y^2) : xy = 7 : 2$ (aus I. durch Div. der beiden [illegible]en Glieder mit $x - y$),

III. $(x^2 + 2xy + y^2) : xy = 9 : 2$ (nach dem in Nr. 3 angeführten Satz),

IV. $x^2 + 2xy + y^2 = 36$ (aus II. durch Erheben zum Quadrat),

$36 : xy = 9 : 2$ (durch Substit. von IV. in III.),

V. $xy = 8$ (durch Bildung der gleichen Produkte und Division mit 9),

VI. $4xy = 32$ (durch Mult. mit 4),

$x^2 - 2xy + y^2 = 4$ (durch Subtr. von VI. von IV.),

VII. $x - y = \pm 2$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

*VIII. $x = 4$ oder $= 2$ (durch Add. von II. und VII. und Division mit 2),

*IX. $y = 2$ oder $= 4$ (durch Subtr. von VII. von II. u. Div. mit 2 oder durch Substitution von VIII. in II. oder in V. oder in II.).

Anmerkung. Eine andere Auflösungsart ergiebt sich aus

$(x^2+xy+y^2):xy = 7:2$ auf folgende Weise:

X. $2x^2+2xy+2y^2 = 7xy$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

XI. $2x^2+4xy+2y^2 = 72$ (aus IV. durch Mult. mit 2),

$2xy = 72-7xy$ (durch Subtr. von X. von XI.),

$9xy = 72$ (durch Versetzung),

XII. $xy = 8$ (durch Division mit 9),

wonach das Weitere wie oben folgt.

Eine andere Auflösungsart ergiebt sich aus der Gleichung III.

$(x^2+2xy+y^2):xy = 9:2$

auf folgende Weise:

$(x^2+2xy+y^2):4xy = 9:8$ (durch Mult. des 2. u. 4. Gliedes mit 4),

XIII. $(x^2+2xy+y^2):(x^2-2xy+y^2 = 9:1$ (nach dem in Nr. 3 angeführten Satz),

$(x+y):(x-y) = \pm 3:\pm 1$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$2x:2y = \pm 4:\pm 2$ od. $= \pm 2:\pm 4$ (nach dem in Nr. 4 angeführten Satz),

$x:y = 2:1$ oder $=1:2$ (durch Division mit 2),

XIV. $x = 2y$ oder $= \frac{y}{2}$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

$3y$ oder $\frac{3y}{2} = 6$ (durch Substit. von XIV. in II.),

XV. $y = 2$ oder $= 4$ (durch Div. mit 3 oder mit $\frac{3}{2}$),

XVI. $x = 4$ oder $= 2$ (durch Substit. von XV. in XIV.).

Die Gleichung XIII. kann auch auf folgende Weise entwickelt werden:

$(x^3+y^3):(3x^2y+3xy^2) = 7:6$ (aus I. durch Mult. des 2. und 4. Gliedes mit 3),

$(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3):(3x^2y-3xy^2) = 1:6$ (nach dem in Nr. 3 angeführten Satz),

$(x^2-2xy+y^2):4xy = 1:8$ (durch Div. der beiden ersten Glieder mit $x-y$, und des 2. u. 4. mit $\frac{1}{2}$),

$(x^2-2xy+y^2):(x^2+2xy+y^2) = 1:9$ (nach dem in Nr. 3 angeführten Satz).

Nr. 15.

I. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

II. $\frac{2}{xy} = \frac{1}{9}$.

Auflösung.

III. $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$ (aus I. durch Erheben zum Quadr.),

IV. $\frac{4}{xy} = \frac{2}{9}$ (aus II. durch Mult. mit 2),

$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}-\frac{2}{9} = \frac{1}{36}$ (durch Subtr. von IV. von III.),

V. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \pm\frac{1}{6}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

VI. $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ oder $= \frac{1}{6}$ (durch Add. von I. und V. und Div. durch 2),

*VII. $x = 3$ oder $= 6$ (weil die reciproken Werthe gleicher Grössen auch gleich sind),

$\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ oder $= \frac{1}{3}$ (durch Subtr. von V. von I. und Div. durch 2 oder durch Substit. von VI. in I. oder in II. oder in V.),

*VIII. $y = 6$ oder $= 3$ (weil die reciproken Werthe gleicher Grössen auch gleich sind).

Nr. 16.

I. $x^4-y^4 = 369$

II. $x^2-y^2 = 9$.

Auflösung.

III. $x^2+y^2 = 41$ (durch Division von I. durch II.),

IV. $x^2 = 25$ (durch Add. von II. und III. u. Div. durch 2),

*V. $x = \pm 5$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

VI. $y^2 = 16$ (durch Subtr. von II. von III. und Div. durch 2, oder durch Substit. von IV. in II. oder in III.),

*VII. $y = \pm 4$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel).

Nr. 17.

$$\left\{\begin{array}{lr} \text{I.} & x^3 - y^3 = 56 \\ \text{II.} & x - y = \frac{16}{xy}. \end{array}\right.$$

Auflösung.

III. $3x^2y - 3xy^2 = 48$ (aus II. durch Mult. mit $3xy$),

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 8$ (durch Subtr. von III. von I.),

IV. $x - y = 2$ (durch Ausziehen der Kubikwurzel),

V. $x^2 - 2xy + y^2 = 4$ (durch Erheben zum Quadrat),

$2 = \frac{16}{xy}$ (durch Substit. von IV. in II.),

VI. $4xy = 32$ (durch Multiplikation mit $2xy$),

$x^2 + 2xy + y^2 = 36$ (durch Addition von V. und VI.),

VII. $x + y = \pm 6$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

*VIII. $x = 4$ oder $= -2$ (durch Add. von IV. und VII. und Div. durch 2),

*IX. $y = 2$ oder $= -4$ (durch Subtr. von IV. von VII. und Div. durch 2 oder durch Substit. von VIII. in IV. oder in VI. oder in VII.).

Anmerkung. Eine andere Lösung ist folgende:

$x^2 + xy + y^2 = \frac{7}{2}xy$ (durch Division von I durch II.),

$x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$ (durch Versetzung),

X. $2x^2 + 2y^2 = 5xy$ (durch Multiplikation mit 2),

XI. $x^2 - 2xy + y^2 = \frac{256}{x^2y^2}$ (aus II. durch Erheben zum Quadrat),

XII. $2x^2 - 4xy + 2y^2 = \frac{512}{x^2y^2}$ (durch Multiplikation mit 2),

$4xy = 5xy - \frac{512}{x^2y^2}$ (durch Subtr. von XII. von X.),

$\frac{512}{x^2y^2} = xy$ (durch Versetzung),

$512 = x^3y^3$ (durch Multiplikation mit x^2y^2),

XIII. $8 = xy$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),

XIV. $2x^2+2y^2 = 40$ (durch Substit. von XIII. in X.),
XV. $x^2-2xy+y^2 = 4$ (durch Substit. von XIII. in XI.),
$x^2+2xy+y^2 = 36$ (durch Subtr. von XV. von XIV.),
XVI. $x+y = \pm 6$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),
XVII. $x-y = 2$ (durch Substit. von XIII. in II.),
woraus sich das Weitere von selbst ergiebt.

Nr. 18.

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}.$$

Auflösung.

$1+\sqrt{1-x^2}-1+\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}$ (durch Multiplikation mit $(1-\sqrt{1-x^2}) . (1+\sqrt{1-x^2}) = x^2$),
$2\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}$
$4-4x^2 = 3$ (durch Erheben zum Quadr.),
$1 = 4x^2$ (durch Versetzung),
$\pm 1 = 2x$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),
$\pm \frac{1}{2} = x$ (durch Division mit 2).

Nr. 19.

I. $x^2y+y^2 = 116$
II. $xy^{\frac{1}{2}}+y = 14$.

Auflösung.

III. $2x^2y+2y^2 = 232$ (aus I. durch Multiplikation mit 2),
IV. $x^2y+2xy^{\frac{3}{2}}+y^2 = 196$ (aus II. durch Erheben z. Quadrat),
$x^2y-2xy^{\frac{3}{2}}+y^2 = 36$ (durch Subtr. von IV. von III.),
V. $xy^{\frac{1}{2}}-y = \pm 6$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),
VI. $xy^{\frac{1}{2}} = 10$ oder $= 4$ (durch Add. von II. und V. und Division durch 2),
*VII. $y = 4$ oder $= 10$ (durch Subtr. von V. von II. und Div. durch 2 oder Substit. von VI. in II. oder in V.),
VIII. $y^{\frac{1}{2}} = \pm 2$ oder $= \pm\sqrt{10}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),
*IX. $x = \pm 5$ oder $= \pm\frac{4}{\sqrt{10}}$ (durch Div. von VII. durch VIII.).

Anmerkung. Will man die für die Unbekannten gefundenen Werthe in den Hauptgleichungen einsetzen, so übersehe man nicht, in der zweiten für die von einander abhängigen Unbekannten x und $y^{\frac{1}{2}}$ die correspondirenden, mit gleichen Zeichen versehenen Werthe einzusetzen.

Nr. 20.

I. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = 6$
II. $x+y = 72.$

Auflösung.

III. $x+3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2}+y = 216$ (aus I. durch Erheben zum Kubus),

IV. $3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2} = 144$ (durch Subtr. von II. von III.),

$3\sqrt[3]{xy} = 24$ (durch Div. von IV. durch I.),

$\sqrt[3]{xy} = 8$ (durch Division mit 3),

V. $xy = 512$ (durch Erheben in den Kubus),

VI. $4xy = 2048$ (durch Multiplikation mit 4),

VII. $x^2+2xy+y^2 = 5184$ (aus II. durch Erheben zum Quadrat),

$x^2-2xy+y^2 = 3136$ (durch Subtr. v. VI von VII.),

VIII. $x-y = \pm 56$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

*IX. $x = 64$ oder $= 8$ (durch Add. von II. und VIII. und Div. durch 2),

*X. $y = 8$ oder $= 64$ (durch Subtr. von VIII. von II. und Div. durch 2 oder durch Substit. von IX. in II. oder in V. oder in VIII.).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist die folgende:

XI. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2} = 12$ (durch Division von II. durch I.),

XII. $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2} = 36$ (aus I. durch Erheben zum Quadr.),

$3\sqrt[3]{xy} = 24$ (durch Subtr. von XI. von XII.),

XIII. $\sqrt[3]{xy} = 8$ (durch Division mit 3),

XIV. $4\sqrt[3]{xy} = 32$ (durch Multiplikation mit 4),

$\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2} = 4$ (durch Subtr. von XIII. von XI. oder von XIV. von XII.),

XV. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y} = \pm 2$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

XVI. $\sqrt[3]{x} = 4$ oder $= 2$ (durch Add. von XV. u. I. und Division durch 2),

XVII. $x = 64$ oder $= 8$ (durch Erheben zum Kubus),

$\sqrt[3]{y} = 2$ oder $= 4$ (durch Subtr. von XV. I. und Division durch 2 oder durch Substit. von XVI. in I. oder in XIII. oder in XV.),

$y = 8$ oder $= 64$ (durch Erheben zum Kubus oder durch Substit. von XVII. in II.).

Nr. 21.

$$\begin{cases} \text{I.} & 4x^2 + \frac{5}{2} = \frac{x^2}{y} + 10y \\ \text{II.} & x^2 + 3y = 55. \end{cases}$$

Auflösung. Entweder:

$4x^2 - \frac{x^2}{y} = 10y - \frac{5}{2}$ (aus I. durch Versetzung),

$\frac{x^2}{y}(4y - 1) = \frac{5}{2}(4y - 1)$ (durch Ausheben gemeinschaftlicher Faktoren),

$\frac{x^2}{y} = \frac{5}{2}$ (durch Division mit $4y - 1$),

III. $x^2 = \frac{5}{2}y$ (durch Multiplikation mit y),

$\frac{5}{2}y + 3y = 55$ (durch Substit. von III. in II.),

$\frac{11y}{2} = 55$

*IV. $y = 10$ (durch Multiplikation mit $\frac{2}{11}$),

$x^2 = 25$ (durch Substitution von IV. in III.),

*V. $x = \pm 5$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

Oder:

$4x^2 - 10y = \frac{x^2}{y} - \frac{5}{2}$ (aus I. durch Vesetzung),

$4y\left(\frac{x^2}{y} - \frac{5}{2}\right) = \frac{x^2}{y} - \frac{5}{2}$ (durch Ausheben des gemeinschaftlichen Faktors),

$4y = 1$ (durch Division mit $\frac{x^2}{y} - \frac{5}{2}$),

*VI. $y = \frac{1}{4}$ (durch Division mit 4),

$x^2 + \frac{3}{4} = 55$ (durch Substit. von VI. in II.),

$x^2 = \frac{217}{4}$ (durch Versetzung),

*VII. $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{217}$ (durch Ausziehen der Quadr.-Wurzel).

Nr. 22. $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} = ax.$

Auflösung.

$x - \sqrt{2-x^2} + x + \sqrt{2-x^2} = 2x = 2ax(x^2-1)$ [durch Mult. m. $(x+\sqrt{2-x^2})(x-\sqrt{2-x^2}) = 2(x^2-1)$],

$\frac{1}{a} = x^2 - 1$ (durch Div. mit $2ax$),

$1 + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a} = x^2$ (durch Versetzung),

$x = \pm\sqrt{\frac{a+1}{a}}$ (durch Ausziehen der Quadr.-Wurzel).

Nr. 23. $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}-x} = b.$

Auflösung. $x = b\sqrt{a^2+x^2} - bx$ (d. Mult. mit $\sqrt{a^2+x^2}-x$),

$bx + x = b\sqrt{a^2+x^2}$ (durch Versetzung),

$b^2x^2 + 2bx^2 + x^2 = a^2b^2 + b^2x^2$ (durch Erheben zum Quadr.),

$x^2 = \frac{a^2b^2}{2b+1}$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Div. durch $2b+1$),

$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{2b+1}}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel).

Anmerkung. Der Werth $x = -\frac{ab}{\sqrt{2b+1}}$ entspricht der Gleichung $\frac{x}{-\sqrt{a^2+x^2}-x} = b$, oder vielmehr, man muss bei dessen Einsetzung in die Hauptgleichung berücksichtigen, dass $\sqrt{a^2+x^2}$ sowohl positiv als negativ sein kann.

Nr. 24.

I. $\frac{1}{2}\sqrt{4y-x} + \frac{1}{2}\sqrt{y-x} = \sqrt{2y-x}$

II. $\frac{3}{4}(\sqrt{x^2-6y} + \sqrt{y^2-9x}) : \sqrt{x^2-6y} = 1\frac{3}{4} : 1.$

Auflösung. $\sqrt{4y-x} + \sqrt{y-x} = 2\sqrt{2y-x}$ (aus I. durch Mult. mit 2),

$4y - x + 2\sqrt{4y^2-5xy+x^2} + y - x = 8y - 4x$ (durch Erheben ins Quadrat),

$2\sqrt{4y^2-5xy+x^2} = 3y - 2x$ (d. Vers.),

$16y^2 - 20xy + 4x^2 = 9y^2 - 12xy + 4x^2$ (durch Erheben ins Quadrat),

$7y^2 = 8xy$ (durch Wegl. der gleichen Gl. u. Vers.),

III. $y = \frac{8x}{7}$ (durch Division mit $7y$),

$\frac{3}{4}\sqrt{x^2-6y}+\sqrt{y^2-9x} = \frac{7}{4}\sqrt{x^2-6y}$ (aus II. durch Bildung der gleichen Produkte),

$\sqrt{y^2-9x} = \sqrt{x^2-6y}$ (durch Versetzung),

$y^2-9x = x^2-6y$ (durch Erheben z. Quadrat),

IV. $y^2-x^2 = 9x-6y$ (durch Versetzung),

$\frac{64}{49}x^2-x^2 = 9x-\frac{48x}{7}$ (durch Substit. von III. in IV.),

$\frac{15}{49}x^2 = \frac{15x}{7}$

*V. $x = 7$ (durch Mult. mit $\frac{49}{15x}$),

*VI. $y = 8$ (durch Substit. von V. in III.).

Nr. 25.

$$\begin{cases} \text{I.} & \frac{9}{8}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+y}}{y}+\frac{9}{8}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+y}}{x} = 1\frac{1}{7} \\ \text{II.} & \frac{7}{4}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-y}}{y}-\frac{7}{4}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-y}}{x} = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Auflösung. $(x+y)\sqrt[3]{x+y} = \frac{64}{63}xy$ (aus I. durch Mult. mit $\frac{8xy}{9}$),

III. $\sqrt[3]{(x+y)^4} = \frac{64}{63}xy$ (durch Bringen unter das Wurzel-Zeichen),

$(x-y)\sqrt[3]{x-y} = \frac{4}{63}xy$ (aus II. durch Mult. mit $\frac{4xy}{7}$),

IV. $\sqrt[3]{(x-y)^4} = \frac{4}{63}xy$ (durch Bringen unter das Wurzel-Zeichen),

$\sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^4} = 16$ (durch Div. von III. durch IV.),

$\sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} = \pm 4$ (durch Ausziehen der Quadr.-Wurzel),

$\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}} = \pm 2$ oder $= \pm 2\sqrt{-1}$ (durch abermaliges Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

$\frac{x+y}{x-y} = \pm 8$ oder $= \mp 8\sqrt{-1}$ (durch Erheben zum Kubus),

$$\frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} = \frac{9}{7} \text{ oder } = \frac{7}{9} \text{ oder } = \frac{8\sqrt{-1}-1}{8\sqrt{-1}+1}$$

$$\text{oder } = \frac{8\sqrt{-1}+1}{8\sqrt{-1}-1}$$ (weil wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, auch $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$),

V. $$x = \frac{9}{7}y \text{ od. } = \frac{7}{9}y \text{ od. } = \frac{8\sqrt{-1}-1}{8\sqrt{-1}+1}y$$

$$\text{oder } = \frac{8\sqrt{-1}+1}{8\sqrt{-1}-1}y$$ (durch Multiplikation mit y),

Entweder:

$$(\tfrac{9}{7}y+y)\sqrt[3]{\tfrac{9}{7}y+y} = \tfrac{64}{63}\cdot\tfrac{9}{7}y^2 \quad \text{oder} \quad (\tfrac{7}{9}y+y)\sqrt[3]{\tfrac{7}{9}y+y} = \tfrac{64}{63}\cdot\tfrac{7}{9}y^2$$

(durch Substitution von V. in III.),

$$\tfrac{16}{7}y\sqrt[3]{\tfrac{16}{7}y} = \tfrac{64}{49}y^2 \qquad \tfrac{16}{9}y\sqrt[3]{\tfrac{16}{9}y} = \tfrac{64}{81}y^2$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{16}{7}y} = \tfrac{4}{7}y \qquad \sqrt[3]{\tfrac{16}{9}y} = \tfrac{4}{9}y$$

(durch Multiplikation mit $\frac{7}{16y}$ oder mit $\frac{9}{16y}$),

$$\tfrac{16}{7}y = \tfrac{64}{343}y^3 \qquad \tfrac{16}{9}y = \tfrac{64}{729}y^3$$

(durch Erheben zum Kubus),

$$\tfrac{49}{4} = y^2 \qquad \tfrac{81}{4} = y^2$$

(durch Multiplikation mit $\frac{343}{64y}$ oder mit $\frac{729}{64y}$),

* VI. $$y = \pm\tfrac{7}{2} \qquad y = \pm\tfrac{9}{2}$$

(durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

* VII. $$x = \pm\tfrac{9}{2} \qquad x = \pm\tfrac{7}{2}$$

(durch Substitution von VI. in V.).

Oder:

$$\left(\frac{8\sqrt{-1}-1}{8\sqrt{-1}+1}y-y\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{-1}-1}{8\sqrt{-1}+1}y-y} = \tfrac{4}{63}y^2\cdot\frac{8\sqrt{-1}-1}{8\sqrt{-1}+1} \text{ oder}$$

$$\left(\frac{8\sqrt{-1}+1}{8\sqrt{-1}-1}y-y\right)\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{-1}+1}{8\sqrt{-1}-1}y-y} = \tfrac{4}{63}y^2\cdot\frac{8\sqrt{-1}+1}{8\sqrt{-1}-1}$$

(durch Substitution von V. in IV.),

$$-2\sqrt[3]{\frac{-2y}{8\sqrt{-1}+1}} = \frac{4y}{63}(8\sqrt{-1}-1) \text{ oder}$$

$$2\sqrt[3]{\frac{2y}{8\sqrt{-1}-1}} = \frac{4y}{63}(8\sqrt{-1}+1)$$

(durch Mult. mit $\frac{8\sqrt{-1}+1}{y}$ oder mit $\frac{8\sqrt{-1}-1}{y}$ und Vereinfachen),

$$\frac{16y}{8\sqrt{-1}+1} = \frac{64y^3}{63^3}(8\sqrt{-1}-1)^3 \text{ od. } \frac{16y}{8\sqrt{-1}-1} = \frac{64y^3}{63^3}(8\sqrt{-1}+1)^3$$

(durch Erheben zum Kubus),

$$\frac{63^3}{4(8\sqrt{-1}+1)(8\sqrt{-1}-1)^3} = y^2 \text{ od. } \frac{63^3}{4(8\sqrt{-1}-1)(8\sqrt{-1}+1)^3} = y^2$$

(durch Division mit $\frac{64}{63^3}y(8\sqrt{-1}-1)^3$ oder mit $\frac{64}{63^3}y(8\sqrt{-1}+1)^3$)

$$y = \pm\frac{63}{2(8\sqrt{-1}-1)}\sqrt{\frac{63}{(8\sqrt{-1}+1)(8\sqrt{-1}-1)}} \text{ oder}$$

$$y = \pm\frac{63}{2(8\sqrt{-1}+1)}\sqrt{\frac{63}{(8\sqrt{-1}-1)(8\sqrt{-1}+1)}}$$

(durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

$$= \frac{\pm 63\sqrt{-\frac{63}{65}}}{2(8\sqrt{-1}-1)} \quad \text{oder} \quad y = \frac{\pm 63\sqrt{-\frac{63}{65}}}{2(8\sqrt{-1}+1)}$$

(durch Vereinfachen des Radicanden),

$$\text{*VIII.} = \mp\frac{63}{2.65}(8\sqrt{-1}+1).\sqrt{-\tfrac{63}{65}} \text{ oder}$$

$$= \mp\frac{63}{2.65}(8\sqrt{-1}-1)\sqrt{-\tfrac{63}{65}}$$

(durch Mult. von Zähler und Nenner mit $8\sqrt{-1}+1$ oder mit $8\sqrt{-1}-1$),

$$\text{*IX. } x = \mp\frac{63}{2.65}(8\sqrt{-1}-1)\sqrt{-\tfrac{63}{65}} \text{ oder}$$

$$x = \mp\frac{63}{2.65}(8\sqrt{-1}+1)\sqrt{-\tfrac{63}{65}}$$

(durch Substit. von VIII. in V.).

Anmerkung. Eine andere Lösung ist die folgende:

$$(x+y)^4 = \frac{64^3}{63^3}x^3y^3$$ (aus III. durch Erheben in den Kubus),

$$\text{X. } x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = \frac{4^9}{63^3}x^3y^3$$ (durch Auflösung der Klammer),

$$(x-y)^4 = \frac{4^3}{63^3}y^3y^3$$ (aus IV. durch Erheben in den Kubus)

XI. $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = \frac{4^3}{63^3}x^3y^3$ (durch Auflösen der Klammern),

$2x^4 + 12x^2y^2 + 2y^4 = \frac{4^3x^3y^3}{63^3}(4^6+1)$ (durch Add. von X. und XI.),

XII. $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = \frac{32 . x^3y^3}{63^3} . 4097$ (durch Div. mit 2),

$8x^3y + 8xy^3 = \frac{4^3 . x^3y^3}{63^3}(4^6-1)$ (durch Subtr. von XI. von X.),

XIII. $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{8}{63^3} . 4095$ (durch Div. mit $8x^3y^3$),

$= \frac{8 . 65}{63^2} = \frac{520}{63^2}$

$(x^2 - y^2)^4 = \frac{4^{12}}{36^6} . x^6 . y^6$ (durch Mult. von III. und IV. und Erheben in den Kubus),

$(x^2 - y^2)^2 = \pm\frac{4^6}{63^3}x^3y^3$ (durch Ausziehen der Quadr.-Wurzel),

XIV. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = \pm\frac{4^6}{63^3}x^3y^3$ (durch Auflösen der Klammern),

$8x^2y^2 = \frac{32 . x^3y^3}{63^3} . (4097 \mp 128)$

(durch Subtr. v. XIV. v. XII.),

$\frac{2}{xy} = \frac{8 . 3969}{63^3}$ oder $= \frac{8 . 4225}{63^3}$

(durch Div. mit $4 . x^3y^3$),

XV. $= \frac{8}{63}$ oder $= \frac{8 . 65^2}{63^3}$

$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2} = \frac{1024}{63^2}$ oder $= \frac{8 . 65}{63^2}(1 + \frac{63}{65})$

$= \frac{1024 . 65}{63^3}$

(durch Add. von XIII. u. XV.),

XVI. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \pm\frac{32}{63}$ oder $= \pm\frac{32}{63}\sqrt{\frac{65}{63}}$

(durch Anziehen der Quadrat-Wurzel),

$$\frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2} = \frac{16}{63^2} \text{ oder } = \frac{8.65}{63^2}\left(1 - \tfrac{65}{63}\right) = -\frac{16.65}{63^3}$$

(durch Subtr. von XV. von XIII.),

XVII. $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \pm \frac{4}{63}$ oder $= \pm \frac{4}{63}\sqrt{-\frac{65}{63}}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

$\frac{2}{y} = \pm \frac{36}{63}$ od. $= \pm \frac{28}{63}$ od. $= \pm \frac{4}{63}\sqrt{\frac{65}{63}}\,(8+\sqrt{-1})$

oder $= \pm \frac{4}{63}\sqrt{\frac{65}{63}}\,(8-\sqrt{-1})$

$\frac{1}{y} = \pm \frac{2}{7}$ oder $= \pm \frac{2}{9}$ oder $= \pm \frac{2}{63}\sqrt{\frac{65}{63}}\,(8+\sqrt{-1})$

oder $= \pm \frac{2}{63} . \sqrt{\frac{65}{63}}\,(8-\sqrt{-1})$

XVIII. $y = \pm \frac{7}{2}$ oder $= \pm \frac{9}{2}$ oder $= \pm \frac{63}{2(8+\sqrt{-1})} . \sqrt{\frac{63}{65}}$

oder $= \pm \frac{63}{2(8-\sqrt{-1})} . \sqrt{\frac{63}{65}}$

$\frac{1}{x} = \pm \frac{2}{9}$ oder $= \pm \frac{2}{7}$ oder $= \pm \frac{2}{63}(8-\sqrt{-1}) . \sqrt{\frac{65}{63}}$

oder $= \pm \frac{2}{63}(8+\sqrt{-1}) . \sqrt{\frac{65}{63}}$

XIX. $x = \pm \frac{9}{2}$ oder $= \pm \frac{7}{2}$ oder $= \pm \frac{63}{2(8-\sqrt{-1})} . \sqrt{\frac{63}{65}}$

oder $= \pm \frac{63}{2(8+\sqrt{-1})} . \sqrt{\frac{63}{65}}$.

Die Gleichheit der Werthe VIII. und XVIII. sowie IX. und XIX. unter sich und mit den weiter vereinfachten

$$y = \pm \tfrac{63}{65}\sqrt{\tfrac{63}{65}} . \frac{8-\sqrt{-1}}{2} \text{ oder } = \pm \tfrac{63}{65}\sqrt{\tfrac{63}{65}} . \frac{8+\sqrt{-1}}{2} \text{ und}$$

$$x = \pm \tfrac{63}{65}\sqrt{\tfrac{63}{65}} . \frac{8+\sqrt{-1}}{2} \text{ oder } = \pm \tfrac{63}{65}\sqrt{\tfrac{63}{65}} . \frac{8-\sqrt{-1}}{2}$$

lässt sich leicht nachweisen, was dem Schüler überlassen bleibt.

Nr. 26.

I. $x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{2}{5}} = 20$

II. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{5}} = 6.$

Auflösung.

III. $2x^{\frac{4}{3}} + 2y^{\frac{2}{5}} = 40$ (aus I. durch Mult. mit 2),

IV. $x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} . y^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = 36$ (aus I. durch Erheben zum Quadr.),

$x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} . y^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = 4$ (durch Subtr. von IV. von III.),

V. $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{5}} = \pm 2$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

VI. $x^{\frac{2}{3}} = 4$ oder $= 2$ (durch Add. von II. und V. und Division mit 2),

$x^2 = 64$ oder $= 8$ (durch Erheben in den Kubus),

*VII. $x = \pm 8$ oder $= \pm 2\sqrt{2}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

$y^{\frac{1}{5}} = 2$ oder $= 4$ (durch Subtr. von V. von II. und Div. durch 2 oder durch Substit. von VI. in II. oder in V.),

*VIII. $y = 32$ oder $= 1024$ (durch Erheben in die 5te Potenz).

Nr. 27.

$$\begin{cases} \text{I.} & x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 1296 - 4xy(x^2 + xy + y^2) \\ \text{II.} & x - y = 4. \end{cases}$$

Auflösung.

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 4xy(x^2 + xy + y^2) = 1296$ (aus I. durch Vers.),

$(x^2 + y^2)^2 + 4xy(x^2 + y^2) + 4x^2y^2 = 1296$ (durch Versetzung),

$x^2 + y^2 + 2xy = \pm 36$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

III. $x + y = \pm 6$ oder $= \pm 6\sqrt{-1}$ (durch abermaliges Ausziehen der Quadr.-Wurzel),

*IV. $x = 5$ od. $= -1$ od. $= 2 \pm 3\sqrt{-1}$ (durch Add. von II. und III. und Div. durch 2),

*V. $y = 1$ od. $= -5$ od. $= -2 \pm 3\sqrt{-1}$ (durch Subtr. von II. von III. und Div. durch 2 oder durch Substit. von IV. in II. oder in III.).

Nr. 28. $(a^{4b} + 1).(x^{\frac{1}{2}} - 1)^2 = 2(x + 1)$.

Auflösung.

$a^{4b}(x^{\frac{1}{2}} - 1)^2 + x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1 = 2x + 2$ (durch Auflös. der Klamm.),

$a^{4b}(x^{\frac{1}{2}} - 1)^2 = x + 2x^{\frac{1}{2}} + 1$ (durch Versetzung),

$a^{2b}(x^{\frac{1}{2}} - 1) = \pm(x^{\frac{1}{2}} + 1)$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

$(a^{2b} \mp 1)x^{\frac{1}{2}} = a^{2b} \pm 1$ (durch Versetzung),

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{2b} \pm 1}{a^{2b} \mp 1} \text{ (durch Division mit } a^{2b} \mp 1\text{)},$$

$$x = \left(\frac{a^{2b} \pm 1}{a^{2b} \mp 1}\right)^2 \text{ (durch Erheben zum Quadrat).}$$

Nr. 29. $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-x}} = a.$

Auflösung.

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-x} = a\sqrt{a} + a\sqrt{a-x} \text{ (d. Mult. mit } \sqrt{a} + \sqrt{a-x}\text{)},$$

$$(1-a)\sqrt{a} = (1+a)\sqrt{a-x} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\frac{1-a}{1+a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a-x} \text{ (durch Div. mit } 1+a\text{)},$$

$$\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 . a = a - x \text{ (durch Erheben zum Quadrat)},$$

$$x = a\left(1 - \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right) \text{ (durch Versetzung)},$$

$$= \frac{4a^2}{1+2a+a^2} \text{ (durch Aufl. der Klammern)},$$

$$= \left(\frac{2a}{1+a}\right)^2.$$

Nr. 30.

$$\begin{cases} \text{I.} & \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-y}} = 4 \\ \text{II.} & \sqrt{x} : \sqrt{y} = \sqrt{y} : 4. \end{cases}$$

Auflösung.

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-y} = 4\sqrt{x} - 4\sqrt{x-y} \text{ (aus I. durch Mult. mit } \sqrt{x} - \sqrt{x-y}\text{)},$$

$$5\sqrt{x-y} = 3\sqrt{x} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$25x - 25y = 9x \text{ (durch Erheben ins Quadrat)},$$

III. $\quad 16x = 25y$ (durch Versetzung),

IV. $\quad x = \frac{25}{16}y$ (durch Division mit 16),

$\quad 4\sqrt{x} = y$ (aus II. durch Bild. der gleichen Prod.),

V. $\quad 16x = y^2$ (durch Erheben zum Quadrat),

$\quad y^2 = 25y$ (durch Substit. von V. in III.),

*VI. $\quad y = 25$ (durch Division mit y),

*VII. $\quad x = \frac{625}{16}$ (durch Substit. von VI. in IV.).

Nr. 31. $$\begin{cases} \text{I.} & \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{4} \\ \text{II.} & x^2y - xy^2 = 16. \end{cases}$$

Auflösung.

III. $x^2-2xy+y^2 = 4$ (durch Multiplikation von I. mit II.),

IV. $x-y = \pm 2$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x^2y^2 = 64$ (durch Division von II. durch I.),

$xy = \pm 8$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

V. $4xy = \pm 32$ (durch Multiplikation mit 4),

$x^2+2xy+y^2 = 36$ oder $= -28$ (d. Add. von V. u. III.),

VI. $x+y = \pm 6$ oder $= \pm 2\sqrt{-7}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

*VII. $x = 4$ oder $= -2$ oder $= -1 \pm \sqrt{-7}$ (durch Add. von IV. u. VI. u. Div. mit 2),

*VIII. $y = 2$ oder $= -4$ oder $= 1 \pm \sqrt{-7}$ (durch Subtr. v. IV. v. VI. u. Div. durch 2).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

IX. $x-y = \frac{1}{4}xy$ (aus I. durch Multiplikation mit xy),

X. $x-y = \frac{16}{xy}$ (aus II. durch Division mit xy),

$\frac{1}{4}xy = \frac{16}{xy}$ (durch Substit. von X. in IX.),

$x^2y^2 = 64$ (durch Multiplikation mit $4yx$),

XI. $xy = \pm 8$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

XII. $4xy = \pm 32$ (durch Multiplikation mit 4),

XIII. $x-y = \pm 2$ (d. Substit. v. XI. in IX. oder in X.),

XIV. $x^2-2xy+y^2 = 4$ (durch Erheben ins Quadrat),

$x^2+2xy+y^2 = 36$ oder $= -28$ (d. Add. v. XII. u. XIV.),

XV. $x+y = \pm 6$ oder $= \pm 2\sqrt{-7}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel).

Bei dieser Lösung ist deutlicher ersichtlich, warum die Gleichungen $x-y = +2$ und $x+y = \pm 6$, sowie jene $x-y = -2$ und $x+y = \pm 2\sqrt{-7}$ zusammen gehören, denn die beiden ersten entstehen aus $xy = +8$ und die beiden letzten aus $xy = -8$.

Nr. 32. $$\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x}} = 9.$$

Auflösung. $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x} = 9\sqrt{4x+1}-9\sqrt{4x}$ (durch Mult. mit $\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x}$),

$10\sqrt{4x} = 8\sqrt{4x+1}$ (durch Versetzung),

$5\sqrt{4x} = 4\sqrt{4x+1}$ (durch Div. mit 2),

$100x = 64x+16$ (durch Erh. z. Quadrat),

$$36x = 16 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x = \tfrac{4}{9} \text{ (durch Division mit 36).}$$

Nr. 33.

$$\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a+x-\sqrt{2ax+x^2}} = b.$$

Auflösung.

$$(a+x+\sqrt{2ax+x^2})^2 = a^2b \text{ (d. Mult. mit } (a+x+\sqrt{2ax+x^2}) \,.\, (a+x-\sqrt{2ax+x^2}) = a^2),$$

$$a+x+\sqrt{2ax+x^2} = \pm\, a\sqrt{b} \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$\sqrt{2ax+x^2} = \pm\, a\sqrt{b} - a - x \text{ (durch Versetzen)},$$

$$2ax+x^2 = a^2b + a^2 + x^2 \mp 2a^2\sqrt{b} \mp 2ax\sqrt{b} + 2ax$$
(durch Erheben zum Quadrat),

$$\pm\, 2ax\sqrt{b} = a^2b \mp 2a^2\sqrt{b} + a^2 \text{ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen)},$$

$$x = \frac{(a\sqrt{b} \mp a)^2}{\pm\, 2a\sqrt{b}} \text{ (durch Division mit } 2a\sqrt{b}),$$

$$= \frac{a}{\pm 2a\sqrt{b}}(\sqrt{b} \mp 1)^2 \text{ (durch Division von Zähler und Nenner mit } a).$$

Nr. 34.

$$\begin{cases} \text{I.} & \sqrt{x-y}+\tfrac{1}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-y}} \\ \text{II.} & (x^2+y^2):xy = 34:15. \end{cases}$$

Auflösung.

$$(x^2+y^2):2xy = 17:15 \text{ (aus I., denn das Prod. der Mittelglieder } 34 \,.\, xy = 2xy \,.\, 17),$$

$$(x^2+2xy+y^2):(x^2-2xy+y^2) = 32:2 = 16:1 \text{ (nach dem in Nr. 4 angeführten Satz)},$$

$$\text{III.} \quad (x+y):(x-y) = \pm\, 4 : \pm\, 1 \text{ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel)},$$

$$2x:2y = x:y = 5:3 \text{ oder wie } 3:5 \text{ (abermals nach d. in Nr. 4 angef. Satz)},$$

$$\text{IV.} \quad x = \frac{5y}{3} \text{ oder } = \frac{3y}{5} \text{ (durch Bildung der gleich. Prod. u. Div. m. 3 od. 5)},$$

$$\sqrt{x+y}:\sqrt{x-y} = \pm\, 2:1 \text{ oder wie } \pm\, 2\sqrt{-1}:1 \text{ (aus III. durch aberm. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$\text{V.} \quad \sqrt{x+y} = \pm\, 2\sqrt{x-y} \text{ od. } = \pm\, 2\sqrt{-1} \,.\, \sqrt{x-y} \text{ (durch Bildung der gleichen Produkte).}$$

Entweder:

$$2\sqrt{x-y} = \frac{x-1}{\sqrt{x-y}} \quad \text{(durch Substit. von V. in I.)} \qquad 0 = \frac{x-1}{\sqrt{x-y}}$$

$$2x-2y = x-1 \quad \text{(d. Mult. mit } \sqrt{x-y}\text{)} \qquad 0 = x-1$$

$$x = 2y-1 \quad \text{(durch Versetzung)} \qquad x = 1$$

$$\frac{5y}{3} = 2y-1 \qquad\qquad y = \frac{3x}{5}$$

$$y = 3 \qquad\qquad = \tfrac{3}{5}$$

$$x = 5.$$

*VI. Die vier ersten Wurzeln sind daher $x = 5$ oder $= 1$ und $y = 3$ oder $= \frac{3}{5}$.

Oder:

$$\sqrt{x-y}(1+\sqrt{-1}) = \frac{x-1}{\sqrt{x-y}}; \qquad \sqrt{x-y}(1-\sqrt{-1}) = \frac{x-1}{\sqrt{x-y}}$$

(durch Substitution von V. in I.),

$$(x-y)(1+\sqrt{-1}) = x-1; \qquad (x-y)(1-\sqrt{-1}) = x-1$$

(durch Multiplikation mit $\sqrt{x-y}$),

$$x-y+x\sqrt{-1}-y\sqrt{-1} = x-1; \quad x-y-x\sqrt{-1}+y\sqrt{-1} = x-1$$

(durch Versetzung),

$$1 = y\sqrt{-1}+y-x\sqrt{-1}; \qquad 1 = y-y\sqrt{-1}+x\sqrt{-1}$$

$$1 = y[1+\sqrt{-1}-\tfrac{3}{5}\sqrt{-1}]; \qquad 1 = y[1-\sqrt{-1}+\tfrac{3}{5}\sqrt{-1}$$

(durch Einsetzen von IV.),

$$= y[1+\tfrac{2}{5}\sqrt{-1}] \qquad\qquad = y[1-\tfrac{2}{5}\sqrt{-1}]$$

$$\text{*VII. } y = \frac{5}{5+2\sqrt{-1}} \qquad\qquad y = \frac{5}{5-2\sqrt{-1}}$$

$$= \tfrac{5}{29}(5-2\sqrt{-1}) \qquad\qquad = \tfrac{5}{29}(5+2\sqrt{-1})$$

$$\text{*VIII. } x = \frac{3}{5+2\sqrt{-1}} \qquad\qquad x = \frac{3}{5-2\sqrt{-1}}$$

$$= \tfrac{3}{29}(5-2\sqrt{-1}) \qquad\qquad = \tfrac{3}{29}(5+2\sqrt{-1}).$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$$x-y+\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2-y^2} = x-1 \quad \text{(aus I. durch Mult. mit } \sqrt{x-y}\text{)},$$

IX. $\sqrt{x^2-y^2} = 2(y-1)$ (durch Weglassen der gleichen Glieder, Versetzung und Mult. mit 2),

und nun entweder

$$\sqrt{\tfrac{25}{9}y^2-y^2} = 2y-2 \quad \text{(durch Substit. von IV. in IX)},$$

$$\pm\tfrac{4}{3}y = 2y-2$$

$$6 = 6y \mp 4y \quad \text{(durch Versetzung)},$$

X. 3 oder $\frac{3}{5} = y$

XI. $x = 5$ oder $= 1$ (d. Substit. von X. in IV.),

oder auch $\sqrt{\tfrac{9}{25}y^2-y^2} = 2y-2$ (durch Substit. von IV. in IX.),

$$\pm \tfrac{4}{5} y\sqrt{-1} = 2y - 2$$

$$10 = 10y \mp 4y\sqrt{-1} \text{ (durch Versetzung),}$$

XI. $$y = \frac{5}{5 \mp 2\sqrt{-1}} = \tfrac{5}{29}(5 \pm 2\sqrt{-1})$$

XII. $$x = \frac{3}{5 \mp 2\sqrt{-1}} = \tfrac{3}{29}(5 \pm 2\sqrt{-1}$$ (durch Substit. von XII. in IV.).

Die Werthe von $x = 1$ und $y = \tfrac{3}{5}$, sowie jene $x = \frac{3}{5+2\sqrt{-1}}$ und $y = \frac{5}{5+2\sqrt{-1}}$ entsprechen der Gleichung $\sqrt{x-y} - \tfrac{1}{2}\sqrt{x+y} = \frac{x-1}{\sqrt{x-y}}$, oder für dieselben ist $\sqrt{x+y}$ negativ anzunehmen.

Nr. 35.

I. $x^4y^3 - x^3y^4 = 216$
II. $x^2y - xy^2 = 6$.

Auflösung. $x^2y^2 = 36$ (durch Division von I. durch II.),

III. $xy = \pm 6$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

IV. $4xy = \pm 24$ (durch Multiplikation mit 4),

V. $x - y = \pm 1$ (durch Division von II. durch III.),

VI. $x^2 - 2xy + y^2 = 1$ (durch Erheben zum Quadrat),

$x^2 + 2xy + y^2 = 25$ oder $= -23$ (d. Add. von IV. u. VI.),

VII. $x + y = \pm 5$ oder $= \pm\sqrt{-23}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

*VIII. $x = 3$ oder $= -2$ oder $= \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2}$ (durch Add. von V. u. VII. u. Div. durch 2),

*IX. $y = 2$ oder $= -3$ oder $= \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2}$

(durch Subtr. von V. von VII. und Div. durch 2 oder durch Substitution von VIII. in III. oder in V. oder in VII.).

Nr. 36.

I. $x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 208$
II. $y^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 1053$.

Auflösung.

III. $\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}) = 13.16$ (durch Ausheben der gemeinschaftlichen Faktoren in I.),

IV. $\sqrt[3]{y^4}(\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2}) = 13.81$ (aus II. durch Ausheben gemeinschaftlicher Faktoren),

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{x^4}{y^4}} = \tfrac{16}{81} \text{ (durch Division von III. durch IV.)},$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}} = \pm \tfrac{4}{9} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

V. $\sqrt[3]{x^2} = \pm \tfrac{4}{9}\sqrt[3]{y^2}$ (durch Multiplikation mit $\sqrt[3]{y^2}$),

$\sqrt[3]{x} = \pm \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{y}$ oder $= \pm \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{y}\,.\,\sqrt{-1}$ (durch abermaliges Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

VI. $x = \pm \tfrac{8}{27} y$ oder $= \mp \tfrac{8}{27} y\sqrt{-1}$ (durch Erheben zum Kubus),

$\sqrt[3]{y^4}\left(\sqrt[3]{y^2} \pm \tfrac{4}{9}\sqrt[3]{y^2}\right) = 13\,.\,81$ (durch Substit. von V. in IV.),

$\sqrt[3]{y^6} = y^2 = \dfrac{13\,.\,81}{1 \pm \frac{4}{9}}$ (durch Division mit $1 \pm \tfrac{4}{9}$),

$= 729$ oder $= \dfrac{13\,.\,729}{5}$

* VII. $y = \pm 27$ oder $= \pm 27\sqrt{\tfrac{13}{5}}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

* VIII. $x = \pm 8$ oder ∓ 8 oder $= \mp 8\sqrt{-\tfrac{13}{5}}$ oder $= \pm 8\sqrt{-\tfrac{13}{5}}$ (durch Substit. von VII. in VI.).

Anmerkung. Eine andere Lösung ist folgende:

IX. $\sqrt[3]{y^2} = \pm \tfrac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}$ (durch Multiplikation mit $\pm \tfrac{9}{4}$ in V.),

$\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2} \pm \tfrac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}\right) = 13\,.\,16$ (durch Substit. von IX. in III.),

$\sqrt[3]{x^6} = x^2 = \dfrac{13\,.\,16}{1 \pm \frac{9}{4}}$ (durch Division mit $1 \pm \tfrac{9}{4}$),

$= 64$ oder $= -\dfrac{13\,.\,64}{5}$

X. $x = \pm 8$ oder $= \pm 8\sqrt{-\tfrac{13}{5}}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

$y^2 = \pm \tfrac{729}{64} x^2$ (aus IX. d. Erheben in den Kubus),

XI. $y = \pm \tfrac{27}{8} x$ oder $= \pm \tfrac{27}{8} x\sqrt{-1}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

XII. $= \pm 27$ oder $= \mp 27$ oder $= \mp 27\sqrt{\tfrac{13}{5}}$ oder $= \pm 27\sqrt{\tfrac{13}{5}}$ (d. Substit. v. X. in XI.).

Die Werthe in VIII. und XII. zeigen an, dass nicht, wie gewöhnlich, die positiven und negativen Werthe der beiden Unbekannten einzeln zusammen gehören, sondern dass die Gleichungen erfüllt werden, wenn sowohl $x = +8$ mit $y = +27$ als mit $y = -27$ und $x = -8$ sowohl mit $y = +27$ als auch mit $y = -27$ eingesetzt wird. Dasselbe gilt auch für die andern Wurzeln.

Eine andere Gleichung, die zur Auflösung benutzt werden kann, ergiebt sich folgendermassen:

$\sqrt[3]{x^4y^4}\,.\,(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^2 = 13^2\,.\,81\,.\,16$ (d. Mult. v. III. u. IV.),

$\sqrt[3]{x^2y^2}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}) = \pm 13\,.\,36$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

XIII. $x\sqrt[3]{yx^2}+y\sqrt[3]{x^2y} = \pm 468$ (d. Aufl. der Klammern),

XIV. $x^2+x\sqrt[3]{xy^2}+y\sqrt[3]{x^2y}+y^2 = 1261$ (durch Add. von I. u. II.),

XV.* $x^2+y^2 = 793$ oder $= 1729$ (durch Subtr. von XIII. von XIV.).

Nr. 37.

I. $x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{4}}.y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{2}} = 1009$

II. $x^3+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^3 = 582193.$

Auflösung.

III. $x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{2}} = 577$ (durch Division von II. durch I.),

$2x^{\frac{3}{2}}+2y^{\frac{3}{2}} = 1586$ (durch Addition von I. und III.),

IV. $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}} = 793$ (durch Division mit 2),

$x^{\frac{3}{4}}.y^{\frac{3}{4}} = 216$ (durch Subtr. von IV. von I. oder von III. von IV. oder von III. von I. und Division durch 2),

V. $x^{\frac{3}{2}}.y^{\frac{3}{2}} = 46656$ (durch Erheben zum Quadrat),

$3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = 139968$ (durch Multiplikation mit 3),

$x^3-2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^3 = 442225$ (durch Subtr. von V. von II.),

VI. $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}} = \pm 665$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

VII. $x^{\frac{3}{2}} = 729$ oder $= 64$ (durch Add. von IV. und VI. und Division durch 2),

$x^{\frac{1}{2}} = 9$ oder $= 4$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

*VIII. $x = 81$ oder $= 16$ (d. Erheben z. Quadr.),

$y^{\frac{3}{2}} = 64$ oder $= 729$ (durch Subtr. von VI. von IV. und Division durch 2),

$y^{\frac{1}{2}} = 4$ oder $= 9$ (d. Ausz. d. Kub.-Wurzel),

*IX. $y = 16$ oder $= 81$ (d. Erheb. z. Quadrat).

Anmerkung. Es ist leicht, auf analogem Wege wie früher, Gleichungen für $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{4}}$ und $x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{3}{4}}$ herzustellen.

Nr. 38.

I. $x^2+y^2+xy(x+y) = 68$

II. $x^3+y^3-3x^2 = 12+3y^2.$

Auflösung.

$x^2+y^2+x^2y+xy^2 = 68$ (aus I. d. Auflösen d. Klamm.),

III. $3x^2+3y^2+3x^2y+3xy^2 = 204$ (durch Mult. mit 3),

IV. $x^3+y^3-3x^2-3y^2 = 12$ (aus II. durch Versetzung),

$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2 = 216$ (durch Add. von III. u. IV.),

V. $x+y = 6$ (durch Ausz. d. Kub.-Wurzel),

$x^2+2xy+y^2 = 36$ (durch Erheben z. Quadrat),

VI. $2x^2+4xy+2y^2 = 72$ (durch Multiplikation mit 2),

VII. $x^2+y^2+6xy = 68$ (durch Substit. von V. in I.),

$x^2-2xy+y^2 = 4$ (durch Subtr. von VII. von VI.),

VIII. $x-y = \pm 2$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

*IX. $x = 4$ oder $= 2$ (durch Add. von V. und VIII. und Div. durch 2),

*X. $y = 2$ oder $= 4$ (durch Subtr. von VIII von V. und Div. durch 2).

Anmerkung. Derselbe Gang ergiebt sich, wenn man aus einer der beiden Hauptgleichungen einen Werth für x^2+y^2 sucht, und in die andere einsetzt.

Nr. 39.

I. $xy(x+y) = 84$

II. $x^2y^2(x^2+y^2) = 3600.$

Auflösung.

III. $x^2y^2(x^2+2xy+y^2) = 7056$ (aus I. d. Erheben z. Quadr.),

$2x^3y^3 = 3456$ (durch Subtr. von II. von III.),

$x^3y^3 = 1728$ (durch Division durch 2),

IV. $xy = 12$ (d. Ausziehen der Kub.-Wurzel),

V. $x^2y^2 = 144$ (durch Erheben ins Quadrat),

VI. $x+y = 7$ (durch Division von I. durch IV.),

VII. $x^2+2xy+y^2 = 49$ (durch Erheben ins Quadrat),

$x^2+y^2 = 25$ (durch Division von II. durch V.),

VIII. $2x^2+2y^2 = 50$ (durch Multiplikation mit 2),

$x^2-2xy+y^2 = 1$ (durch Subtr. von VII. von VIII.),

IX. $x-y = \pm 1$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

*X. $x = 4$ oder $= 3$ (durch Add. von VI. u. IX. und Division durch 2),

*XI. $y = 3$ oder $= 4$ (durch Subtr. von IX. von VI. u. Div. durch 2).

Anmerkung. Die Gleichung IX. ergiebt sich noch leichter folgendermassen:

XII. $4xy = 48$ (aus IV. durch Mult. mit 4),
$x^2 - 2xy + y^2 = 1$ (durch Subtr. von XII. von VII.),
oder auch d. Subtr. v. $2xy = 24$
von $x^2 + y^2 = 25$ u. s. f.

Nr. 40.

$$\begin{cases} \text{I.} & \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x+y} = 7 \\ \text{II.} & \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x-y} = 9. \end{cases}$$

Auflösung.

III. $x^3 - y^3 = 7(x^2 - y^2)$ (aus I. d. Mult. mit $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$),

IV. $x^3 + y^3 = 9(x^2 - y^2)$ (aus II. d. Mult. mit $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$),

$\dfrac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{7}{9}$ (durch Division von III. durch IV.),

$\dfrac{2x^3}{2y^3} = \dfrac{x^3}{y^3} = 8$ (weil wenn $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ auch $\dfrac{a+b}{b-a} = \dfrac{c+d}{d-c}$),

$\dfrac{x}{y} = 2$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),

V. $x = 2y$ (durch Multiplikation mit y),

$8y^3 - y^3 = 7(4y^2 - y^2)$ (durch Substit. von I in III.),

*VI. $y = 3$ (durch Division mit $7y^2$ nach vorausgegangener Vereinfachung),

*VII. $x = 6$ (durch Substit. von VI. in V.).

Anmerkung. Ebenso kann man auch Gleichung V. in IV. substituiren.

Nr. 41. $\dfrac{x^{(m-n)^2} + x^{-4mn}}{x^{(m-n)^2} - x^{-4mn}} = a^{\frac{r}{s}}$.

Auflösung.

$\dfrac{2x^{(m-n)^2}}{2x^{-4mn}} = \dfrac{x^{(m-n)^2}}{x^{-4mn}} = \dfrac{a^{\frac{r}{s}} + 1}{a^{\frac{r}{s}} - 1}$ (weil wenn $\dfrac{b}{c} = \dfrac{d}{f}$, auch $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{d+f}{d-f}$ ist),

$x^{(m-n)^2 + 4mn} = \dfrac{a^{\frac{r}{s}} + 1}{a^{\frac{r}{s}} - 1}$ (durch Ausführen der Division),

$x^{m^2 + 2mn + n^2} = \dfrac{a^{\frac{r}{s}} + 1}{a^{\frac{r}{s}} - 1}$ (durch Auflösen der Klammern),

$$x^{(m+n)^2} = \frac{a^{\frac{r}{s}}+1}{a^{\frac{r}{s}}-1}$$

$$x = \sqrt[(m+n)^2]{\frac{a^{\frac{r}{s}}+1}{a^{\frac{r}{s}}-1}}$$ (durch Ausziehen der $(m+n)^2$ten Wurzel),

$$= \left(\frac{a^{\frac{r}{s}}+1}{a^{\frac{r}{s}}-1}\right)^{\frac{1}{(m+n)^2}}$$

IV. Abschnitt.

Unreine quadratische Gleichungen mit einer unbekannten Grösse.

Nr. 1. $x^2+4x = 140.$

Auflösung. $x^2+4x+4 = 144$ (d. Ergänzung des Quadr. mit 4),

$x+2 = \pm 12$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = -2 \pm 12$ (durch Versetzung),

$= 10$ oder $= -14.$

Nr. 2. $x^2-6x+8 = 80.$

Auflösung. $x^2-6x+9 = 81$ (durch Addition von 1),

$x-3 = \pm 9$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = 3 \pm 9$ (durch Versetzung),

$= 12$ oder $= -6.$

Nr. 3. $x^2-10x+17 = 1.$

Auflösung. $x^2-10x+25 = 9$ (durch Addition von 8),

$x-5 = \pm 3$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x = 5 \pm 3$ (durch Versetzung),

$= 8$ oder $= 2.$

Nr. 4. $x^2-x-40 = 170.$

Auflösung. $x^2-x = 210$ (durch Versetzung),

$x^2-x+\frac{1}{4} = 210+\frac{1}{4} = \frac{841}{4}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $\frac{1}{4}$),

$x-\frac{1}{2} = \pm\frac{29}{2}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{1 \pm 29}{2}$ (durch Versetzung),

$= 15$ oder $= -14$.

Nr. 5. $3x^2 - 9x - 4 = 80$.

Auflösung. $3x^2 - 9x = 84$ (durch Versetzung),

$x^2 - 3x = 28$ (durch Division mit 3),

$x^2 - 3x + (\frac{3}{2})^2 = 28 + \frac{9}{4} = \frac{121}{4}$ (durch Ergänzen des Quadrats mit $(\frac{3}{2})^2$),

$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{11}{2}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{3 \pm 11}{2}$ (durch Versetzung),

$= 7$ oder $= -4$.

Nr. 6. $7x^2 - 21x + 13 = 293$.

Auflösung. $7x^2 - 21x = 280$ (durch Versetzung),

$x^2 - 3x = 40$ (durch Division mit 7),

$x^2 - 3x + (\frac{3}{2})^2 = 40 + \frac{9}{4} = \frac{169}{4}$ (durch Ergänzen des Quadrats mit $(\frac{3}{2})^2$),

$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{13}{2}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{3 \pm 13}{2}$ (durch Versetzung),

$= 8$ oder $= -5$.

Nr. 7. $\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{5} - 19 = 15\frac{1}{5}$.

Auflösung. $\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{5} = 34\frac{1}{5} = \frac{171}{5}$ (durch Versetzung),

$x^2 + \frac{15x}{5} = \frac{513}{5}$ (durch Multiplikation mit 3),

$x^2 + \frac{12}{5}x + (\frac{6}{5})^2 = \frac{513}{5} + \frac{36}{25} = \frac{2601}{25}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $\frac{36}{25}$),

$x + \frac{6}{5} = \pm \frac{51}{5}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{-6 \pm 51}{5}$ (durch Versetzung),

$= 9$ oder $= -\frac{57}{5}$.

Nr. 8. $\frac{2x^2}{3} + 3\frac{1}{2} = \frac{x}{2} + 8$.

Auflösung. $\frac{2x^2}{3} - \frac{x}{2} = 8 - 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ (durch Versetzung),

$x^2 - \frac{3x}{4} = \frac{27}{4}$ (durch Division mit [illegible]),

$x^2 - \frac{3x}{4} + (\frac{3}{8})^2 = \frac{27}{4} + \frac{9}{64} = \frac{441}{64}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{3}{8})^2$),

$x - \frac{3}{8} = \pm\frac{21}{8}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{3 \pm 21}{8}$ (durch Versetzung),

$= 3$ oder $= -\frac{9}{4}$.

Nr. 9. $x + 4 + \frac{7x - 8}{x} = 13.$

Auflösung. $x^2 + 4x + 7x - 8 = 13x$ (durch Mult. mit x),

$x^2 - 2x = 8$ (durch Versetzung),

$x^2 - 2x + 1 = 9$ (d. Ergänz. des Quadr. mit 1),

$x - 1 = \pm 3$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x = 1 \pm 3$ (durch Versetzung),

$= 4$ oder $= -2.$

Nr. 10. $4x - \frac{36 - x}{x} = 46.$

Auflösung. $4x^2 - 36 + x = 46x$ (durch Multiplikation mit x),

$4x^2 - 45x = 36$ (durch Versetzung),

$x^2 - \frac{45}{4}x = 9$ (durch Division mit 4),

$x^2 - \frac{45}{4}x + (\frac{45}{8})^2 = 9 + \frac{2025}{64} = \frac{2601}{64}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{45}{8})^2$),

$x - \frac{45}{8} = \pm\frac{51}{8}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{45 \pm 51}{8}$ (durch Versetzung),

$= 12$ oder $= -\frac{3}{4}$.

Nr. 11. $16 - \frac{5 - x}{2} = \frac{9 + 3x}{x} + 3x.$

Auflösung. $32x - 5x + x^2 = 18 + 6x + 6x^2$ (durch Mult. mit $2x$),

$-18 = 5x^2 - 21x$ (durch Versetzung),

$x^2 - \frac{21}{5}x = -\frac{18}{5}$ (durch Division mit 5),

$x^2 - \frac{21}{5}x + (\frac{21}{10})^2 = \frac{441}{100} - \frac{18}{5} = \frac{81}{100}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{21}{10})^2$),

$x - \frac{21}{10} = \pm\frac{9}{10}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{21 \pm 9}{10}$ (durch Versetzung),

$= 3$ oder $= \frac{6}{5}$.

Nr. 12. $\frac{x+3}{2}+\frac{16-2x}{2x-5} = 5\frac{1}{5}$.

Auflösung. $5x+15+\frac{160-20x}{2x-5} = 52$ (durch Mult. mit 10),

$\frac{160-20x}{2x-5} = 37-5x$ (durch Vers.),

$160-20x = 74x-10x^2-185+25x$ (durch Mult. mit $2x-5$),

$10x^2-119x = -345$ (durch Vers.),

$x^2-\frac{119}{10}x = -\frac{345}{10}$ (durch Div. mit 10),

$x^2-\frac{119}{10}x+(\frac{119}{20})^2 = \frac{14161}{400}-\frac{345}{10} = \frac{361}{400}$ (d. Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{119}{20})^2$).

$x-\frac{119}{20} = \pm\frac{19}{20}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{119\pm19}{20}$ (durch Vers.),

$= \frac{69}{10}$ oder $= 5$.

Nr. 13. $14+4x-\frac{x+7}{x-7} = 3x+\frac{9+4x}{3}$.

Auflösung. $42+12x-\frac{3x+21}{x-7} = 9x+9+4x$ (d. Mult. mit 3),

$33-x = \frac{3x+21}{x-7}$ (durch Versetzung),

$33x-x^2-231+7x = 3x+21$ (d. Mult. mit $x-7$),

$x^2-37x = -252$ (d. Vers. u. Mult. m. -1),

$x^2-37x+(\frac{37}{2})^2 = \frac{1369}{4}-252 = \frac{361}{4}$ (durch Ergänzen des Quadr. mit $(\frac{37}{2})^2$),

$x-\frac{37}{2} = \pm\frac{19}{2}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{37\pm19}{2}$ (durch Versetzen),

$= 28$ oder $= 9$.

Nr. 14. $\frac{x+4}{3}-\frac{7-x}{x-3} = \frac{4x+7}{9}-1$.

Auflösung. $3x+12-\frac{63-9x}{x-3} = 4x+7-9$ (d. Mult. mit 9),

$14-x = \frac{63-9x}{x-3}$ (durch Versetzung),

$14x-x^2-42+3x = 63-9x$ (d. Mult. mit $x-3$),

$$x^2 - 26x = -105 \text{ (d. Versetzung u. Mult. mit } -1),$$
$$x^2 - 26x + (13)^2 = 169 - 105 = 64 \text{ (durch Ergänzen des Quadrats mit } (13)^2),$$
$$x - 13 = \pm 8 \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = 13 \pm 8 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 21 \text{ oder } = 5.$$

Nr. 15. $\frac{15-x}{4} - \frac{12-3x}{4x-5} = 7x - \frac{23x+60}{7}$.

Auflösung.

$$105 - 7x - \frac{28(12-3x)}{4x-5} = 196x - 92x - 240 \text{ (d. Mult. mit 28)}.$$
$$\frac{28(12-3x)}{5-4x} = 111x - 345 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$\frac{28(4-x)}{5-4x} = 37x - 115 \text{ (durch Division mit 3)}$$
$$112 - 28x = 185x - 575 - 148x^2 + 460x \text{ (durch Mult. mit } 5 - 4x),$$
$$148x^2 - 673x = -687 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2 - \frac{673x}{148} = -\frac{687}{148} \text{ (durch Division mit 148)},$$
$$x^2 - \frac{673}{148}x + \left(\frac{673}{296}\right)^2 = \frac{452929}{296^2} - \frac{687}{148} = \frac{46225}{296^2} \text{ (durch Ergänz. des Quadrats mit } (\tfrac{673}{296})^2),$$
$$x - \tfrac{673}{296} = \pm\tfrac{215}{296} \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = \frac{673 \pm 215}{296} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 3 \text{ oder } = \tfrac{229}{148}.$$

Nr. 16. $\frac{x+11}{x} + \frac{9+4x}{x^2} = 7$.

Auflösung.

$$x^2 + 11x + 9 + 4x = 7x^2 \text{ (durch Multiplikation mit } x^2),$$
$$9 = 6x^2 - 15x \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2 - \tfrac{5}{2}x = \tfrac{3}{2} \text{ (durch Division mit 6)},$$
$$x^2 - \tfrac{5}{2}x + (\tfrac{5}{4})^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{25}{16} = \tfrac{49}{16} \text{ (durch Ergänzen des Quadrats mit } (\tfrac{5}{4})^2),$$
$$x - \tfrac{5}{4} = \pm\tfrac{7}{4} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = \frac{5 \pm 7}{4} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 3 \text{ oder } = -\tfrac{1}{2}.$$

Nr. 17. $\frac{2x+9}{9}+\frac{4x-3}{4x+3}=3+\frac{3x-16}{18}$.

Auflösung.

$$4x+18+\frac{72x-54}{4x+3}=54+3x-16 \text{ (durch Mult. mit 18)},$$
$$\frac{72x-54}{4x+3}=20-x \text{ (durch Versetzung)},$$
$$72x-54=80x-4x^2+60-3x \text{ (durch Mult. mit } 4x+3\text{)},$$
$$4x^2-5x=114 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2-\tfrac{5}{4}x=\tfrac{57}{2} \text{ (durch Division mit 4)},$$
$$x^2-\tfrac{5}{4}x+(\tfrac{5}{8})^2=\tfrac{57}{2}+\tfrac{25}{64} \text{ (durch Ergänzen des Quadrats mit } (\tfrac{5}{8})^2\text{)},$$
$$=\tfrac{1849}{64}$$
$$x-\tfrac{5}{8}=\pm\tfrac{43}{8} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x=\frac{5\pm43}{8} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$=6 \text{ oder } =-\tfrac{19}{4}.$$

Nr. 18. $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}$.

Auflösung. $3x^2-5x=7x+420$ [d. Mult. mit $(x+60)(3x-5)$],

$$3x^2-12x=420 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2-4x=140 \text{ (durch Division mit 3)},$$
$$x^2-4x+4=144 \text{ (d. Ergänzen des Quadr. mit 4)},$$
$$x-2=\pm12 \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x=2\pm12 \text{ (durch Versetzen)},$$
$$=14 \text{ oder } =-10.$$

Nr. 19. $\frac{3x-7}{x}+\frac{4x-10}{x+5}=3\tfrac{1}{2}$.

Auflösung.

$$6x-14+\frac{8x^2-20x}{x+5}=7x \text{ (durch Multiplikation mit } 2x\text{)},$$
$$\frac{8x^2-20}{x+5}=x+14 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$8x^2-20x=x^2+14x+5x+70 \text{ (durch Mult. mit } x+5\text{)},$$
$$7x^2-39x=70 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2-\tfrac{39}{7}x=10 \text{ (durch Division mit 7)},$$
$$x^2-\tfrac{39}{7}x+(\tfrac{39}{14})^2=10+\tfrac{1521}{196}=\tfrac{3481}{196} \text{ (durch Ergänzen des Quadrats mit } (\tfrac{39}{14})^2\text{)},$$

$$x - \tfrac{39}{14} = \pm \tfrac{59}{14} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$
$$x = \frac{39 \pm 59}{14} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$= 7 \text{ oder } = -\tfrac{10}{7}.$$

Nr. 20. $\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{4-x}{2x} = 2\tfrac{1}{3}.$

Auflösung.

$$\frac{6x^2+12x}{x-1} - 12 + 3x = 14x \text{ (durch Multiplikation mit } 6x\text{),}$$
$$\frac{6x^2+12x}{x-1} = 12 + 11x \text{ (durch Versetzung),}$$
$$6x^2+12x = 12x + 11x^2 - 12 - 11x \text{ (durch Mult. mit } x-1\text{),}$$
$$12 = 5x^2 - 11x \text{ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),}$$
$$x^2 - \tfrac{11}{5}x = \tfrac{12}{5} \text{ (durch Division mit 5),}$$
$$x^2 - \tfrac{11}{5}x + (\tfrac{11}{10})^2 = \tfrac{12}{5} + \tfrac{121}{100} = \tfrac{361}{100} \text{ (durch Ergänzen des Quadrats mit } (\tfrac{11}{10})^2\text{),}$$
$$x - \tfrac{11}{10} = \pm \tfrac{19}{10} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$
$$x = \frac{11 \pm 19}{10} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$= 3 \text{ oder } = -\tfrac{4}{5}.$$

Nr. 21. $\dfrac{8x}{x+2} - 6 = \dfrac{20}{3x}.$

Auflösung. $\dfrac{4x}{x+2} - 3 = \dfrac{10}{3x}$ (durch Division durch 2),

$$12x^2 - 9x^2 - 18x = 10x + 20 \text{ (durch Mult. mit } 3x(x+2) = 3x^2+6x\text{),}$$
$$3x^2 - 28x = 20 \text{ (durch Versetzung),}$$
$$x^2 - \tfrac{28}{3}x = \tfrac{20}{3} \text{ (durch Division mit 3),}$$
$$x^2 - \tfrac{28}{3}x + (\tfrac{14}{3})^2 = \tfrac{20}{3} + \tfrac{196}{9} = \tfrac{256}{9} \text{ (durch Ergänzen des Quadrats mit } (\tfrac{14}{3})^2\text{),}$$
$$x - \tfrac{14}{3} = \pm \tfrac{16}{3} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$
$$x = \frac{14 \pm 16}{3} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$= 10 \text{ oder } = -\tfrac{2}{3}.$$

Nr. 22. $\dfrac{40}{x-5} + \dfrac{27}{x} = 13.$

Auflösung. $40x+27x-135 = 13x^2-65x$ [durch Mult. mit $x(x-5)$],

$-135 = 13x^2-132x$ (durch Vers.),

$x^2-\frac{132}{13}x = -\frac{135}{13}$ (durch Division mit 13),

$x^2-\frac{132}{13}x+(\frac{66}{13})^2 = \frac{4356}{169}-\frac{135}{13} = \frac{2601}{169}$ (durch Ergänzen des Quadr. mit $(\frac{66}{13})^2$),

$x-\frac{66}{13} = \pm\frac{51}{13}$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel),

$x = \frac{66 \pm 51}{13}$ (durch Versetzung),

$= 9$ oder $= \frac{15}{13}$.

Nr. 23. $\frac{5x-12}{9}+\frac{3x-24}{4x-12} = 9-\frac{7x-34}{15}$.

Auflösung.

$25x-60+\frac{135x-1080}{4x-12} = 405-21x+102$ (d. Mult. mit 45),

$\frac{135x-1080}{4x-12} = 567-46x$ (durch Versetzung),

$135x-1080 = 2268x-184x^2-6804+552x$ (durch Mult. mit $4x-12$),

$184x^2-2685x = -5724$ (durch Versetzung),

$x^2-\frac{2685}{184}x = -\frac{1431}{46}$ (durch Division mit 184),

$x^2-\frac{2685}{184}x+\left(\frac{2685}{368}\right)^2 = \frac{7209225}{368^2}-\frac{1431}{36}$ (d. Ergänzen des Quadr. mit $(\frac{2685}{368})^2$),

$= \frac{2996361}{368^2}$

$x-\frac{2685}{368} = \pm\frac{1731}{368}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{2685 \pm 1731}{368}$ (durch Versetzung),

$= 12$ oder $= \frac{477}{184}$.

Nr. 24. $\frac{2x}{x-4}+\frac{2x-5}{x-3} = 8\frac{1}{3}$.

Auflösung.

$\frac{6x^2-18x}{x-4}+6x-15 = 25x-75$ [durch Mult. mit $3(x-3)$],

$\frac{6x^2-18x}{x-4} = 19x-60$ (durch Versetzung),

$6x^2-18x = 19x^2-60x-76x+240$ (durch Mult. mit $x-4$),

$-240 = 13x^2-118x$ (durch Versetzung),

$x - \frac{39}{14} = \pm \frac{59}{14}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{39 \pm 59}{14}$ (durch Versetzung),

$= 7$ oder $= -\frac{10}{7}$.

Nr. 20. $\frac{x+2}{x-1} - \frac{4-x}{2x} = 2\frac{1}{3}$.

Auflösung.

$\frac{6x^2+12x}{x-1} - 12 + 3x = 14x$ (durch Multiplikation mit $6x$),

$\frac{6x^2+12x}{x-1} = 12 + 11x$ (durch Versetzung),

$6x^2 + 12x = 12x + 11x^2 - 12 - 11x$ (durch Mult. mit $x-1$),

$12 = 5x^2 - 11x$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$x^2 - \frac{11}{5}x = \frac{12}{5}$ (durch Division mit 5),

$x^2 - \frac{11}{5}x + (\frac{11}{10})^2 = \frac{12}{5} + \frac{121}{100} = \frac{361}{100}$ (durch Ergänzen des Quadrats mit $(\frac{11}{10})^2$),

$x - \frac{11}{10} = \pm \frac{19}{10}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{11 \pm 19}{10}$ (durch Versetzung),

$= 3$ oder $= -\frac{4}{5}$.

Nr. 21. $\frac{8x}{x+2} - 6 = \frac{20}{3x}$.

Auflösung. $\frac{4x}{x+2} - 3 = \frac{10}{3x}$ (durch Division durch 2),

$12x^2 - 9x^2 - 18x = 10x + 20$ (durch Mult. mit $3x(x+2) = 3x^2 + 6x$),

$3x^2 - 28x = 20$ (durch Versetzung),

$x^2 - \frac{28}{3}x = \frac{20}{3}$ (durch Division mit 3),

$x^2 - \frac{28}{3}x + (\frac{14}{3})^2 = \frac{20}{3} + \frac{196}{9} = \frac{256}{9}$ (durch Ergänzen des Quadrats mit $(\frac{14}{3})^2$),

$x - \frac{14}{3} = \pm \frac{16}{3}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{14 \pm 16}{3}$ (durch Versetzung),

$= 10$ oder $= -\frac{2}{3}$.

Nr. 22. $\frac{40}{x-5} + \frac{27}{x} = 13$.

Auflösung. $40x + 27x - 135 = 13x^2 - 65x$ [durch Mult. mit $x(x-5)$],

$-135 = 13x^2 - 132x$ (durch Vers.),

$x^2 - \frac{132}{13}x = -\frac{135}{13}$ (durch Division mit 13),

$x^2 - \frac{132}{13}x + (\frac{66}{13})^2 = \frac{4356}{169} - \frac{135}{13} = \frac{2601}{169}$ (durch Ergänzen des Quadr. mit $(\frac{66}{13})^2$),

$x - \frac{66}{13} = \pm\frac{51}{13}$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel),

$x = \frac{66 \pm 51}{13}$ (durch Versetzung),

$= 9$ oder $= \frac{15}{13}$.

Nr. 23. $\frac{5x-12}{9} + \frac{3x-24}{4x-12} = 9 - \frac{7x-34}{15}$.

Auflösung.

$25x - 60 + \frac{135x - 1080}{4x-12} = 405 - 21x + 102$ (d. Mult. mit 45),

$\frac{135x - 1080}{4x-12} = 567 - 46x$ (durch Versetzung),

$135x - 1080 = 2268x - 184x^2 - 6804 + 552x$ (durch Mult. mit $4x-12$),

$184x^2 - 2685x = -5724$ (durch Versetzung),

$x^2 - \frac{2685}{184}x = -\frac{1431}{46}$ (durch Division mit 184),

$x^2 - \frac{2685}{184}x + \left(\frac{2685}{368}\right)^2 = \frac{7209225}{368^2} - \frac{1431}{36}$ (d. Ergänzen des Quadr. mit $(\frac{2685}{368})^2$),

$= \frac{2996361}{368^2}$

$x - \frac{2685}{368} = \pm\frac{1731}{368}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{2685 \pm 1731}{368}$ (durch Versetzung),

$= 12$ oder $= \frac{477}{184}$.

Nr. 24. $\frac{2x}{x-4} + \frac{2x-5}{x-3} = 8\frac{1}{3}$.

Auflösung.

$\frac{6x^2 - 18x}{x-4} + 6x - 15 = 25x - 75$ [durch Mult. mit $3(x-3)$],

$\frac{6x^2 - 18x}{x-4} = 19x - 60$ (durch Versetzung),

$6x^2 - 18x = 19x^2 - 60x - 76x + 240$ (durch Mult. mit $x-4$),

$-240 = 13x^2 - 118x$ (durch Versetzung),

$$x^2-\tfrac{118}{13}x = -\tfrac{240}{13} \text{ (durch Division mit 13),}$$
$$x^2-\tfrac{118}{13}x+(\tfrac{59}{13})^2 = \tfrac{3481}{169}-\tfrac{240}{13} = \tfrac{361}{169} \text{ (durch Ergänzung des Quadrats mit } (\tfrac{59}{13})^2\text{),}$$
$$x-\tfrac{59}{13} = \pm\tfrac{19}{13} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$
$$x = \frac{59\pm 19}{13} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$= 6 \text{ oder } = \tfrac{40}{13}.$$

Nr. 25. $\dfrac{2x+3}{10-x}+6\tfrac{1}{2} = \dfrac{2x}{25-3x}$.

Auflösung.

$$4x+6+130-13x = \frac{40x-4x^2}{25-3x} \text{ [durch Mult. mit } 2(10-x)\text{],}$$
$$136-9x = \frac{40x-4x^2}{25-3x} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$3400-408x-225x+27x^2 = 40x-4x^2 \text{ (durch Mult. mit } 25-3x\text{),}$$
$$31x^2-673x = -3400 \text{ (durch Versetzung),}$$
$$x^2-\tfrac{673}{31}x = -\tfrac{3400}{31} \text{ (durch Division mit 31),}$$
$$x^2-\frac{673}{31}x+\left(\frac{673}{62}\right)^2 = -\frac{3400}{31}+\frac{452929}{62^2} \text{ (durch Ergänzung des Quadrats),}$$
$$= \frac{31329}{62^2}$$
$$x-\tfrac{673}{62} = \pm\tfrac{177}{62} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$
$$x = \frac{673\mp 177}{62} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$= \tfrac{425}{31} \text{ oder } = 8.$$

Nr. 26. $\dfrac{4x-5}{x}-\dfrac{3x-7}{3x+7} = \dfrac{9x+23}{13x}$.

Auflösung.

$$52x-65-\frac{39x^2-91x}{3x+7} = 9x+23 \text{ (durch Mult. mit } 13x\text{),}$$
$$43x-88 = \frac{39x^2-91x}{3x+7} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$129x^2-264x+301x-616 = 39x^2-91x \text{ (durch Mult. mit } 3x+7\text{),}$$
$$90x^2+128x = 616 \text{ (durch Versetzung),}$$
$$x^2+\tfrac{64}{45}x = \tfrac{308}{45} \text{ (durch Division mit 90),}$$
$$x^2+\frac{64}{45}x+\left(\frac{32}{45}\right)^2 = \frac{308}{45}+\frac{1024}{45^2} = \frac{14884}{45^2} \text{ (durch Ergänzen des Quadrats mit } (\tfrac{32}{45})^2\text{),}$$
$$x+\tfrac{32}{45} = \pm\tfrac{122}{45} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$x = \frac{-32 \pm 122}{45} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 2 \text{ oder } = -\tfrac{154}{45}.$$

Nr. 27. $2x+18-\frac{8x^2+16}{4x+7} = 27-\frac{12x-11}{2x-3}$.

Auflösung. $2x-9-\frac{8x^2+16}{4x+7} = -\frac{12x-11}{2x-3}$ (durch Vers.),

$$8x^2-36x+14x-63-8x^2-16 = -\frac{48x^2-44x+84x-77}{2x-3}$$
(durch Mult. mit $4x+7$),
$$\frac{48x^2+40x-77}{2x-3} = 22x+79 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$48x^2+40x-77 = 44x^2+158x-66x-237$$
(durch Mult. mit $2x-3$),
$$4x^2-52x = -160 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$4x^2-52x+169 = 9 \text{ (d. Ergänz. des Quadr. m. 169)},$$
$$2x-13 = \pm 3 \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$
$$2x = 13 \pm 3 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 16 \text{ oder } = 10$$
$$x = 8 \text{ oder } = 5 \text{ (d. Div. mit 2)}.$$

Nr. 28. $\frac{x}{x+9}+\frac{5}{2x+18} = \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2+20}{x+8}\right)$.

Auflösung.

$$\frac{2x^2+16x}{x+9}+\frac{5x+40}{x+9} = x^2+8x-x^2-20$$
[durch Mult. mit $2(x+8)$],
$$\frac{2x^2+21x+40}{x+9} = 8x-20$$
$$2x^2+21x+40 = 8x^2-20x+72x-180$$
(durch Mult. mit $x+9$),
$$220 = 6x^2+31x \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2+\tfrac{31}{6}x = \tfrac{110}{3} \text{ (durch Division mit 6)},$$
$$x^2+\tfrac{31}{6}x+\left(\tfrac{31}{12}\right)^2 = \tfrac{961}{144}+\tfrac{110}{3} = \tfrac{6241}{144}$$
(durch Ergänzen des Quadrats mit $\left(\tfrac{31}{12}\right)^2$),
$$x+\tfrac{31}{12} = \pm\tfrac{79}{12} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = \frac{-31 \pm 79}{12} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 4 \text{ oder } = -\tfrac{55}{6}.$$

Nr. 29. $\frac{x+4}{x+6}+\frac{5}{2x+4}=\frac{3x+7}{3x+4}$.

Auflösung.

$x+4+\frac{5x+30}{2x+4}=\frac{3x^2+7x+18x+42}{3x+4}$ (d. Mult mit $x+6$),

$\frac{3x^2+12x+4x+16+15x^2+90x+20x+120}{2x+4}=3x^2+25x+42$ (d. Mult. mit $3x+4$),

$\frac{15x^2+110x+120}{2x+4}=9x+26$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$15x^2+110x+120=18x^2+52x+36x+104$ (durch Mult. mit $2x+4$),

$16=3x^2-22x$ (durch Versetzung),

$x^2-\frac{22}{3}x=\frac{16}{3}$ (durch Division durch 3),

$x^2-\frac{22}{3}x+(\frac{11}{3})^2=\frac{16}{3}+\frac{121}{9}=\frac{169}{9}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{11}{3})^2$),

$x-\frac{11}{3}=\pm\frac{13}{3}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x=\frac{11\pm13}{3}$ (durch Versetzung),

$=8$ oder $=-\frac{2}{3}$.

Nr. 30. $\frac{4}{2x+3}+\frac{3x+6}{5x+18}=\frac{3x+5}{5x}$.

Auflösung.

$\frac{100x^2+360x}{3x+3}+15x^2+30x=15x^2+25x+54x+90$ (durch Mult. mit $5x(5x+18)=25x^2+90x$),

$\frac{100x^2+360x}{2x+3}=49x+90$ (durch Wegl. der gleichen Glieder und Versetzen),

$100x^2+360x=98x^2+180x+147x+270$ (durch Mult. mit $2x+3$),

$2x^2+33x=270$ (durch Versetzung),

$x^2+\frac{33}{2}x=135$ (durch Division mit 2),

$x^2+\frac{33}{2}x+(\frac{33}{4})^2=135+\frac{1089}{16}=\frac{3249}{16}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{33}{4})^2$),

$x+\frac{33}{4}=\pm\frac{57}{4}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x=\frac{-33\pm57}{4}$ (durch Versetzung),

$=6$ oder $=-\frac{45}{2}$.

Nr. 31. $\frac{8}{9+5x} + \frac{8x-17}{2+4x} = \frac{4x+3}{2x+12}$.

Auflösung.

$\frac{96+208x+32x^2}{9+5x} + 8x^2 + 48x - 102 - 17x = 4x + 3 + 8x^2 + 6x$ (durch Mult. mit $(2x+12)(1+2x) = 4x^2+26x+12$),

$\frac{96+208x+32x^2}{9+5x} = 105 - 21x$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$96+208x+32x^2 = 945 - 189x + 525x - 105x^2$ (durch Mult. mit $9+5x$),

$137x^2 - 128x = 849$ (durch Versetzung),

$x^2 - \frac{128}{137}x = \frac{849}{137}$ (durch Division mit 137),

$x^2 - \frac{128}{137}x + \left(\frac{64}{137}\right)^2 = \frac{849}{137} + \frac{4096}{137^2}$ (durch Ergänzung des Quadr. mit $(\frac{64}{137})$),

$= \frac{120409}{137^2}$

$x - \frac{64}{137} = \pm \frac{347}{137}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{64 \pm 347}{137}$ (durch Versetzung),

$= 3$ oder $= -\frac{283}{137}$.

Nr. 32. $\frac{12}{5-x} + \frac{8}{4-x} = \frac{32}{x+2}$.

Auflösung. $\frac{3}{5-x} + \frac{2}{4-x} = \frac{8}{x+2}$ (durch Div. mit 4),

$(3x+6)(4-x) + (2x+4)(5-x) = (40-8x)(4-x)$ (durch Mult. mit $(5-x)(4-x)(x+2)$),

$12x+24-3x^2-6x+10x+20-2x^2-4x = 160-32x-40x+8x^2$ (durch Auflösen der Klammer),

$-116 = 13x^2 - 84x$ (d. Versetzung),

$x^2 - \frac{84}{13}x = -\frac{116}{13}$ (durch Div. mit 13),

$x^2 - \frac{84}{13}x + (\frac{42}{13})^2 = \frac{1764}{169} - \frac{116}{13}$ (durch Ergänz. des Quadrats mit $(\frac{42}{13})^2$),

$= \frac{256}{169}$

$x - \frac{42}{13} = \pm \frac{16}{13}$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel),

$x = \frac{42 \pm 16}{13}$ (durch Versetzung),

$= \frac{58}{13}$ oder $= 2$.

Nr. 33. $\frac{2x-1}{3-x} = \frac{8-x^2}{2x-2} + \frac{x}{2}$.

Auflösung.

$$\frac{4x^2-2x-4x+2}{3-x} = 8-x^2+x^2-x \text{ (durch Mult. mit } 2x-2\text{)},$$
$$= 8-x$$
$$4x^2-6x+2 = 24-3x-8x+x^2 \text{ (durch Mult. mit } 3-x\text{)},$$
$$3x^2+5x = 22 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2+\tfrac{5}{3}x = \tfrac{22}{3} \text{ (durch Division mit 3)},$$
$$x^2+\tfrac{5}{3}x+(\tfrac{5}{6})^2 = \tfrac{22}{3}+\tfrac{25}{36} = \tfrac{289}{36} \text{ (d. Ergänz. des Quadr. mit } (\tfrac{5}{6})^2\text{)},$$
$$x+\tfrac{5}{6} = \pm\tfrac{17}{6} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = \frac{-5\pm17}{6} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 2 \text{ oder } = -\tfrac{11}{3}.$$

Nr. 34. $\frac{3}{6x-x^2} + \frac{6}{x^2+2x} = \frac{11}{5x}$.

Auflösung. $\frac{15}{6-x} + \frac{30}{x+2} = 11$ (durch Mult. mit $5x$),

$$15x+30+180-30x = 44x+132-11x^2 \text{ (durch Mult. mit } (6-x)(x+2) = 4x+12-x^2\text{)},$$
$$11x^2-59x = -78 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2-\tfrac{59}{11}x = -\tfrac{78}{11} \text{ (durch Division mit 11)},$$
$$x^2-\frac{59}{11}x+\left(\frac{59}{22}\right)^2 = \frac{3481}{22^2}-\frac{78}{11} \text{ (durch Ergänzung des Quadr. mit } (\tfrac{59}{22})^2\text{)},$$
$$= \frac{49}{22^2}$$
$$x-\tfrac{59}{22} = \pm\tfrac{7}{22} \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = \frac{59\pm7}{22} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 3 \text{ oder } = \tfrac{26}{11}.$$

Nr. 35. $\frac{4x^2+7x}{19} + \frac{5x-x^2}{3+x} = \frac{4x^2}{9}$.

Auflösung. $\frac{4x+7}{19} + \frac{5-x}{3+x} = \frac{4x}{9}$ (durch Division mit x),

$$36x+63+\frac{855-171x}{3+x} = 76x \text{ (durch Mult. mit 171)},$$
$$\frac{855-171x}{3+x} = 40x-63 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$855-171x = 120x-189+40x^2-63x \text{ (durch Mult. mit } 3+x\text{)},$$

$$1044 = 40x^2 + 228x \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2 + \tfrac{57}{10}x = \tfrac{261}{10} \text{ (durch Division mit 40)},$$
$$x^2 + \tfrac{57}{10}x + (\tfrac{57}{20})^2 = \tfrac{261}{10} + \tfrac{3249}{400} \text{ (d. Ergänz. des Quadr. mit } (\tfrac{57}{20})^2),$$
$$= \tfrac{13689}{400}$$
$$x + \tfrac{57}{20} = \pm\tfrac{117}{20} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = \frac{-57 \pm 117}{20} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 3 \text{ oder } = \frac{-87}{10}.$$

Nr. 36. $\dfrac{x^4+2x^3+8}{x^2+x-6} = x^2+x+8.$

Auflösung.

$$x^4+2x^3+8 = x^4+x^3+8x^2+x^3+x^2+8x-6x^2-6x-48$$
$$\text{(durch Mult. mit } x^2+x-6),$$
$$3x^2+2x = 56 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2+\frac{2x}{3} = \tfrac{56}{3} \text{ (durch Division mit 3)},$$
$$x^2+\frac{2x}{3}+(\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{56}{3}+\tfrac{1}{9} = \tfrac{169}{9} \text{ (durch Ergänzung des Quadrats mit } (\tfrac{1}{3})^2),$$
$$x+\tfrac{1}{3} = \pm\tfrac{13}{3} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = \frac{-1 \pm 13}{3} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 4 \text{ oder } = -\tfrac{14}{3}.$$

Nr. 37. $\dfrac{x+12}{x} + \dfrac{x}{x+12} = 5\tfrac{1}{5}.$

Auflösung.

$$\left(\frac{x+12}{x}\right)^2 + 1 = \frac{26}{5}\cdot\frac{x+12}{x} \text{ (durch Mult. mit } \frac{x+12}{x}),$$
$$\left(\frac{x+12}{x}\right)^2 - \frac{26}{5}\cdot\frac{x+12}{x} = -1 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$\left(\frac{x+12}{x}\right)^2 - \frac{26}{5}\cdot\frac{x+12}{x} + \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} \text{ (durch Ergänzung des Quadrats mit } (\tfrac{13}{5})^2),$$
$$\frac{x+12}{x} - \frac{13}{5} = \pm\frac{12}{5} \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel)}$$
$$\frac{x+12}{x} = \frac{13 \pm 12}{5} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 5 \text{ oder } = \tfrac{1}{5}$$

$x+12 = 5x$ oder $= \frac{1}{5}x$ (durch Multiplikation mit x),
$12 = 4x$ oder $= -\frac{4}{5}x$ (durch Versetzung),
$x = 3$ oder $= -15$ (d. Div. mit 4 oder mit $-\frac{4}{5}$).

Anmerkung. Man hätte zur Ordnung und Auflösung dieser Gleichung natürlich denselben Weg einschlagen können, wie bei den früheren Gleichungen, doch wurde dieser Methode hier der Vorzug gegeben, weil sie sich mit Vortheil bei den meisten Gleichungen anwenden lässt, in denen eine Funktion der Unbekannten und ihr reciproker Werth vorkommen. Man hätte die Gleichung auch mit $\frac{x}{x+12}$ statt mit $\frac{x+12}{x}$ multipliziren können.

Nr. 38. $\sqrt{4x+5}\,.\,\sqrt{7x+1} = 30.$

Auflösung. $28x^2+35x+4x+5 = 900$ (d. Erheben ins Quadr.),
$28x^2+39x = 895$ (durch Versetzung),
$x^2+\frac{39}{28}x = \frac{895}{28}$ (durch Division mit 28),
$x^2+\frac{39}{28}x+\left(\frac{39}{56}\right)^2 = \frac{895}{28}+\frac{1521}{56^2}$ (durch Ergänzung des Quadr. mit $(\frac{39}{56})^2$),
$= \frac{101761}{56^2}$
$x+\frac{39}{56} = \pm\frac{319}{56}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),
$x = \frac{-39\pm 319}{56}$ (d. Versetzung),
$= 5$ oder $= -\frac{179}{28}$.

Anmerkung. Der zweite Werth gilt für die Gleichung $-\sqrt{4x+5}\,.\,\sqrt{7x+1} = 30$, denn seine Einsetzung giebt $\sqrt{-\frac{144}{7}}\,.\,\sqrt{-\frac{175}{4}} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{144}{7}}\,.\,\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{175}{4}} = -\sqrt{36\,.\,25}$.

Nr. 39. $\frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{9x}-3\frac{4}{5}}{9-\sqrt{x}}.$

Auflösung. $81-x = 3x-\frac{19}{5}\sqrt{x}$ [durch Mult. mit $\sqrt{x}\,.\,(9-\sqrt{x})$],
$81 = 4x-\frac{19}{5}\sqrt{x}$ (durch Versetzung),
$x-\frac{19}{20}\sqrt{x} = \frac{81}{4}$ (durch Division mit 4),
$x-\frac{19}{20}\sqrt{x}+(\frac{19}{40})^2 = \frac{361}{1600}+\frac{81}{4}$ (durch Ergänzung des Quadr.
$= \frac{32761}{1600}$ mit $(\frac{19}{40})^2$),
$\sqrt{x}-\frac{19}{40} = \pm\frac{181}{40}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),
$\sqrt{x} = \frac{19\pm 181}{40}$ (durch Versetzung),

$= 5$ oder $= -\frac{81}{20}$

$x = 25$ oder $= \frac{6561}{400}$ (durch Erheben ins Quadrat).

Anmerkung. Eine andere allgemeinere Auflösungsart ist folgende:

$$81 - 4x = \tfrac{19}{5}\sqrt{x} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$6561 - 648x + 16x^2 = \tfrac{361}{25}x \text{ (durch Erheben ins Quadr.)},$$

$$16x^2 - \tfrac{16561}{25}x = -6561 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$x^2 - \tfrac{16561}{400}x = -\tfrac{6561}{400} \text{ (durch Division mit 16)},$$

$$x^2 - \tfrac{16561}{400}x + \left(\tfrac{16561}{800}\right)^2 = \tfrac{274266721}{640000} - \tfrac{6561}{16} \text{ (durch Ergänz. des Quadr. mit } \left(\tfrac{16561}{800}\right)^2\text{)},$$

$$= \tfrac{11826721}{640000}$$

$$x - \tfrac{16561}{8000} = \pm\tfrac{3439}{800} \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$x = \frac{16561 \pm 3439}{800} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$= 25 \text{ oder } = \tfrac{6561}{400}.$$

Dieses Beispiel zeigt zur Genüge, welchen weitläufigen Rechnungen man oft entgehen kann, wenn man erst die Werthe von Funktionen der Unbekannten sucht. Man erhält alsdann gewöhnlich auch die nöthigen Anhaltspunkte für die Einsetzung der Wurzeln in die Hauptgleichung, wie z. B. in diesem Falle jene, dass $\sqrt{x} = -\frac{81}{20}$ ist, was aus der zweiten Lösung nicht ersichtlich ist.

Nr. 40. $$\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{x^2 - x}{4}.$$

Auflösung. $$\frac{1}{x - \sqrt{x}} = \frac{x - \sqrt{x}}{4} \text{ (durch Division mit } x + \sqrt{x}\text{)},$$

$$4 = (x - \sqrt{x})^2 \text{ (durch Mult. mit } x - \sqrt{x}\text{)},$$

$$x - \sqrt{x} = \pm 2 \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$x - \sqrt{x} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} \pm 2 \text{ (d. Ergänzung des Quadr. mit } \tfrac{1}{4}\text{)},$$

$$= \tfrac{9}{4} \text{ oder } = -\tfrac{7}{4}$$

$$\sqrt{x} - \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{3}{2} \text{ oder } = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-7} \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$\sqrt{x} = \frac{1 \pm 3}{2} \text{ oder } = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-7} \text{ (d. Vers.)},$$

$$= 2 \text{ oder } = -1 \text{ oder } = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$x = 4 \text{ oder } = 1 \text{ oder } = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

(durch Erheben ins Quadrat).

Anmerkung. Die Gleichung $x - \sqrt{x} = \pm 2$ lässt sich auf verschiedene Weisen erzielen, unter anderen auch durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit $x + \sqrt{x}$ oder mit $x - \sqrt{x}$.

Nr. 41. $\frac{x-\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{5}{11}$.

Auflösung.

$$\frac{2x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$ (weil wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, auch $\frac{b+a}{b-a} = \frac{d+c}{d-c}$ ist),

$3x = 8\sqrt{x+1}$ (durch Mult. mit $3\sqrt{x+1}$),

$x = \frac{8}{3}\sqrt{x+1}$ (durch Division mit 3),

$x - \frac{8}{3}\sqrt{x+1} = 0$ (durch Versetzung),

$x+1-\frac{8}{3}\sqrt{x+1}+(\frac{4}{3})^2 = \frac{25}{9}$ (durch Add. von $1+(\frac{4}{3})^2$),

$\sqrt{x+1}-\frac{4}{3} = \pm\frac{5}{3}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x+1} = \frac{4\pm5}{3}$ (durch Versetzung),

$= 3$ oder $= -\frac{1}{3}$

$x+1 = 9$ oder $= \frac{1}{9}$ (durch Erheben ins Quadrat.

$x = 8$ oder $= -\frac{8}{9}$ (durch Versetzung).

Anmerkung. Einfacher ist folgende Lösung;

$x^2 = \frac{64}{9}x+\frac{64}{9}$ (durch Erheben zum Quadrat),

$x^2-\frac{64}{9}x = \frac{64}{9}$ (durch Versetzung),

$x^2-\frac{64}{9}x+(\frac{32}{9})^2 = \frac{64}{9}+\frac{1024}{81}$ (d. Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{32}{9})^2$,

$= \frac{1600}{81}$

$x-\frac{32}{9} = \pm\frac{40}{9}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{32\pm40}{9}$ (durch Versetzung),

$= 8$ oder $= -\frac{8}{9}$.

Die vorangegangene Lösung giebt aber durch den Wertl $\sqrt{x+1} = 3$ oder $= -\frac{1}{3}$ die nöthigen Anhaltspunkte für die Einsetzung der Wurzeln in die Hauptgleichung.

Nr. 42. $5 \cdot \frac{3x-1}{1+5\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x}$.

Auflösung.

$\frac{15x\sqrt{x}-5\sqrt{x}}{1+5\sqrt{x}}+2 = 3x$ (durch Multiplikation mit $\sqrt{x}$),

$15x\sqrt{x}-5\sqrt{x}+2+10\sqrt{x} = 3x+15x\sqrt{x}$ (d. Mult. mit $1+5\sqrt{x}$)

$2 = 3x-5\sqrt{x}$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzung),

$x-\frac{5}{3}\sqrt{x} = \frac{2}{3}$ (durch Division mit 3),

$x - \frac{5}{3}\sqrt{x} + (\frac{5}{6})^2 = \frac{4}{3} + \frac{25}{36} = \frac{49}{36}$ (d. Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{5}{6})^2$),

$\sqrt{x} - \frac{5}{6} = \pm\frac{7}{6}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x} = \frac{5 \pm 7}{6}$ (durch Versetzung),

$= 2$ oder $= -\frac{1}{3}$

$x = 4$ oder $= \frac{1}{9}$ (durch Erheben ins Quadrat).

Nr. 43. $\sqrt{x^5} - \frac{40}{\sqrt{x}} = 3x$.

Auflösutig. $x^3 - 40 = 3\sqrt{x^3}$ (durch Multiplikation mit $\sqrt{x}$),

$x^3 - 3\sqrt{x^3} = 40$ (durch Versetzung),

$x^3 - 3\sqrt{x^3} + (\frac{3}{2})^2 = 40 + \frac{9}{4} = \frac{169}{4}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{3}{2})^2$),

$\sqrt{x^3} - \frac{3}{2} = \pm\frac{13}{2}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x^3} = \frac{3 \pm 13}{2}$ (durch Versetzung),

$= 8$ oder $= -5$

$\sqrt{x} = 2$ oder $= -\sqrt[3]{5}$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),

$x = 4$ oder $= \sqrt[3]{25}$ (d. Erh. ins Quadrat).

Anmerkung. Bei der Einsetzung der Wurzeln in die Hauptgleichung darf nicht übersehen werden, dass $\sqrt{x^5} = (\sqrt{x})^5 = (-\sqrt[3]{5})^5 = -5\sqrt[3]{5^2}$ ist.

Nr. 44. $x^{\frac{4}{3}} + 7x^{\frac{2}{3}} = 44$.

Auflösung.

$x^{\frac{4}{3}} + 7x^{\frac{2}{3}} + (\frac{7}{2})^2 = 44 + \frac{49}{4} = \frac{225}{4}$ (durch Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{7}{2})^2$),

$x^{\frac{2}{3}} + \frac{7}{2} = \pm\frac{15}{2}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x^{\frac{2}{3}} = \frac{-7 \pm 15}{2}$ (durch Versetzung),

$x^{\frac{2}{3}} = 4$ oder $= -11$

$x^2 = 64$ oder $= -11^3$ (d. Erh. in den Kubus),

$x = \pm 8$ oder $= \pm 11\sqrt{-11}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel).

Nr. 45. $4x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} = 39$.

Auflösung. $x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{6}} = \frac{39}{4}$ (durch Division mit 4),

$x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{6}} + (\frac{1}{8})^2 = \frac{39}{4} + \frac{1}{64} = \frac{625}{64}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{1}{8})^2$),

$x^{\frac{1}{6}}+\frac{1}{8} = \pm\frac{25}{8}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x^{\frac{1}{6}} = \frac{-1\pm25}{8}$ (durch Versetzung),

$= 3$ oder $= -\frac{13}{4}$

$x = 729$ oder $= \frac{4816669}{4096}$ (d. Erh. in die 6te Potenz).

Nr. 46. $3x^6+42x^3 = 3321.$

Auflösung. $x^6+14x^3 = 1107$ (durch Division mit 3),

$x^6+14x^3+49 = 1156$ (d. Ergänz. des Quadr. m. $7^2=49$),

$x^3+7 = \pm34$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x^3 = -7\pm34$ (durch Versetzung),

$= 27$ oder $= -41$

$x = 3$ oder $= -\sqrt[3]{41}$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel).

Nr. 47. $\frac{8}{x^3}+2 = \frac{17}{x^{\frac{3}{2}}}.$

Auflösung. $8+2x^3 = 17x^{\frac{3}{2}}$ (durch Multiplikation mit x^3),

$2x^3-17x^{\frac{3}{2}} = -8$ (durch Versetzung),

$x^3-\frac{17}{2}x^{\frac{3}{2}} = -4$ (durch Division mit 2),

$x^3-\frac{17}{2}x^{\frac{3}{2}}+(\frac{17}{4})^2 = -4+\frac{289}{16}$ (d. Ergänz. d. Quadr. mit $(\frac{17}{4})^2$),

$= \frac{225}{16}$

$x^{\frac{3}{2}}-\frac{17}{4} = \pm\frac{15}{4}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x^{\frac{3}{2}} = \frac{17\pm15}{4}$ (durch Versetzung),

$= 8$ oder $= \frac{1}{2}$

$x^3 = 64$ oder $= \frac{1}{4}$ (durch Erheben ins Quadrat),

$x = 4$ oder $= \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ (d. Ausz. der Kub.-Wurz.).

Anmerkung. Ebenso gut wie nach $x^{\frac{3}{2}}$ kann die Gleichung auch nach $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ aufgelöst werden.

Nr. 48. $x^{\frac{7}{3}}+\frac{41\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{97}{\sqrt[3]{x^2}}+x^{\frac{5}{6}}.$

Auflösung. $x^3+41 = 97+x^{\frac{3}{2}}$ (durch Mult. mit $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$),

$x^3-x^{\frac{3}{2}} = 56$ (durch Versetzung),

$x^3-x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4} = 56+\frac{1}{4} = \frac{225}{4}$ (d. Ergänz. des Quadr. mit $\frac{1}{4}$),

$x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2} = \pm\frac{15}{2}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{-1 \pm 15}{2} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$= 8 \text{ oder } = -7$$
$$x^3 = 64 \text{ oder } = 49 \text{ (d. Erheben ins Quadrat),}$$
$$x = 4 \text{ oder } = \sqrt[3]{49} \text{ (d. Ausz. der Kub.-Wurzel).}$$

Anmerkung. Bei der Einsetzung der zweiten Wurzel in die Hauptgleichung übersehe man nicht, dass $x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}} = (\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}})^5 = \left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}}\right)^5 = (\sqrt[9]{-7})^5 = -\sqrt[9]{7^5}$ ist.

Nr. 49. $\sqrt[6]{\frac{1}{x^4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{3 - \sqrt[3]{x^2}}{x}.$

Auflösung. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = 3 - \sqrt[3]{x^2}$ (durch Mult. mit x),
$$2\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x} = 3 \text{ (durch Versetzung),}$$
$$\sqrt[3]{x^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{x} = \tfrac{3}{2} \text{ (durch Division mit 2),}$$
$$\sqrt[3]{x^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{x} + (\tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{25}{16} \text{ (durch Ergänz. des Quadr. mit } (\tfrac{1}{4})^2\text{),}$$
$$\sqrt[3]{x} + \tfrac{1}{4} = \pm\tfrac{5}{4} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$
$$\sqrt[3]{x} = \frac{-1 \pm 5}{4} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$= 1 \text{ oder } = -\tfrac{3}{2}$$
$$x = 1 \text{ oder } = -\tfrac{27}{8} \text{ (d. Erh. in den Kubus).}$$

Nr. 50. $3x^n\sqrt[3]{x^n} - \frac{4x^n}{\sqrt[3]{x^n}} = 4.$

Auflösung.
$$3\sqrt[3]{x^{4n}} - 4\sqrt[3]{x^{2n}} = 4 \text{ (weil } x^n\sqrt[3]{x^n} = \sqrt[3]{x^{3n} \cdot x^n} = \sqrt[3]{x^{4n}} \text{ und } x^n : \sqrt[3]{x^n} = \sqrt[3]{x^{3n} : x^n} = \sqrt[3]{x^{2n}} \text{ ist);}$$
$$\sqrt[3]{x^{4n}} - \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{x^{2n}} = \tfrac{4}{3} \text{ (durch Division mit 3),}$$
$$\sqrt[3]{x^{4n}} - \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{x^{2n}} + (\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{9} = \tfrac{16}{9} \text{ (durch Ergänzung des Quadrats mit } (\tfrac{2}{3})^2\text{),}$$
$$\sqrt[3]{x^{2n}} - \tfrac{2}{3} = \pm\tfrac{4}{3} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$
$$\sqrt[3]{x^{2n}} = \frac{2 \pm 4}{3} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$= 2 \text{ oder } = -\tfrac{2}{3}$$
$$x^{2n} = 8 \text{ oder } = -\tfrac{8}{27} \text{ (d. Erh. in den Kubus),}$$
$$x = \sqrt[2n]{8} \text{ oder } = \sqrt[2n]{-\tfrac{8}{27}} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).}$$

Anmerkung. Bei der Einsetzung der Wurzeln in die Hauptgleichung übersehe man nicht, dass $x^n = \sqrt{-\frac{8}{27}} = \sqrt{(-\frac{2}{3})^3} = -\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}$ und mithin $\sqrt[3]{x^n} = \sqrt[3]{\sqrt{(-\frac{2}{3})^3}} = \sqrt{-\frac{2}{3}}$ ist.

Nr. 51. $\dfrac{3\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}}}{x+2} = \dfrac{1\frac{2}{3} + 3\sqrt{x} - 2x}{2\sqrt{x} - 3}$.

Auflösung.

$6x - 2x^2 - 9\sqrt{x} + 3\sqrt{x^3} = \frac{5}{3}x + 3\sqrt{x^3} - 2x^2 + \frac{10}{3} + 6\sqrt{x} - 4x$ [durch Mult. mit $(x+2)(2\sqrt{x}-3)$],

$\frac{25}{3}x - 15\sqrt{x} = \frac{10}{3}$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen),

$x - \frac{9}{5}\sqrt{x} = \frac{2}{5}$ (durch Division mit $\frac{25}{3}$),

$x - \frac{9}{5}\sqrt{x} + (\frac{9}{10})^2 = \frac{2}{5} + \frac{81}{100} = \frac{121}{100}$ (durch Ergänzen des Quadrats mit $(\frac{9}{10})^2$),

$\sqrt{x} - \frac{9}{10} = \pm\frac{11}{10}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x} = \dfrac{9 \pm 11}{10}$ (durch Versetzung),

$= 2$ oder $= -\frac{1}{5}$

$x = 4$ oder $= \frac{1}{25}$ (d. Erh. ins Quadrat).

Nr. 52. $2x^{\frac{3}{2}}(x^3+a^3)^{\frac{1}{2}} = 2x^2(x+2a) + a^2(x-a)$.

Auflösung.

$2x^{\frac{3}{2}}(x^3+a^3)^{\frac{1}{2}} + a^3 = 2x^3 + 4ax^2 + a^2x$ (durch Auflösen der Klammern und Versetzen),

$x^3 + 2x^{\frac{3}{2}}(x^3+a^3)^{\frac{1}{2}} + x^3 + a^3 = 4x^3 + 4ax^2 + a^2x$ (durch Add. von $2x^3$),

$x^{\frac{3}{2}} + (x^3+a^3)^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}} + ax^{\frac{1}{2}}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$(x^3+a^3)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + ax^{\frac{1}{2}}$ (durch Versetzung),

$x^3 + a^3 = x^3 + 2ax^2 + a^2x$ (d. Erheben ins Quadr.),

$a^3 = 2ax^2 + a^2x$ (d. Wegl. der gleichen Glied.),

$x^2 + \dfrac{a}{2}x = \dfrac{a^2}{2}$ (durch Division mit $2a$),

$x^2 + \dfrac{a}{2}x + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{16} = \dfrac{9a^2}{16}$ (durch Ergänzen des Quadr. mit $\left(\dfrac{a}{4}\right)^2$),

$x + \dfrac{a}{4} = \pm\dfrac{3a}{4}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \dfrac{-a \pm 3a}{4}$ (durch Versetzung),

$= \dfrac{a}{2}$ oder $= -a$.

Anmerkung. Der bei dem ersten Ausziehen der Quadrat-Wurzel sich ergebende Werth: $x^{\frac{3}{2}}+(x^3+a^3)^{\frac{1}{2}} = -(2x^{\frac{3}{2}}+ax^{\frac{1}{2}})$ ist für elementare Behandlung unbrauchbar, indem er auf eine Gleichung dritten Grades führt.

Nr. 53. $adx - acx^2 = bcx - bd.$

Auflösung. $bd = acx^2 + (bc - ad)x$ (durch Vers.),

$x^2 + \frac{bc-ad}{ac}x = \frac{bd}{ac}$ (durch Division mit ac),

$x^2 + \frac{bc-ad}{ac}x + \left(\frac{bc-ad}{2ax}\right)^2 = \frac{bd}{ac} + \frac{b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}{4a^2c^2}$ (durch Ergänz. des Quadr. mit $\left(\frac{bc-ad}{2ac}\right)^2$),

$= \frac{b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2}{4a^2c^2}$

$x + \frac{bc-ad}{2ac} = \pm\frac{bc+ad}{2ac}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurz.),

$x = \frac{ad - bc \pm (bc+ad)}{2ac}$ (d. Vers.),

$= \frac{d}{c}$ oder $= -\frac{b}{a}$.

Nr. 54. $\frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{2ax}{c} + \frac{d^2}{c^2} = 0.$

Auflösung. $\frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{2ax}{c} = -\frac{d^2}{c^2}$ (durch Versetzung),

$\frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{2ax}{c} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} - \frac{d^2}{c^2}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $\left(\frac{b}{c}\right)^2$),

$= \frac{b^2 - d^2}{c^2}$

$\frac{ax}{b} - \frac{b}{c} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{b^2 - d^2}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\frac{ax}{b} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - d^2}}{c}$ (durch Versetzung),

$x = \frac{b}{ac}(b \pm \sqrt{b^2 - d^2})$ (d. Mult. mit $\frac{b}{a}$).

Anmerkung. Man kann natürlich auch die Hauptgleichung durch Multiplikation mit $\frac{b^2}{a^2}$ vollständig ordnen, ehe man das Quadrat ergänzt.

Nr. 55. $9a^4b^4x^2 - 6a^4b^2x = b^2.$

Auflösung.

$$9a^4b^4x^2 - 6a^3b^2x + a^2 = a^2 + b^2 \text{ (d. Ergänz. des Quadr. mit } a^2\text{)},$$
$$3a^2b^2x - a = \pm\sqrt{a^2+b^2} \text{ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel)},$$
$$3a^2b^2x = a \pm \sqrt{a^2+b^2} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{3a^2b^2} \text{ (d. Divis. mit } 3a^2b^2\text{)}.$$

Anmerkung. Die bei der vorhergehenden Aufgabe gemachte Bemerkung findet auch hier ihre Anwendung.

Nr. 56. $(a+b)x^2 = cx + \frac{ac}{a+b}.$

Auflösung.

$$(a+b)x^2 - cx = \frac{ac}{a+b} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2 - \frac{c}{a+b}x = \frac{ac}{(a+b)^2} \text{ (durch Division mit } (a+b)\text{)},$$
$$x^2 - \frac{c}{a+b}x + \left(\frac{c}{2(a+b)}\right)^2 = \frac{ac}{(a+b)^2} + \frac{c^2}{4(a+b)^2} \text{ (d. Ergänz. des}$$
$$= \frac{4ac+c^2}{4(a+b)^2} \text{ Quadr. mit } \left(\frac{c}{2(a+b)}\right)^2\text{)},$$
$$x - \frac{c}{2(a+b)} = \pm\frac{\sqrt{4ac+c^2}}{2(a+b)} \text{ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel)},$$
$$x = \frac{c \pm \sqrt{4ac+c^2}}{2(a+b)} \text{ (durch Versetzung)}.$$

Nr. 57. $3\sqrt{112-8x} = 19 + \sqrt{3x+7}.$

Auflösung.

$$1008 - 72x = 361 + 38\sqrt{3x+7} + 3x + 7 \text{ (durch Erheben ins Quadrat)},$$
$$640 - 75x = 38\sqrt{3x+7} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$409600 - 96000x + 5625x^2 = 4332x + 10108 \text{ (d. Erh. ins Quadr.)}.$$
$$5625x^2 - 100332x = -399492 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2 - \frac{11148}{625}x = \frac{44388}{625} \text{ (durch Division mit 5625)},$$
$$x^2 - \frac{11148}{625}x + \left(\frac{5574}{625}\right)^2 = \frac{31069476}{625^2} - \frac{44388}{625} \text{ (d. Ergänz. des}$$
$$= \frac{3326976}{625^2} \text{ Quadr. mit } \left(\frac{5574}{625}\right)^2\text{)},$$
$$x - \frac{5574}{625} = \pm\frac{1824}{625} \text{ (d. Ausz. der Qu-Wurzel)},$$

$$x = \frac{5574 \pm 1824}{625} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$= \frac{7398}{625} \text{ oder } = 6.$$

Anmerkung. Eine andere dem Prinzip nach nicht verschiedene Auflösung ist folgende:

$$3\sqrt{112-8x} - 19 = \sqrt{3x+7} \text{ (d. Versetzung),}$$

$$1008 - 72x - 114\sqrt{112-8x} + 361 = 3x+7 \text{ (d. Erh. ins Quadr.),}$$

$$1362 - 75x = 114\sqrt{112-8x} \text{ (d. Vers.),}$$

$$454 - 25x = 38\sqrt{112-8x} \text{ (durch Div. mit 3),}$$

$$206116 - 22700x + 625x^2 = 161728 - 11552x \text{ (durch Erheben ins Quadrat),}$$

$$625x^2 - 11148x = -44388 \text{ (d. Versetzung),}$$

$$625x^2 - 11148x + \left(\tfrac{5574}{25}\right)^2 = \tfrac{31069456}{625} - 44388 \text{ (durch Ergänzung des Quadr. mit } \left(\tfrac{5574}{25}\right)^2\text{),}$$

$$= \tfrac{3326976}{625}$$

$$25x - \tfrac{5574}{25} = \pm \tfrac{1824}{25} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$25x = \frac{5574 \pm 1824}{25} \text{ (d. Vers.),}$$

$$= \tfrac{7398}{25} \text{ oder } = 150$$

$$x = \tfrac{7398}{625} \text{ oder } = 6 \text{ (durch Division mit 25).}$$

Der erste dieser beiden Werthe entspricht der Gleichung: $3\sqrt{112-8x} = 19 - \sqrt{3x+7}$.

Nr. 58. $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$.

Auflösung.

$$2x+7+2\sqrt{6x^2-15x-126} + 3x - 18 = 7x+1 \text{ (durch Erh. ins Quadr.),}$$

$$2\sqrt{6x^2-15x-126} = 2x+12 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$\sqrt{6x^2-15x-126} = x+6 \text{ (durch Division mit 2),}$$

$$6x^2-15x-126 = x^2+12x+36 \text{ (d. Erh. ins Quadr.),}$$

$$5x^2-27x = 162 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$x^2 - \tfrac{27}{5}x = \tfrac{162}{5} \text{ (durch Division mit 5),}$$

$$x^2 - \tfrac{27}{5}x + \left(\tfrac{27}{10}\right)^2 = \tfrac{162}{5} + \tfrac{729}{100} \text{ (durch Ergänzung des Quadr. mit } \left(\tfrac{27}{10}\right)^2\text{),}$$

$$= \tfrac{3969}{100}$$

$$x - \tfrac{27}{10} = \pm \tfrac{63}{10} \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),}$$

$$x = \frac{27 \pm 63}{10} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 9 \text{ oder } = -\tfrac{18}{5}.$$

Anmerkung. Andere Auflösungen sind die folgenden zwei, nämlich entweder:

$$\sqrt{2x+7} = \sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$2x+7 = 7x+1-2\sqrt{21x^2-123x-18}+3x-18 \text{ (durch Erheben ins Quadrat)},$$
$$2\sqrt{21x^2-123x-18} = 8x-24 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$\sqrt{21x^2-123x-18} = 4x-12 \text{ (durch Division mit 2)},$$
$$21x^2-123x-18 = 16x^2-96x+144 \text{ (d. Erh. ins Quadr.)},$$
$$5x^2-27x = 162 \text{ (durch Versetzung)},$$

woraus das Uebrige von selbst folgt, oder auch:

$$\sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1} - \sqrt{2x+7} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$3x-18 = 7x+1-2\sqrt{14x^2+51x+7}+2x+7$$
$$2\sqrt{14x^2+51x+7} = 6x+26 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$\sqrt{14x^2+51x+7} = 3x+13 \text{ (durch Division mit 2)},$$
$$14x^2-51x+7 = 9x^2+78x+169 \text{ (d. Erheben ins Quadr.)},$$
$$5x^2-27x = 162 \text{ (durch Versetzung)},$$

woraus auch wieder das Uebrige von selbst folgt.

Der zweite Werth gilt für die Gleichung $-\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$ oder für jene $\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x-18} = -\sqrt{7x+1}$.

Nr. 59. $7\sqrt{\frac{3x}{2}-5} - \sqrt{\frac{x}{5}+45} = \frac{7}{4}\sqrt{10x+56}.$

Auflösung.

$$\frac{147}{2}x - 245 - 14\sqrt{\frac{3x^2}{10}+\frac{133}{2}x-225} + \frac{x}{5} + 45 = \frac{245}{8}x + \frac{343}{2} \text{ (durch Erheben zum Quadrat)},$$
$$\frac{1723}{40}x - \frac{743}{2} = 14\sqrt{\frac{3x^2}{10}+\frac{133}{2}x-225} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$1723x - 14860 = 560\sqrt{\frac{3x^2}{10}+\frac{133}{2}x-225} \text{ (durch Multiplikation mit 40)},$$
$$2968729x^2 - 51207560x + 220819600 = 94080x^2 + 20854400x - 70560000 \text{ (durch Erheben ins Quadrat)},$$
$$2874649x^2 - 72061960x = -291379600 \text{ (d. Vers.)},$$

$$x^2 - \frac{72061960}{2874649}x = -\frac{291379600}{2874649}$$ (durch Div. mit 2874649),

$$x^2 - \frac{72061960}{2874649}x + \left(\frac{36030980}{2874649}\right)^2 = \frac{1298231519760400}{2874649^2} - \frac{291379600}{2874649}$$ (durch die Ergänzung des Quadrats mit $\left(\frac{36030980}{2874649}\right)^2$),

$$= \frac{1298231519760400 - 837614075760400}{2874649^2}$$

$$= \frac{460617444000000}{2874649^2}$$

$$x - \frac{36030980}{2874649} = \pm\frac{21462000}{2874649}$$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$$= \frac{36030980 \pm 21462000}{2874649}$$

$$= 20 \text{ oder } = \frac{14568980}{2874649}.$$

Anmerkung. Andere Auflösungen sind die folgenden zwei, nämlich entweder:

$$7\sqrt{\frac{3x}{2} - 5} = \frac{7}{4}\sqrt{10x+56} + \sqrt{\frac{x}{5} + 45}$$ (durch Versetzung),

$$\frac{147}{2}x - 245 = \frac{245}{8}x + \frac{343}{2} + \frac{7}{2}\sqrt{2x^2 + \frac{2306}{5}x + 2520} + \frac{x}{5} + 45$$

(durch Erheben ins Quadrat),

$$\frac{1707}{40}x - \frac{923}{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2x^2 + \frac{2306}{5}x + 2520}$$ (durch Versetzung),

$$1707x - 18460 = 140\sqrt{2x^2 + \frac{2306}{5}x + 2520}$$ (d. Mult. mit 40),

$$2913849x^2 - 63022440x + 340771600 = 39200x^2 + 9039520x + 49392000$$

(durch Erheben ins Quadrat),

$$2874649x^2 - 72061960x = -291379600$$ (durch Versetzung),

woraus das Uebrige von selbst folgt, oder auch:

$$7\sqrt{\frac{3x}{2} - 5} - \frac{7}{4}\sqrt{10x+56} = \sqrt{\frac{x}{5} + 45}$$ (durch Versetzung),

$$\frac{147}{2}x - 245 - \frac{49}{2}\sqrt{15x^2 + 34x - 280} + \frac{245}{8}x + \frac{343}{2} = \frac{x}{5} + 45$$

(durch Erheben ins Quadrat),

$\frac{4157}{40}x - \frac{237}{2} = \frac{49}{2}\sqrt{15x^2+34x-280}$ (durch Versetzung),

$4157x - 4740 = 980\sqrt{15x^2+34x-280}$ (durch Mult. mit 40),

$17280649x^2 - 39408360x + 22467600 = 14406000x^2 + 32653600x - 268912000$ (d. Erh. ins Quadr.),

$2874649x^2 - 72061960x = -291379600$ (durch Versetzung),

woraus das Uebrige auch wieder wie oben folgt.

Die zweite Wurzel $x = \frac{14568980}{2874649}$ entspricht der Gleichung

$$7\sqrt{\frac{3x}{2}-5} + \sqrt{\frac{x}{5}+45} = \frac{7}{4}\sqrt{10x+56}.$$

Nr. 60. $$\frac{16-4\sqrt{x}}{8-3\sqrt{x}} = \frac{88+33\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}} + \frac{x^2-5x+11}{(8-3\sqrt{x})(4+\sqrt{x})}.$$

Auflösung. $\frac{4(4-\sqrt{x})}{8-3\sqrt{x}} = \frac{11(8+3\sqrt{x})}{4+\sqrt{x}} + \frac{x^2-5x+11}{(8-3\sqrt{x})(4+\sqrt{x})}$ (d. Ausheben gemeinschaftlicher Faktoren),

$4(16-x) = 11(64-9x) + x^2 - 5x + 11$ (durch Mult. mit $(8-3\sqrt{x})(4\sqrt{x})$),

$64 - 4x = 704 - 99x + x^2 - 5x + 11$ (durch Auflösen der Klammern),

$x^2 - 100x = -651$ (d. Vers. u. Mult. mit -1),

$x^2 - 100x + (50)^2 = 2500 - 651 = 1849$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(50)^2$),

$x - 50 = \pm 43$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = 50 \pm 43$ (durch Versetzung),

$= 93$ oder $= 7$.

Nr. 61. $$\frac{54-9\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} = \frac{23x+46\sqrt{x}}{6+\sqrt{x}} + \frac{7x^2-3x+4}{(x+2\sqrt{x})(6+\sqrt{x})}.$$

Auflösung. $324 - 9x = 23x^2 - 92x + 7x^2 - 3x + 4$ (d. Mult. mit $(x+2\sqrt{x})(6+\sqrt{x})$ auf ähnliche Weise wie in der vorigen Aufgabe),

$320 = 30x^2 - 86x$ (durch Versetzung),

$x^2 - \frac{43}{15}x = \frac{32}{3}$ (durch Division mit 30),

$x^2 - \frac{43}{15}x + (\frac{43}{30})^2 = \frac{1849}{900} + \frac{32}{3}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{43}{30})^2$),

$= \frac{11449}{900}$

$x - \frac{43}{30} = \pm\frac{107}{30}$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{43 \pm 107}{30}$ (durch Versetzung),

$= 5$ oder $= -\frac{32}{15}$.

Nr. 62. $(x+\sqrt{x}):(x-\sqrt{x}) = (3\sqrt{x}+6):2\sqrt{x}$.

Auflösung. $(\sqrt{x}+1):(\sqrt{x}-1) = (3\sqrt{x}+6):2\sqrt{x}$ (durch Divis. der beiden ersten Glieder mit $\sqrt{x}$),

$2x+2\sqrt{x} = 3x+6\sqrt{x}-3\sqrt{x}-6$ (durch Bildung der gleichen Produkte),

$x+\sqrt{x} = 6$ (durch Versetzung),

$x+\sqrt{x}+(\tfrac{1}{2})^2 = 6+\tfrac{1}{4} = \tfrac{25}{4}$ (durch Ergänz. des Quadrats mit $(\tfrac{1}{2})^2$),

$\sqrt{x}+\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{5}{2}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x} = \frac{-1\pm 5}{2}$ (durch Versetzung),

$= 2$ oder $= -3$

$x = 4$ oder $= 9$ (durch Erheben ins Quadrat).

Anmerkung. Man kann auch das 2te und 4te Glied mit $\sqrt{x}$ dividiren, oder auch die Division erst nach der Bildung der gleichen Produkte vornehmen.

Nr. 63. $x^2+11+\sqrt{x^2+11} = 42$.

Auflösung.

$x^2+11+\sqrt{x^2+11}+(\tfrac{1}{2})^2 = 42+\tfrac{1}{4} = \tfrac{169}{4}$ (durch Ergänzen des Quadrats mit $\tfrac{1}{4}$),

$\sqrt{x^2+11}+\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{13}{2}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x^2+11} = \frac{-1\pm 13}{2}$ (durch Versetzung),

$= 6$ oder $= -7$

$x^2+11 = 36$ oder $= 49$ (d. Erh. ins Quadr.),

$x^2 = 25$ oder $= 38$ (durch Versetzung),

$x = \pm 5$ oder $= \pm\sqrt{38}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

Anmerkung. Folgende Lösung möchte zwar einfacher sein, lässt aber unentschieden, ob $\sqrt{x^2+11}$ positiv oder negativ sei.

$\sqrt{x^2+11} = 31-x^2$ (durch Versetzung),

$x^2+11 = 961-62x^2+x^4$ (d. Erheben ins Quadr.),

$x^4-63x^2 = 950$ (durch Versetzung u. Mult. mit -1),

$x^4-63x^2+(\tfrac{63}{2})^2 = \tfrac{3969}{4}-950 = \tfrac{169}{4}$ (durch Ergänzen des Quadrats mit $(\tfrac{63}{2})^2$),

$x^2-\tfrac{63}{2} = \pm\tfrac{13}{2}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x^2 = \frac{63\pm 13}{2}$ (durch Versetzung),

$= 38$ oder $= 25$

$x = \pm\sqrt{38}$ oder $= \pm 5$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

Nr. 64. $(x-5)^3 - 3(x-5)^{\frac{3}{2}} = 40$.

Auflösung.

$(x-5)^3 - 3(x-5)^{\frac{3}{2}} + (\frac{3}{2})^2 = 40 + \frac{9}{4} = \frac{169}{4}$ (durch Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{3}{2})^2$),

$(x-5)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = \pm\frac{13}{2}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$(x-5)^{\frac{3}{2}} = \frac{3 \pm 13}{2}$ (durch Versetzung),

$= 8$ oder $= -5$

$(x-5)^3 = 64$ oder $= 25$ (d. Erh. ins Quadr.),

$x - 5 = 4$ oder $= \sqrt[3]{25}$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),

$x = 9$ oder $= 5 + \sqrt[3]{25}$ (d. Versetz.).

Nr. 65. $x + \sqrt{x+6} = 2 + 3\sqrt{x+6}$.

Auflösung. $x - 2\sqrt{x+6} = 2$ (durch Versetzung),

$x + 6 - 2\sqrt{x+6} + 1 = 9$ (durch Add. von $6+1 = 7$),

$\sqrt{x+6} - 1 = \pm 3$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x+6} = 1 \pm 3$ (durch Versetzung),

$= 4$ oder $= -2$

$x + 6 = 16$ oder $= 4$ (d. Erheben ins Quadr.),

$x = 10$ oder $= -2$ (durch Versetzung).

Anmerkung. Eine andere, ebenso einfache Auflösung, auf welche aber die Bemerkung von Nr. 63 ebenfalls Anwendung findet, ist folgende:

$x - 2 = 2\sqrt{x+6}$ (durch Versetzung),

$x^2 - 4x + 4 = 4x + 24$ (durch Erheben ins Quadrat),

$x^2 - 8x = 20$ (durch Versetzung),

$x^2 - 8x + 16 = 36$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(4)^2$),

$x - 4 = \pm 6$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = 4 \pm 6$ (durch Versetzung),

$x = 10$ oder $= -2$.

Nr. 66. $(x^2+5)^2 - 4x^2 = 160$.

Auflösung.

$(x^2+5)^2 - 4(x^2+5) + 4 = 144$ (durch Subtr. von $20 - 4 = 16$),

$x^2 + 5 - 2 = x^2 + 3 = \pm 12$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x^2 = -3 \pm 12$ (durch Versetzung),
$= 9$ oder $= -15$
$x = \pm 3$ oder $= \pm\sqrt{-15}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$x^4+10x^2+25-4x^2 = 160$ (durch Auflösen der Klammern),
$x^4+6x^2 = 135$ (durch Versetzung),
$x^4+6x^2+9 = 144$ (d. Ergänzung des Quadr. mit $(3)^2$),
$x^2+3 = \pm 12$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),
$x^2 = -3\pm 12$ (durch Versetzung),
$= 9$ oder $= -15$
$x = \pm 3$ oder $= \pm\sqrt{-15}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

Nr. 67. $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18} = 24$.

Auflösung.

$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}+(\frac{1}{2})^2 = 24+18\frac{1}{4} = \frac{169}{4}$ (durch Add. von $18+\frac{1}{4}$),
$\sqrt{x^2-7x+18}+\frac{1}{2} = \pm\frac{13}{2}$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel),
$\sqrt{x^2-7x+18} = \frac{-1\pm 13}{2}$ (durch Versetzung),
$= 6$ oder $= -7$
$x^2-7x+18 = 36$ oder $= 49$ (durch Erheben zum Quadrat),
$x^2-7x+\frac{49}{4} = \frac{121}{4}$ oder $= \frac{173}{4}$ (durch Subtraktion von $\frac{23}{4}$),
$x-\frac{7}{2} = \pm\frac{11}{2}$ oder $= \pm\frac{1}{2}\sqrt{173}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),
$x = 9$ od. $= -2$ od. $= \frac{7\pm\sqrt{173}}{2}$ (durch Versetzung).

Nr. 68. $9x-4x^2+\sqrt{4x^2-9x+11} = 5$.

Auflösung.

$4x^2-9x-\sqrt{4x^2-9x+11} = -5$ (durch Mult. mit -1),
$4x^2-9x+11-\sqrt{4x^2-9x+11}+(\frac{1}{2})^2 = -5+11\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$ (durch Add. von $11+\frac{1}{4}$),
$\sqrt{4x^2-9x+11}-\frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),
$\sqrt{4x^2-9x+11} = \frac{1\pm 5}{2}$ (durch Versetzung),

$$= 3 \text{ oder } = -2$$

$$4x^2-9x+11 = 9 \text{ oder } = 4 \text{ (durch Erheben zum Quadrat),}$$

$$4x^2-9x = -2 \text{ oder } = -7 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$x^2-\tfrac{9}{4}x = -\tfrac{1}{2} \text{ oder } = -\tfrac{7}{4} \text{ (durch Division mit 4),}$$

$$x^2-\tfrac{9}{4}x+(\tfrac{9}{8})^2 = \tfrac{81}{64}-\tfrac{1}{2} \text{ oder } = \tfrac{81}{64}-\tfrac{7}{4} \text{ (durch Ergänzen des}$$

$$= \tfrac{49}{64} \text{ oder } = -\tfrac{31}{64} \quad \text{Quadrats mit } (\tfrac{9}{8})^2\text{),}$$

$$x-\tfrac{9}{8} = \pm\tfrac{7}{8} \text{ oder } = \pm\tfrac{1}{8}\sqrt{-31} \text{ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),}$$

$$x = 2 \text{ oder } = \tfrac{1}{4} \text{ oder } = \frac{9\pm\sqrt{-31}}{8} \text{ (d. Vers.).}$$

Nr. 69. $x^2+\sqrt{5x+x^2} = 42-5x.$

Auflösung.

$$x^2+5x+\sqrt{x^2+5x} = 42 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$x^2+5x+\sqrt{x^2+5x}+(\tfrac{1}{2})^2 = 42+\tfrac{1}{4} = \tfrac{169}{4} \text{ (durch Ergänzen des Quadrats mit } (\tfrac{1}{2})^2\text{),}$$

$$\sqrt{x^2+5x}+\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{13}{2} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$\sqrt{x^2+5x} = \frac{-1\pm 13}{2} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$= 6 \text{ oder } = -7$$

$$x^2+5x = 36 \text{ oder } = 49 \text{ (d. Erheb. ins Quadr.),}$$

$$x^2+5x+(\tfrac{5}{2})^2 = 36+\tfrac{25}{4} \text{ oder } = 49+\tfrac{25}{4} \text{ (durch Ergänzung des Quadrats mit } (\tfrac{5}{2})^2\text{),}$$

$$= \tfrac{169}{4} \text{ oder } = \tfrac{221}{4}$$

$$x+\tfrac{5}{2} = \pm\tfrac{13}{2} \text{ oder } = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{221} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$x = 4 \text{ oder } = -9 \text{ oder } = \frac{-5\pm\sqrt{221}}{2}$$

(durch Versetzung).

Nr. 70. $\dfrac{2}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{2} = \dfrac{17}{4\sqrt{x+2}}.$

Auflösung. $4+(x+2)^2 = \tfrac{17}{2}(x+2)$ (d. Mult. mit $2(x+2)^{\frac{3}{2}}$),

$$(x+2)^2-\tfrac{17}{2}(x+2) = -4 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$(x+2)^2-\tfrac{17}{2}(x+2)+(\tfrac{17}{4})^2 = \tfrac{289}{16}-4 = \tfrac{225}{16} \text{ (durch Ergänz. des Quadrats mit } (\tfrac{17}{4})^2\text{),}$$

$$x+2-\tfrac{17}{4} = x-\tfrac{9}{4} = \pm\tfrac{15}{4} \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),}$$

$$x = \frac{9\pm 15}{4} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$= 6 \text{ oder } = -\tfrac{3}{2}.$$

Eine andere Lösung ergiebt sich durch Multiplikation mit $\sqrt{x+2}$ und Auflösung der Gleichung

$$\frac{2}{x+2}+\frac{x+2}{2}=\frac{17}{4} \text{ nach } \frac{2}{x+2} \text{ oder } \frac{x+2}{2}$$

oder durch Auflösen der Klammern in $(x+2)^2-\frac{17}{2}(x+2)=-4$.

Nr. 71. $$\frac{x}{x+4}+\frac{4}{\sqrt{x+4}}=\frac{21}{x}.$$

Auflösung. $\frac{x^2}{x+4}+\frac{4x}{\sqrt{x+4}} = 21$ (durch Multiplikation mit x),

$\frac{x^2}{x+4}+\frac{4x}{\sqrt{x+4}}+4 = 25$ (d. Ergänz. des Quadr. mit 2^2),

$\frac{x}{\sqrt{x+4}}+2 = \pm 5$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\frac{x}{\sqrt{x+4}} = -2\pm 5$ (durch Versetzung),

$= 3$ oder $= -7$

$x = 3\sqrt{x+4}$ oder $= -7\sqrt{x+4}$ (d. Multiplikation mit $\sqrt{x+4}$).

$x-3\sqrt{x+4} = 0$; $\quad x+7\sqrt{x+4} = 0$

(durch Versetzung),

$x+4-3\sqrt{x+4}+(\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$; $\quad x+4+7\sqrt{x+4}+(\frac{7}{2})^2 = \frac{65}{4}$

(durch Add. von $4+(\frac{3}{2})^2$ oder von $4+(\frac{7}{2})^2$),

$\sqrt{x+4}-\frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2}$; $\quad \sqrt{x+4}+\frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{65}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x+4} = 4$ oder $= -1$; $\quad \sqrt{x+4} = \frac{-7\pm\sqrt{65}}{2}$

(durch Versetzung),

$x+4 = 16$ oder $= 1$; $\quad x+4 = \frac{57\mp 7\sqrt{65}}{2}$

(durch Erheben ins Quadrat),

$x = 12$ oder $= -3$; $\quad x = \frac{49\mp 7\sqrt{65}}{2}$

(durch Versetzung).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$x^2+4x\sqrt{x+4} = 21(x+4)$ [d. Mult. mit $x(x+4)$],

$x^2+4x\sqrt{x+4}+4(x+4) = 25(x+4)$ [durch Ergänzung des Quadrats mit $4(x+4)$],

$$x+2\sqrt{x+4} = \pm 5\sqrt{x+4} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = (-2 \pm 5)\sqrt{x+4} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$= 3\sqrt{x+4} \text{ oder } = -7\sqrt{x+4}$$
$$x^2 = 9x+36 \text{ oder } = 49x+196 \text{ (d. Erh. ins Quadrat)}.$$
$$x^2-9x = 36; \qquad x^2-49x = 196$$
(durch Versetzung),
$$x^2-9x+(\tfrac{9}{2})^2 = 36+\tfrac{81}{4}; \qquad x^2-49x+(\tfrac{49}{2})^2 = 196+\tfrac{2401}{4}$$
(durch Ergänzung des Quadrats),
$$= \tfrac{225}{4} \qquad = \tfrac{3185}{4}$$
$$x-\tfrac{9}{2} = \pm\tfrac{15}{2}; \qquad x-\tfrac{49}{2} = \pm\tfrac{7}{2}\sqrt{65}$$
$$x = 12 \text{ oder } = -3; \qquad x = \frac{49 \pm 7\sqrt{65}}{2}$$
(durch Versetzung).

Der letzte Theil dieser Lösung ist aber aus mehrfach erwähnten Gründen nicht zu empfehlen. Eine fernere Lösung ergiebt sich durch Multiplikation mit $\frac{x+4}{4}$ und Auflösung der hierdurch entstandenen Gleichung nach $\frac{\sqrt{x+4}}{x}$.

Nr. 72. $\frac{7+x}{7-x}+\frac{7-x}{7+x} = 2\tfrac{9}{10}$.

Auflösung. $\left(\frac{7+x}{7-x}\right)^2+1 = \frac{29}{10}\cdot\frac{7+x}{7-x}$ (d. Mult. mit $\left(\frac{7+x}{7-x}\right)$,

$$\left(\frac{7+x}{7-x}\right)^2-\frac{29}{10}\cdot\frac{7+x}{7-x} = -1 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\left(\frac{7+x}{7-x}\right)^2-\frac{29}{10}\cdot\frac{7+x}{7-x}+\left(\frac{29}{20}\right)^2 = \frac{841}{400}-1 = \frac{441}{400} \text{ (durch Ergänzung des Quadrats mit } (\tfrac{29}{20})^2\text{)},$$

$$\frac{7+x}{7-x}-\frac{29}{20} = \pm\frac{21}{20} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$\frac{7+x}{7-x} = \frac{29\pm 21}{20} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$= \tfrac{5}{2} \text{ oder } = \tfrac{2}{5}$$

$$\frac{14}{2x} = \frac{7}{x} = \pm\frac{7}{3} \text{ (weil wenn } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ist, auch } \frac{a+b}{a-c} = \frac{c+d}{c-d} \text{ ist)},$$

$$x = \pm 3 \text{ (durch Mult. mit } \pm\frac{3x}{7}\text{)}.$$

Anmerkung. Ganz derselbe Gang ergiebt sich auch, wenn man die Hauptgleichung mit $\frac{7-x}{7+x}$ statt, wie oben geschehen, mit $\frac{7+x}{7-x}$ multiplizirt.

Eine fernere Lösung ist die folgende, welche die Ergänzung des Quadrats entbehrlich macht:

$$49+14x+x^2+49-14x+x^2 = \tfrac{29}{10}(49-x^2) \text{ [durch Mult. mit } (7+x)(7-x)],$$

$$20 \,.\, 49+20x^2 = 29 \,.\, 49-29 \,.\, x^2 \text{ (durch Mult. mit 10 und Vereinfachen)},$$

$$49x^2 = 9 \,.\, 49 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$x^2 = 9 \text{ (durch Division mit 49)},$$

$$x = \pm 3 \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)}.$$

Nr. 73.
$$\frac{3x+5}{3x-5} - \frac{3x-5}{3x+5} = \frac{125}{176}.$$

Auflösung.
$$\left(\frac{3x+5}{3x-5}\right)^2 - 1 = \frac{135}{176} \cdot \frac{3x+5}{3x-5} \text{ (d. Mult. mit } \frac{3x+5}{3x-5}\text{)},$$

$$\left(\frac{3x+5}{3x-5}\right)^2 - \frac{135}{176} \cdot \frac{3x+5}{3x-5} = 1 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\left(\frac{3x+5}{3x-5}\right)^2 - \frac{135}{176} \cdot \frac{3x+5}{3x-5} + \left(\frac{135}{352}\right)^2 = 1 + \frac{18225}{123904} \text{ (d. Ergänz. des Quadr. mit } (\tfrac{135}{352})^2\text{)},$$

$$= \tfrac{142129}{123904}$$

$$\frac{3x+5}{3x-5} - \frac{135}{352} = \pm \frac{377}{352} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$\frac{3x+5}{3x-5} = \frac{135 \pm 377}{352} \text{ (durch Vers.)},$$

$$= \tfrac{16}{11} \text{ oder } = -\tfrac{11}{16}$$

$$\frac{6x}{10} = \frac{3x}{5} = \frac{27}{5} \text{ oder } = -\frac{5}{27} \text{ (durch Anwendung des Nr. 72 angeführten Satzes)},$$

$$x = 9 \text{ oder } = -\tfrac{25}{81} \text{ (durch Division mit } \tfrac{3}{5}\text{)}.$$

Anmerkung. Derselbe Gang ergiebt sich, wenn man die Haupt-

gleichung mit $\frac{3x-5}{3x+5}$ statt mit $\frac{3x+5}{3x-5}$, wie oben geschehen multiplizirt.

Eine andere Auflösung ist noch die durch Multiplikation mit $(3x+5)(3x-5)$ sich ergebende, welche auf die Gleichung $x^2-\frac{104}{81}x=\frac{25}{9}$ führt.

Nr. 74. $x+\sqrt{x}+2=\frac{x^2+x-4}{\sqrt{x}}$.

Auflösung.

$$x\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}=x^2+x-4 \text{ (durch Mult. mit } \sqrt{x}\text{)},$$
$$(x+2)\sqrt{x}=x^2-4 \text{ (d. Weglassen der gleichen Glieder)},$$
$$\sqrt{x}=x-2 \text{ (durch Division mit } x+2\text{)},$$
$$x-\sqrt{x}=2 \text{ (durch Versetzung und Mult. mit } -1\text{)},$$
$$x-\sqrt{x}+(\tfrac{1}{2})^2=2+\tfrac{1}{4}=\tfrac{9}{4} \text{ (d. Ergänz. des Quadr. mit } \tfrac{1}{4}\text{)},$$
$$\sqrt{x}-\tfrac{1}{2}=\pm\tfrac{3}{2} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$\sqrt{x}=\frac{1\pm 3}{2} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$=2 \text{ oder } =-1$$
$$x=4 \text{ oder } =1 \text{ (durch Erheben zum Quadr.)}$$

Es ist aber auch aus:

$$(x+2)\sqrt{x}=x^2-4$$
$$x\sqrt{x}+2\sqrt{x}=x^2-4 \text{ (durch Auflösen der Klammer)},$$
$$4+2\sqrt{x}=x^2-x\sqrt{x} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$4+2\sqrt{x}-2x=x^2-x\sqrt{x}-2x \text{ (durch Subtr. von } 2x\text{)},$$
$$-2(-2-\sqrt{x}+x)=x(x-\sqrt{x}-2) \text{ (durch Ausheben gemeinschaftlicher Faktoren)},$$
$$x=-2 \text{ (durch Division mit } x-\sqrt{x}-2\text{)}.$$

Anmerkung. Diese letzte Wurzel ergiebt sich viel einfacher wenn man den Ausdruck $x+2$, mit welchem vorhin dividirt wurde, $=0$ setzt.

Nr. 75. $\frac{x^2}{(x^2-4)^2}+\frac{6}{x^2-4}=\frac{351}{25x^2}$.

Auflösung. $\frac{x^4}{(x^2-4)^2}+\frac{6x^2}{x^2-4}=\frac{351}{25}$ (durch Mult. mit x^2),

$$\frac{x^4}{(x^2-4)^2}+\frac{6x^2}{x^2-4}+(3)^2=\tfrac{351}{25}+9=\tfrac{576}{25} \text{ (durch Ergänzen des Quadr. mit 9)},$$
$$\frac{x^2}{x^2-4}+3=\pm\tfrac{24}{5} \text{ (d. Auss. der Qu.-Wurz.)},$$

$$\frac{x^2}{x^2-4} = -3 \pm \tfrac{24}{5} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$= \tfrac{9}{5} \text{ oder } = -\tfrac{39}{5}$$

$$\frac{x^2}{4} = \tfrac{9}{4} \text{ oder } = \tfrac{39}{44} \text{ (weil wenn } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ auch } \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \text{ ist),}$$

$$x^2 = 9 \text{ oder } = \tfrac{39}{11} \text{ (durch Multiplikation mit 4),}$$

$$x = \pm 3 \text{ oder } = \pm\sqrt{\tfrac{39}{11}} \text{ (d. Ausziehen d. Qu.-Wurzel).}$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$$x^4 + 6x^2(x^2-4) = \tfrac{351}{25}(x^2-4)^2 \text{ (durch Mult. mit } x^2(x^2-4)^2\text{),}$$

$$x^4 + 6x^2(x^2-4) + 9(x^2-4)^2 = (9+\tfrac{351}{25})(x^2-4)^2 \text{ (d. Ergänzen des Quadrats mit } 9(x^2-4)^2\text{),}$$

$$= \tfrac{576}{25}(x^2-4)^2$$

$$x^2 + 3(x^2-4) = \pm\tfrac{24}{5}(x^2-4) \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$20x^2 - 60 = \pm 24(x^2-4) \text{ (d. Mult. mit 5),}$$

$$5x^2 - 15 = \pm 6(x^2-4) \text{ (durch Div. mit 4),}$$

$9 = x^2$ (durch Versetzung) $11x^2 = 39$

$x = \pm 3$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel) $x = \pm\sqrt{\tfrac{39}{11}}$.

Eine fernere Lösung ergiebt sich aus

$x^4 + 6x^2(x^2-4) = \tfrac{351}{25}(x^2-4)^2$ durch Auflösen der Klammern, indem man alsdann $x^4 - \frac{138x^2}{11} = -\tfrac{351}{11}$ und hieraus

$$x^2 - \tfrac{69}{11} = \pm\tfrac{30}{11} \text{ erhält.}$$

Nr. 76. $\left(x+\frac{8}{x}\right)^2 + x = 42 - \frac{8}{x}$.

Auflösung.

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)^2 + x + \frac{8}{x} = 42 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)^2 + x + \frac{8}{x} + (\tfrac{1}{2})^2 = 42 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{169}{4} \text{ (durch Ergänzung des Quadrats mit } \tfrac{1}{4}\text{),}$$

$$x + \frac{8}{x} + \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{13}{2} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$x + \frac{8}{x} = \frac{-1 \pm 13}{2} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$= 6 \text{ oder } = -7$$

$$x^2 + 8 = 6x \text{ oder } = -7x \text{ (d. Mult. mit } x\text{),}$$

$x^2 - 6x = -8$ (durch Versetzung) $x^2 + 7x = -8$

$x^2 - 6x + 9 = 1;$ $x^2 + 7x + (\frac{7}{2})^2 = \frac{49}{4} - 8 = \frac{17}{4}$

(durch Ergänzung des Quadrats),

$x - 3 = \pm 1;$ $x + \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = 4$ oder $= 2;$ $x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2}$

(durch Versetzung).

Nr. 77. $x + 4 - 2\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = \frac{3}{x-4}.$

Auflösung.

$x^2 - 16 - 2\sqrt{x^2 - 16} = 3$ (durch Mult. mit $x - 4$, w

alsdann $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} \cdot (x-4) = \sqrt{\frac{(x-4)^2 (x+4)}{x-4}} = \sqrt{(x-4)(x+}$

$= \sqrt{x^2 - 16}$ wird),

$x^2 - 16 - 2\sqrt{x^2 - 16} + 1 = 4$ (d. Ergänzung des Quadr. mit 1

$\sqrt{x^2 - 16} - 1 = \pm 2$ (d. Ausz. der Qu.-Wurze

$\sqrt{x^2 - 16} = 1 \pm 2$ (durch Versetzung),

$= 3$ oder $= -1$

$x^2 - 16 = 9$ oder $= 1$ (d. Erh. ins Quadr

$x^2 = 25$ oder $= 17$ (d. Versetzung).

$x = \pm 5$ oder $= \pm\sqrt{17}$ (durch Au

ziehen der Qu.-Wurzel).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$x + 4 - 2\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} + \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x-4}$ (d. Ergänzung des Qua

mit $\frac{1}{x-4}$),

$\sqrt{x+4} - \frac{1}{\sqrt{x-4}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{x-4}}$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurze

$\sqrt{x+4} = \frac{1 \pm 2}{\sqrt{x-4}}$ (durch Versetzung),

$\sqrt{x^2 - 16} = 3$ oder $= -1$ (durch Mult. m

$\sqrt{x-4}$),

woraus das Uebrige wie oben folgt.

Die beiden Wurzeln -5 und $+\sqrt{17}$ entsprechen der Gle

chung $x + 4 + 2\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = \frac{3}{x-4}.$

Nr. 78.

$$\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}} = x^2.$$

Auflösung. $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}} = x^2-\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}$ (d. Versetzung),

$12-\frac{12}{x^2} = x^4-2x^2\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}+x^2-\frac{12}{x^2}$ (durch Erheben ins Quadrat),

$0 = x^4-12-2x\sqrt{x^4-12}+x^2$ (durch Weglassen der gleichen Glieder, Versetzung, und weil $2x^2\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}} = 2x\sqrt{x^2\left(x^2-\frac{12}{x^2}\right)} = 2x\sqrt{x^4-12}$ ist),

$0 = \pm(\sqrt{x^4-12}-x)$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x^4-12} = x$ (durch Versetzung),

$x^4-12 = x^2$ (durch Erheben ins Quadrat),

$x^4-x^2 = 12$ (durch Versetzung),

$x^4-x^2+(\frac{1}{2})^2 = 12+\frac{1}{4} = \frac{49}{4}$ (durch Ergänzen des Quadrats mit $\frac{1}{4}$),

$x^2-\frac{1}{2} = \pm\frac{7}{2}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x^2 = \frac{1\pm 7}{2}$ (durch Versetzung),

$= 4$ oder $= -3$

$x = \pm 2$ oder $= \pm\sqrt{-3}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel).

Anmerkung. Die Wurzel $x = \pm\sqrt{-3}$ entspricht der Gleichung $\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}-\sqrt{12-\frac{12}{x^2}} = x^2$.

Nr. 79. $x^4\left(1+\frac{1}{3x}\right)^2-(3x^2+x) = 70.$

Auflösung.

$\frac{x^2}{9}(3x+1)^2-x(3x+1) = 70$ (weil $x^4\left(1+\frac{1}{3x}\right)^2 = x^4 . \frac{(3x+1)^2}{9x^2} = \frac{x^2}{9}(3x+1)^2$ ist),

$\frac{x^2}{9}(3x+1)^2-x(3x+1)+(\frac{3}{2})^2 = 70+\frac{9}{4} = \frac{289}{4}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{3}{2})^2$),

$$\frac{x}{3}(3x+1)-\tfrac{3}{2} = \pm\tfrac{17}{2} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$\frac{x}{3}(3x+1) = \frac{3\pm 17}{2} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$x^2+\frac{x}{3} = 10 \text{ oder } = -7 \text{ (durch Auflösen der Klammern),}$$

$$x^2+\frac{x}{3}+(\tfrac{1}{6})^2 = 10+\tfrac{1}{36} \text{ oder } = \tfrac{1}{36}-7 \text{ (d. Ergänz. des Quadr. mit } (\tfrac{1}{6})^2\text{),}$$

$$= \tfrac{361}{36} \text{ oder } = \frac{-251}{36}$$

$$x+\tfrac{1}{6} = \pm\tfrac{19}{6} \text{ oder } = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{-251} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$x = 3 \text{ oder } = -\tfrac{10}{3} \text{ oder } = \frac{-1\pm\sqrt{-251}}{6}$$

(durch Versetzung).

Anmerkung. Eine andere, nur wenig verschiedene, Lösung ergiebt sich durch Aufsuchung der Function $x^2\left(1+\frac{1}{3x}\right)$ aus der Gleichung: $x^4\left(1+\frac{1}{3x}\right)^2-3x^2\left(1+\frac{1}{3x}\right) = 70$.

Nr. 80. $$x^2-\tfrac{5}{2}x+15 = \frac{25x^2}{16}-\frac{64}{x^2}.$$

Auflösung. $$x^2+15+\frac{64}{x^2} = \frac{25x^2}{16}+\tfrac{5}{2}x \text{ (durch Versetzung),}$$

$$x^2+16+\frac{64}{x^2} = \frac{25x^2}{16}+\tfrac{5}{2}x+1 \text{ (durch Add. von 1),}$$

$$x+\frac{8}{x} = \pm(\tfrac{5}{4}x+1) \text{ (d. Ausz. d. Qu.-Wurz.),}$$

$$x^2+8 = \pm(\tfrac{5}{4}x^2+x) \text{ (durch Mult. mit } x\text{).}$$

$$\frac{x^2}{4}+x = 8 \text{ (durch Versetzung) } \quad \frac{9x^2}{4}+x = -8$$

$$\frac{x^2}{4}+x+1 = 9; \quad \frac{9x^2}{4}+x+(\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{9}-8 = -\tfrac{71}{9}$$

(durch Ergänzung des Quadrats mit 1 oder mit $(\frac{1}{3})^2$),

$$\frac{x}{2}+1 = \pm 3; \quad \frac{3x}{2}+\tfrac{1}{3} = \pm\tfrac{1}{3}\sqrt{-71}$$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$$\frac{x}{2} = 2 \text{ oder } = -4; \quad \frac{3x}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-71}}{3}$$

(durch Versetzung),

$$x = 4 \text{ oder } = -8; \quad x = \frac{-2\pm 2\sqrt{-71}}{9}$$

(durch Mult. mit 2 oder mit $\frac{2}{3}$).

Nr. 81. $\frac{35\frac{5}{7}}{\sqrt{x^4-9x^2}}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{7x}=\frac{19}{2x}.$

Auflösung. $250+x^2-9=\frac{133}{2}\sqrt{x^2-9}$ (durch Mult. mit $7x\sqrt{x^2-9}=7\sqrt{x^4-9x^2}$),

$x^2-9-\frac{133}{2}\sqrt{x^2-9}=250$ (durch Versetzung),

$x^2-9-\frac{133}{2}\sqrt{x^2-9}+(\frac{133}{4})^2=\frac{17689}{16}-250$ (d. Ergänzen des

$=\frac{13689}{16}$ Quadr. mit $(\frac{133}{4})^2$),

$\sqrt{x^2-9}-\frac{133}{4}=\pm\frac{117}{4}$ (d. Ausz d. Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x^2-9}=\frac{133\pm117}{4}$ (durch Versetzung),

$=\frac{125}{2}$ oder $=4$

$x^2-9=\frac{15625}{4}$ oder $=16$ (durch Erheben zum Quadrat),

$x^2=\frac{15661}{4}$ oder $=25$ (d. Vers.),

$x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{15661}$ oder $=\pm5$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

Anmerkung. Eine andere Lösung ergiebt sich durch Multiplikation mit $\frac{7x}{250\sqrt{x^2-9}}$ und Auflösung der hierdurch entstandenen Gleichung nach $\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$.

Beim Einsetzen der Wurzeln in die Hauptgleichung übersehe man nicht, dass $\sqrt{x^4-9x^2}=x\sqrt{x^2-9}$ ist.

Nr. 82. $3((x-1)^2-x)^2+2x=341+2(x-1)^2.$

Auflösung.

$3((x-1)^2-x)^2-2(x-1)^2+2x=341$ (durch Versetzung),

$((x-1)^2-x)^2-\frac{2}{3}((x-1)^2-x)=\frac{341}{3}$ (durch Division mit 3),

$((x-1)^2-x)^2-\frac{2}{3}((x-1)^2-x)+\frac{1}{9}=\frac{341}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1024}{9}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $\frac{1}{9}$),

$(x-1)^2-x-\frac{1}{3}=\pm\frac{32}{3}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$(x-1)^2-x=\frac{1\pm32}{3}$ (durch Versetzung),

$x^2-2x+1-x=11$ oder $=\frac{-31}{3}$ (durch Auflösen der Klammern),

$x^2-3x=10$ oder $=-\frac{34}{3}$

$x^2-3x+(\frac{3}{2})^2=10+\frac{9}{4}$ oder $=\frac{9}{4}-\frac{34}{3}$ (d. Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{3}{2})^2$),

$= \frac{49}{4}$ oder $= -\frac{109}{12}$

$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{7}{2}$ oder $= \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{103}{3}}$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel

$x = 5$ oder $= -2$ oder $= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{103}{3}}$ (d. Vers.

Anmerkung. Eine nur wenig verschiedene Auflösung ist folgende: $3[x^2 - 2x + 1 - x]^2 + 2x = 341 + 2(x^2 - 2x + 1)$ (durch Oeffnen der Klammer),

$3(x^2 - 3x + 1)^2 + 2x = 341 + 2x^2 - 4r + 2$

$3(x^2 - 3x + 1)^2 - 2x^2 + 6x - 2 = 341$ (durch Versetzung,

$(x^2 - 3x + 1)^2 - \frac{2}{3}(x^2 - 3x + 1) = \frac{341}{3}$ (durch Divis. mit 3)

woraus das Uebrige wie oben folgt.

Nr. 83. $x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x - \sqrt{x} = 6.$

Auflösung.

$x^2 - 2x\sqrt{x} + x + x - \sqrt{x} = 6$ (weil $2x = x + x$),

$(x - \sqrt{x})^2 + x - \sqrt{x} + (\frac{1}{2})^2 = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $\frac{1}{4}$),

$x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{5}{2}$ (durch Subtr. von $\frac{1}{4}$),

$= \frac{9}{4}$ oder $= -\frac{11}{4}$

$\sqrt{x} - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2}$ oder $= \pm \frac{1}{2}\sqrt{-11}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x} = 2$ oder $= -1$ oder $= \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$ (durch Versetzung),

$x = 4$ oder $= 1$ oder $= \frac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2}$ (durch Erheben ins Quadrat).

Nr. 84. $x^4 + \frac{13x^3}{3} - 39x = 81.$

Auflösung. $x^4 + \frac{13x^3}{3} = 39x + 81$ (durch Versetzung),

$x^4 + \frac{13x^3}{3} + (\frac{13}{6}x)^2 = (\frac{13}{6}x)^2 + 39x + 81$ (durch Ergänzung der Quadrate mit $(\frac{13}{6}x)^2$),

$x^2 + \frac{13}{6}x = \pm(\frac{13}{6}x + 9)$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel)

Entweder: $x^2 = 9$ (d. Weglassen d. gleichen Glieder)

$x = \pm 3$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel)

Oder: $x^2 + \frac{13}{3}x = -9$ (durch Versetzung),

$$x^2+\tfrac{13}{3}x+(\tfrac{13}{6})^2 = \tfrac{169}{36}-9 \text{ (d. Ergänzung des Quadr. mit } (\tfrac{13}{6})^2\text{)},$$
$$= \frac{-155}{36}$$
$$x+\tfrac{13}{6} = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt{-155} \text{ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel)},$$
$$x = \frac{-13\pm\sqrt{-155}}{6} \text{ (d. Versetzung)},$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$$x^4-81 = 39x-\frac{13x^3}{3} \text{ (durch Versetzung).}$$
$$(x^2+9)(x^2-9) = \frac{13x}{3}(9-x^2) \text{ (durch Zerlegung in Faktoren)},$$
$$x^2+9 = -\frac{13x}{3} \text{ (durch Division mit } x^2-9\text{)},$$
$$x^2+\frac{13x}{3} = -9 \text{ (durch Versetzung)},$$

woraus sich zwei Wurzeln der Gleichung leicht wie oben ergeben. Die beiden andern in dem Faktor $x^2-9=0$ enthaltenen ergeben sich auch direct durch folgende Zerlegung:

$$x^4+\tfrac{13}{3}x^3+9x^2 = 9x^2+39x+81 \text{ (durch Add. von } 9x^2\text{)},$$
$$x^2(x^2+\frac{13x}{3}+9) = 9(x^2+\frac{13x}{3}+9 \text{ (d. Zerlegung in Faktoren)},$$
$$x^2 = 9 \text{ (durch Division mit } x^2+\tfrac{13}{3}x+9\text{)},$$
$$x = \pm 3 \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).}$$

Nr. 85. $\dfrac{x^2+8}{6}-\dfrac{4x+6}{x^2} = \dfrac{8-\frac{2}{x^2}}{3}.$

Auflösung.

$$x^2+8-\frac{24}{x}+\frac{36}{x^2} = 16-\frac{4}{x^2} \text{ (durch Mult. mit 6)},$$
$$x^2+\frac{4}{x^2} = 8+\frac{24}{x}+\frac{36}{x^2} \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2-4+\frac{4}{x^2} = 4+\frac{24}{x}+\frac{36}{x^2} \text{ (durch Subtr. von 4)},$$
$$x-\frac{2}{x} = \pm\left(2+\frac{6}{x}\right) \text{ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel)},$$
$$x^2-2 = \pm(2x+6) \text{ (durch Mult. mit } x\text{)},$$
$$x^2-2x = 8 \text{ (durch Versetzung)} \qquad x^2+2x = -4$$
$$x^2-2x+1 = 9; \qquad x^2+2x+1 = -3$$
(durch Ergänzung des Quadrats mit 1),

$x-1 = \pm 3$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel) $x+1 = \pm\sqrt{-3}$

$x = 4$ oder $= -2$ (durch Versetzung) $x = -1 \pm \sqrt{-3}$

Anmerkung. Eine nur wenig verschiedene Auflösung ergiebt sich, wenn man mit $6x^2$ statt wie vorhin nur mit 6 multiplizirt.

Nr. 86. $$\sqrt{x} - \frac{8}{x} = \frac{7}{\sqrt{x}-2}.$$

Auflösung.

$x^2 - 8\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 16 = 7x$ [durch Mult. mit $x(\sqrt{x}-2)$],

$x^2 + x - 8\sqrt{x} - 8x + 16 = 2x\sqrt{x}$ (durch Versetzung und weil $7x = 8x - x$ ist),

$x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 8(x+\sqrt{x}) + 16 = 4x\sqrt{x}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $2x\sqrt{x}$),

$x + \sqrt{x} - 4 = \pm 2\sqrt[4]{x^3}$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel),

$x \mp 2\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} = 4$ (durch Versetzung),

$\sqrt{x} \mp \sqrt[4]{x} = \pm 2$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x} \mp 2 = \pm \sqrt[4]{x}$ (durch Versetzung),

$x \mp 4\sqrt{x} + 4 = \sqrt{x}$ (durch Erheben zum Quadr.),

$x - 5\sqrt{x} = -4$ (durch Versetzung) $x + 3\sqrt{x} = -4$

$x - 5\sqrt{x} + (\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$; $x + 3\sqrt{x} + (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4}$

(durch Ergänzung des Quadrats),

$\sqrt{x} - \frac{5}{2} = \pm \frac{3}{2}$; $\sqrt{x} + \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-7}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x} = 4$ oder $= 1$; $\sqrt{x} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$

(durch Versetzung),

$x = 16$ oder $= 1$; $x = \frac{1 \pm 3\sqrt{-7}}{2}$

(durch Erheben zum Quadrat).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$x - \frac{8}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + \frac{16}{x} = 7$ (durch Mult. mit $\sqrt{x} - 2$),

$x + 2\sqrt{x} - 7 - \frac{8}{\sqrt{x}} + \frac{16}{x} = 4\sqrt{x}$ (durch Add. von $4\sqrt{x} - 7$),

$(\sqrt{x}+1)^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) + \frac{16}{x} = 4\sqrt{x}$ (weil $-7 - \frac{8}{\sqrt{x}} = 1 - 8 - \frac{8}{\sqrt{x}}$
$= 1 - \frac{8}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)$ und
$x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x}+1)^2$ ist),

$\sqrt{x} + 1 - \frac{4}{\sqrt{x}} = \pm 2\sqrt[4]{x}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x} \mp 2\sqrt[4]{x} + 1 = \frac{4}{\sqrt{x}}$ (durch Versetzung),

$\sqrt[4]{x} \mp 1 = \pm\frac{2}{\sqrt[4]{x}}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

— —

$\sqrt[4]{x} \mp 1 = \frac{2}{\sqrt[4]{x}}$; $\qquad \sqrt[4]{x} \mp 1 = -\frac{2}{\sqrt[4]{x}}$

$\sqrt{x} \mp \sqrt[4]{x} = 2$ (d. Mult. mit $\sqrt[4]{x}$) $\qquad \sqrt{x} \mp \sqrt[4]{x} = -2$

$\sqrt{x} \mp \sqrt[4]{x} + (\frac{1}{2})^2 = 2 + \frac{1}{4}$ (durch $\qquad \sqrt{x} \mp \sqrt[4]{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - 2$

$= \frac{9}{4}$ Ergänz. des Quadr. mit $\frac{1}{4}$) $\qquad = -\frac{7}{4}$

$\sqrt[4]{x} \mp \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$; $\qquad \sqrt[4]{x} \mp \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-7}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt[4]{x} = \pm 2$ (durch Versetzung) $\qquad \sqrt[4]{x} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

oder $= \pm 1$; $\qquad$ oder $= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

$x = 16$ oder $= 1$; $\qquad x = \frac{1 \pm 3\sqrt{-7}}{2}$

(durch Erheben in die 4te Potenz).

Nr. 87. $\qquad 4x^4 + \frac{x}{2} = 4x^3 + 33.$

Auflösung. $4x^4 - 4x^3 + \frac{x}{2} = 33$ (durch Versetzung),

$4x^4 - 4x^3 + x^2 - x^2 + \frac{x}{2} = 33$ (weil $x^2 - x^2 = 0$),

$(2x^2 - x)^2 - \frac{1}{2}(2x^2 - x) + (\frac{1}{4})^2 = 33 + \frac{1}{16}$ (durch Ergänzung des Quadr. mit $\frac{1}{16}$),

$= \frac{529}{16}$

$2x^2 - x - \frac{1}{4} = \pm\frac{23}{4}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \pm\frac{23}{8}$ (durch Division mit 2),

$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \pm \frac{23}{8}$ (durch Add. von $\frac{3}{16}$),

$= \frac{49}{16}$ oder $= -\frac{43}{16}$

$x - \frac{1}{4} = \pm\frac{7}{4}$ oder $= \pm\frac{1}{4}\sqrt{-43}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = 2$ oder $= -\frac{3}{2}$ oder $= \frac{1 \pm \sqrt{-43}}{4}$

(durch Versetzung).

Anmerkung. Dividirt man die Hauptgleichung mit 4, ehe man

ihre Glieder versetzt, so erhält man durch den weitern, oben befolgten Gang einen Werth für $x^2 - \frac{x}{2}$.

Nr. 88. $$(x-2)^2 - 6x^{\frac{1}{2}}(x-2) = 24 - 14x + 15x^{\frac{1}{2}}.$$

Auflösung.

$$(x-2)^2 - 6x^{\frac{1}{2}}(x-2) + 14x - 15x^{\frac{1}{2}} = 24 \text{ (durch Vers.)},$$

$$(x-2)^2 - 6x^{\frac{1}{2}}(x-2) + 9x + 5x - 15x^{\frac{1}{2}} - 10 = 14 \text{ (d. Subtr. von 10 und weil } 14x = 9x + 5x \text{ ist)},$$

$$(x - 2 - 3x^{\frac{1}{2}})^2 + 5(x - 2 - 3x^{\frac{1}{2}}) + (\tfrac{5}{2})^2 = 14 + \tfrac{25}{4} = \tfrac{81}{4}$$
(durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{5}{2})^2$),

$$x - 2 - 3x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{5}{2} = \pm\tfrac{9}{2} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$x - 3x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{9}{4} = \tfrac{7}{4} \pm \tfrac{9}{2} \text{ (durch Add. von } \tfrac{7}{4}),$$
$$= \tfrac{25}{4} \text{ oder } = -\tfrac{11}{4}$$

$$x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2} = \pm\tfrac{5}{2} \text{ oder } = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-11} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$x^{\frac{1}{2}} = 4 \text{ oder } = -1 \text{ oder } = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$x = 16 \text{ oder } = 1 \text{ oder } = \frac{-1 \pm 3\sqrt{-11}}{2}$$
(durch Erheben zum Quadrat).

Nr. 89. $$(4x+1)^2 + 4x^{\frac{1}{2}}(4x+1) = 1912 - (10x + 3x^{\frac{1}{2}}).$$

Auflösung.

$$(4x+1)^2 + 4x^{\frac{1}{2}}(4x+1) + 10x + 3x^{\frac{1}{2}} = 1912 \text{ (durch Vers.)},$$

$$(4x+1)^2 + 4x^{\frac{1}{2}}(4x+1) + 4x + 6x + \tfrac{3}{2} + 3x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{3827}{2} \text{ (durch Add. von } \tfrac{3}{2} \text{ und weil } 10x = 4x + 6x),$$

$$(4x + 1 + 2x^{\frac{1}{2}})^2 + \tfrac{3}{2}(4x + 1 + 2x^{\frac{1}{2}}) + (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{3827}{2} + \tfrac{9}{16} = \tfrac{30625}{16}$$
(durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{3}{4})^2$),

$$4x + 1 + 2x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{4} = \pm\tfrac{175}{4} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$4x + 2x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4} = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{175}{4} \text{ (durch Subtraction von } \tfrac{3}{2}),$$
$$= \tfrac{169}{4} \text{ oder } = \frac{-181}{4}$$

$$2x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{13}{2} \text{ oder } = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-181} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$2x^{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 13}{2} \text{ oder } = \frac{-1 \pm \sqrt{-181}}{2} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = 3 \text{ oder } = -\tfrac{7}{2} \text{ oder } = \frac{-1 \pm \sqrt{-181}}{4} \text{ (d. Div. mit 2),}$$

$$x = 9 \text{ oder } = \tfrac{49}{4} \text{ oder } = \frac{-90 \pm \sqrt{-181}}{8} \text{ (durch Erheben ins Quadr.).}$$

Nr. 90. $$8x^2 - 13 = \frac{3x}{2} + \sqrt{6x^3 + 52x^2}.$$

Auflösung.

$$\frac{3x}{2} + 13 + \sqrt{6x^3 + 53x^2} = 8x^2 \text{ ((d. Vers. u. Mult. mit } -1\text{),}$$

$$\frac{3x}{2} + 13 + 2x\sqrt{\frac{3x}{2} + 13} + x^2 = 9x^2 \text{ (durch Add. von } x^2 \text{ und weil}$$

$$\sqrt{6x^3 + 52x^2} = \sqrt{4x^2\left(\frac{3x}{2} + 13\right)} = 2x\sqrt{\frac{3x}{2} + 13} \text{ ist),}$$

$$\sqrt{\frac{3x}{2} + 13} + x = \pm 3x \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),}$$

$$\sqrt{\frac{3x}{2} + 13} = 2x \text{ oder } = -4x \text{ (durch Vers.),}$$

$$\frac{3x}{2} + 13 = 4x^2 \text{ oder } = 16x^2 \text{ (durch Erheben ins Quadrat),}$$

$$4x^2 - \frac{3x}{2} = 13 \text{ (durch Vers.) } \quad 16x^2 - \frac{3x}{2} = 13$$

$$4x^2 - \frac{3x}{2} + (\tfrac{3}{8})^2 = 13 + \tfrac{9}{64}; \quad 16x^2 - \frac{3x}{2} + (\tfrac{3}{16})^2 = 13 + \tfrac{9}{256}$$

$$= \tfrac{841}{64} \qquad\qquad = \tfrac{3337}{256}$$

(durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{3}{8})^2$ oder mit $(\frac{3}{16})^2$),

$$2x - \tfrac{3}{8} = \pm \tfrac{29}{8}; \qquad 4x - \tfrac{3}{16} = \pm \tfrac{1}{16}\sqrt{3337}$$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$$2x = 4 \text{ oder } = -\tfrac{13}{4}; \qquad 4x = \frac{3 \pm \sqrt{3337}}{16}$$

(durch Versetzung),

$$x = 2 \text{ oder } = -\tfrac{13}{8}; \qquad x = \frac{3 \pm \sqrt{3337}}{64}$$

(durch Division mit 2 oder mit 4).

Anmerkung. Bei der Einsetzung des zweiten Wurzelpaares in die Hauptgleichung übersehe man nicht, dass $\sqrt{6x^3 + 52x^2} = 2x\sqrt{\frac{3x}{2} + 13} = 2x \,.\, -4x = -8x^2$ ist.

Nr. 91. $4x^2+21x+8x^{\frac{1}{2}}\sqrt{7x^2-5x} = 207-\frac{4x^2}{3}$.

Auflösung.

$12x^2+63x+24x\sqrt{7x-5} = 621-4x^2$ (d. Mult. mit 3 und weil $8x^{\frac{1}{2}}\sqrt{7x^2-5x} = 8x^{\frac{1}{2}}.\sqrt{x}.\sqrt{7x-5} = 8x\sqrt{7x-5}$ ist),

$16x^2+63x+24x\sqrt{7x-5} = 621$ (durch Versetzung),

$16x^2+24x\sqrt{7x-5}+63x-45 = 576$ (durch Subtr. von 45),

$4x+3\sqrt{7x-5} = \pm 24$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$3\sqrt{7x-5} = -4x\pm 24$ (durch Vers.),

$4x+3\sqrt{7x-5} = \pm 24$ (durch Vers.),

$7x+\frac{21}{4}\sqrt{7x-5} = \pm 42$ (durch Mult. mit $\frac{7}{4}$),

$7x-5+\frac{21}{4}\sqrt{7x-5}+(\frac{21}{8})^2 = \frac{121}{64}\pm 42$ (durch Add. von $(\frac{21}{8})^2-5 = \frac{121}{64}$),

$= \frac{2809}{64}$ oder $= \frac{-2567}{64}$

$\sqrt{7x-5}+\frac{21}{8} = \pm\frac{53}{8}$ oder $= \pm\frac{1}{8}\sqrt{-2567}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{7x-5} = 4$ oder $= -\frac{37}{4}$ oder $= \frac{-21\pm\sqrt{-2567}}{8}$ (durch Versetzung),

$7x-5 = 16$ oder $= \frac{1369}{16}$ oder $= \frac{-1063\mp 21\sqrt{-2567}}{32}$ (durch Erheben zum Quadrat),

$7x = 21$ oder $= \frac{1449}{16}$ oder $= \frac{-903\mp 21\sqrt{-2567}}{32}$ (durch Versetzung),

$x = 3$ oder $= \frac{207}{16}$ oder $= \frac{-129\mp 3\sqrt{-2567}}{32}$ (durch Division mit 7).

Anmerkung. Eine andere, kürzere Lösung ergiebt sich durch Quadrirung der Gleichung $3\sqrt{7x-5} = -4x\pm 24$, doch giebt sie keine Anhaltspunkte über das Zeichen von $8x^{\frac{1}{2}}\sqrt{7x^2-5x} = 8x\sqrt{7x-5}$.

Nr. 92. $\frac{2x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}} = 3\frac{7}{15}-3.\frac{2x-\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}}$.

Auflösung. $\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} = \frac{52}{15}-3.\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}$ (durch Division von Zähler und Nenner mit $\sqrt{x}$);

$$\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}\right)^2 = \tfrac{52}{15}\cdot\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} - 3 \text{ (durch Mult. mit } \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}\text{)},$$

$$\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}\right)^2 - \tfrac{52}{15}\cdot\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} = -3 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}\right)^2 - \tfrac{52}{15}\cdot\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} + (\tfrac{26}{15})^2 = \tfrac{676}{225} - 3 = \tfrac{1}{225} \text{ (durch Ergänz. des Quadr. mit } (\tfrac{26}{15})^2\text{)},$$

$$\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} - \tfrac{26}{15} = \pm\tfrac{1}{15} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} = \frac{26\pm1}{15} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$= \tfrac{9}{5} \text{ oder } \tfrac{5}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{x}}{2} = \tfrac{14}{4} \text{ oder } = \tfrac{8}{2} \text{ (weil wenn } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ist, auch } \frac{a+b}{a-c} = \frac{c+d}{c-d} \text{ ist)},$$

$$2\sqrt{x} = \tfrac{7}{2} \text{ oder } = 4$$

$$\sqrt{x} = \tfrac{7}{4} \text{ oder } = 2 \text{ (durch Division mit 2)},$$

$$x = \tfrac{49}{16} \text{ oder } = 4 \text{ (durch Erheben ins Quadrat).}$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Multiplikation mit $\frac{1}{5}\cdot\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}$ oder auch durch Multiplikation mit $15(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)$, welche letztere auf $x - \frac{15}{4}\sqrt{x} = -\frac{7}{2}$ führt.

Nr. 93. $a^2b^2 . x^{\frac{1}{n}} - 4 . (ab)^{\frac{3}{2}} . x^{\frac{m+n}{2mn}} = (a-b)^2 . x^{\frac{1}{m}}$.

Auflösung. $x^{\frac{m-n}{mn}} - \frac{4}{(ab)^{\frac{1}{2}}} . x^{\frac{m-n}{2mn}} = \left(\frac{a-b}{ab}\right)^2$ (durch Division mit $a^2b^2 . x^{\frac{1}{m}}$, indem dann $x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{m-n}{mn}}$ und $x^{\frac{m+n}{2mn}} : x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{m-n}{2mn}}$ ist),

$$x^{\frac{m-n}{mn}} - \frac{4}{(ab)^{\frac{1}{2}}} . x^{\frac{m-n}{2mn}} + \frac{4}{ab} = \frac{4}{ab} + \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2b^2} \text{ (d. Ergänz. des Quadr. mit } \frac{4}{ab}\text{)},$$

$$x^{\frac{m-n}{2mn}} - \frac{2}{(ab)^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{a+b}{ab} \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$x^{\frac{m-n}{2mn}} = \frac{2}{(ab)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{a+b}{ab} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$= \frac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{ab} \text{ oder } = -\frac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{ab},$$

$$= \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \text{ oder } = -\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)^2$$

$$x = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{4mn}{m-n}} \text{ oder } = \left(-\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)^2\right)^{\frac{2mn}{m-n}}$$

(durch Erheben in die $\frac{2mn}{m-n}$te Potenz).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Division mit $(a-b)^2 x^{\frac{1}{n}}$ und führt auf

$$x^{\frac{n-m}{mn}} + \frac{4(ab)^{\frac{3}{2}}}{(a-b)^2} x^{\frac{n-m}{2mn}} = \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2,$$

hieraus auf $$x^{\frac{n-m}{2mn}} + \frac{2.(ab)^{\frac{3}{2}}}{(a-b)^2} = \pm \frac{ab(a+b)}{(a-b)^2},$$

und endlich auf $$x^{\frac{n-m}{2mn}} = \frac{ab}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2} \text{ od.} = \frac{-ab}{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2}$$

oder: $$x = \left[\frac{ab}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2}\right]^{\frac{2mn}{n-m}} \text{ oder } = \left[-\frac{ab}{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2}\right]^{\frac{2mn}{n-m}}$$

(durch Erheben in die $\frac{2mn}{n-m}$te Potenz).

Die Gleichheit dieser Wurzeln mit den obigen ergiebt sich leicht, wenn man bedenkt, dass $\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2mn}{n-m}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{-\frac{2mn}{m-n}} = \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{2mn}{m-n}}$ ist.

Dividirt man die Hauptgleichung mit $x^{\frac{m+n}{2mn}}$, so ergiebt sich als dritte Auflösung:

$$a^2b^2 . x^{\frac{m-n}{2mn}} - 4 . (ab)^{\frac{3}{2}} = (a-b)^2 . x^{\frac{n-m}{mn}}.$$

Da die beiden in der Gleichung nun noch vorkommenden Potenzen der Unbekannten reciproke Werthe sind, so wird man die Gleichung entweder mit $x^{\frac{m-n}{2mn}}$ oder mit $x^{\frac{n-m}{2mn}}$ multipliziren, wodurch man alsdann auf obige zwei Gleichungen zurückkommt. Diese letzte Gleichung $a^2b^2 . x^{\frac{m-n}{2mn}} - 4 . (ab)^{\frac{3}{2}} = (a-b)^2 \cdot x^{\frac{n-m}{2mn}}$ wird für die Einsetzung der Wurzelwerthe in die Stammgleichung die vortheilhafteste sein.

Nr. 94. $\sqrt[2pq]{x^{p+q}} - \frac{1}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}\right) = 0.$

Auflösung.

$$2.\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\sqrt[2pq]{x^{p-q}} - 1 - \sqrt[pq]{x^{p-q}} = 0$$ (durch Division mit $\frac{1}{2}.\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.\sqrt[p]{x}$, indem dann $\sqrt[2pq]{x^{p+q}}:\sqrt[p]{x} = \sqrt[2pq]{x^{p+q}:x^{2q}} = \sqrt[2pq]{x^{p-q}}$ und $\sqrt[q]{x}:\sqrt[p]{x} = \sqrt[pq]{x^p:x^q} = \sqrt[pq]{x^{p-q}}$ wird),

$$\sqrt[pq]{x^{p-q}} - 2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.\sqrt[2pq]{x^{p-q}} = -1$$ (durch Versetzung und Mult. mit -1),

$$\sqrt[pq]{x^{p-q}} - 2.\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.\sqrt[2pq]{x^{p-q}} + \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2 = \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a^4-2a^2b^2+b^4} - 1$$ (d. Ergänz. des Quadr. mit $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2$),

$$= \frac{4a^2b^2}{a^4-2a^2b^2+b^4}$$

$$\sqrt[2pq]{x^{p-q}} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \pm\frac{2ab}{a^2-b^2}$$ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$$\sqrt[2pq]{x^{p-q}} = \frac{a^2\pm 2ab+b^2}{a^2-b^2}$$ (durch Versetzung),

$$= \frac{(a\pm b)^2}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{a+b}{a-b} \text{ oder } = \frac{a-b}{a+b}$$ (d. Div. von Zähler und Nenner mit $a\pm b$),

$$x^{p-q} = \left(\frac{a\pm b}{a\mp b}\right)^{2pq}$$ (d. Erheben in die $2pq$te Potenz);

$$x = \sqrt[p-q]{\left(\frac{a\pm b}{a\mp b}\right)^{2pq}}$$ (d. Ausz. der $p-q$ten Wurzel).

Anmerkung. Eine andere ähnliche Auflösung ist folgende:

$$2.\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\sqrt[2pq]{x^{q-p}} - \sqrt[pq]{x^{q-p}} - 1 = 0$$ (d. Div. mit $\sqrt[q]{x}$ wie oben),

$$\sqrt[pq]{x^{q-p}} - 2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.\sqrt[2pq]{x^{q-p}} = -1$$ (durch Versetzung und Mult. mit -1).

Verfährt man nun weiter wie oben, so erhält man dieselben Werthe:

$$\sqrt[2pq]{x^{q-p}} = \frac{a+b}{a-b} \text{ oder } = \frac{a-b}{a+b},$$

indem sowohl $\sqrt[2pq]{x^{q-p}}$ und $\sqrt[2pq]{x^{p-q}}$ als auch $\frac{a+b}{a-b}$ und $\frac{a-b}{a+b}$ reciproke Werthe sind.

Dividirt man die Hauptgleichung mit $\sqrt[2pq]{x^{p+q}}$, so ergiebt sich

$$1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\left(\sqrt[2pq]{x^{q-p}} + \sqrt[2pq]{x^{p-q}}\right) = 0,$$

und da die in dieser Gleichung noch vorkommenden Potenzen der Unbekannten reciproke Werthe sind, so wird man die Gleichung entweder mit $\sqrt[2pq]{x^{q-p}}$ oder mit $\sqrt[2pq]{x^{p-q}}$ multipliziren, wodurch man auch wieder auf obige beide Auflösungen zurückkömmt. Diese letzte Gleichung wird auch für Einsetzung der Wurzeln in die Stammgleichung die bequemste sein.

V. Abschnitt.

Unreine quadratische Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen.

Nr. 1.

$$\begin{cases} \text{I.} & x + 4y = 14 \\ \text{II.} & y^2 + 4x = 2y + 11. \end{cases}$$

Auflösung.

III. $x = 14 - 4y$ (aus I. durch Versetzung),

$y^2 + 56 - 16y = 2y + 11$ (durch Substit. von III. in II.),

$y^2 - 18y = -45$ (durch Versetzung),

$y^2 - 18y + 81 = 36$ (durch Ergänzung des Quadrats mit 81),

$y - 9 = \pm 6$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

*IV. $y = 15$ oder $= 3$ (durch Versetzung),

$x = 14 - 60$ oder $= 14 - 12$ (d. Substit. von IV. in III.),

*V. $= -46$ oder $= 2$.

Nr. 2.

$$\begin{cases} \text{I.} & 2x + 3y = 118 \\ \text{II.} & 5x^2 - 7y^2 = 4333. \end{cases}$$

Auflösung. $2x = 118 - 3y$ (aus I. d. Versetzung),

III. $x = 59 - \frac{3y}{2}$ (durch Division mit 2),

$17045 - 885y + \frac{45}{4}y^2 - 7y^2 = 4333$ (d. Substit. von III. in II.),

$\frac{17}{4}y^2 - 885y = -13072$ (durch Versetzung),

$y^2 - \frac{4}{17} \cdot 885y = -\frac{4}{17} \cdot 13072$ (durch Mult. mit $\frac{4}{17}$),

$$y^2 - \tfrac{4}{17}.885y + (\tfrac{2}{17}.885)^2 = \frac{4}{17^2}.783225 - \tfrac{4}{17}.13072 \text{ (durch Ergänz. d. Quadr. m. } (\tfrac{2}{17}.885)^2\text{)},$$

$$= \frac{4}{17^2}.561001$$

$$y - \tfrac{2}{17}.885 = \pm\tfrac{2}{17}.749 \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$y = \tfrac{2}{17}(885 \pm 749) \text{ (durch Versetzung)},$$

*IV. $$= \tfrac{3268}{17} \text{ oder } = 16$$

$$x = 59 - \tfrac{4902}{17} \text{ oder } = 59 - 24 \text{ (durch Substit. von IV. in III.)},$$

*V. $$= -\tfrac{3899}{17} \text{ oder } = 35.$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Substitution des Werthes $y = \frac{118}{3} - \frac{2x}{3}$ in II. und führt auf die Gleichung $x^2 + \frac{3304}{17}x = \frac{136465}{17}$.

Nr. 3.

I. $$\frac{2x+7y}{4x} = 2y - \frac{51+2x}{10}$$

II. $$\frac{4x+3y}{16} = y - 2.$$

Auflösung.

$$10x + 35y = 40xy - 102x - 4x^2 \text{ (aus I. d. Mult. mit } 20x\text{)},$$

III. $$112x + 35y = 40xy - 4x^2 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$4x + 3y = 16y - 32 \text{ (aus II. durch Mult. mit 16)},$$

IV. $$4x + 32 = 13y \text{ (durch Versetzung)},$$

V. $$\tfrac{4}{13}(x+8) = y \text{ (durch Division mit 13)},$$

$$112x + \tfrac{140}{13}x + \tfrac{1120}{13} = \tfrac{160}{13}x^2 + \frac{1280x}{13} - 4x^2 \text{ (d. Subst. v. V. in III.)},$$

$$\tfrac{1120}{13} = \tfrac{108}{13}x^2 - \tfrac{316}{13}x \text{ (durch Versetzung)},$$

$$x^2 - \tfrac{79}{27}x = \tfrac{280}{27} \text{ (durch Division mit } \tfrac{108}{13}\text{)},$$

$$x^2 - \frac{79}{27}x + \left(\frac{79}{54}\right)^2 = \frac{280}{27} + \frac{6241}{54^2} \text{ (d. Ergänz. d. Quadr. mit } (\tfrac{79}{54})^2\text{)},$$

$$= \frac{36481}{54^2}$$

$$x - \tfrac{79}{54} = \pm\tfrac{191}{54} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$x = \frac{79 \pm 191}{54} \text{ (durch Versetzung)},$$

*VI. $$= 5 \text{ oder } = -\tfrac{56}{27}$$

$$y = \tfrac{4}{13}(5+8) \text{ oder } = \tfrac{4}{13}(8 - \tfrac{56}{27}) \text{ (durch Substitution von VI. in V.)}.$$

*VII. $$= 4 \text{ oder } = \tfrac{640}{351}.$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Substitution des Werthes $x = \frac{13}{4}y - 8$ in III. und führt auf die Gleichung: $y^2 - \frac{2044}{351}y = -\frac{2560}{351}$.

Nr. 4.

$$\begin{cases} \text{I.} & \dfrac{4xy+3y-3}{5x} - 1 = \dfrac{4y+3x-2}{5} - \dfrac{18-x}{3} \\ \text{II.} & \dfrac{3x+y}{7} = \dfrac{3x-5y}{3} + 2 \end{cases}$$

Auflösung.

$12xy + 9y - 9 - 15x = 12xy + 9x^2 - 6x - 90x + 5x^2$ (aus I. durch Mult. mit $15x$),

III. $9y - 9 = 14x^2 - 81x$ (durch Weglassen der gleichen Glieder u. Vers.),

$9x + 3y = 21x - 35y + 42$ (aus II. durch Mult. mit 21),

IV. $38y = 12x + 42$ (durch Versetzen),

V. $y = \frac{3}{19}(2x+7)$ (durch Div. m. 38),

$\frac{54}{19}x + \frac{189}{19} - 9 = 14x^2 - 81x$ (durch Subst. von V. in III.),

$\frac{18}{19} = 14x^2 - \frac{1593}{19}$ (d. Versetzung),

$x^2 - \frac{1593}{266}x = \frac{18}{266}$ (durch Div. mit 14),

$x^2 - \frac{1593}{266}x + \left(\frac{1593}{532}\right)^2 = \frac{18}{266} + \frac{2537649}{532^2}$ (durch Ergänz.

$= \frac{2556801}{532^2}$ d. Quadr.m. $\left(\frac{1593}{532}\right)^2$),

$x - \frac{1593}{532} = \pm\frac{1599}{532}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{1593 \pm 1599}{532}$ (durch Vers.),

*VI. $= 6$ oder $= -\frac{3}{266}$

$y = \frac{3}{19}(12+7)$ od. $= \frac{3}{19}(7 - \frac{3}{133})$ (durch Subst. v. VI. in V.),

*VII. $= 3$ oder $= \frac{2784}{2527}$

Anmerkung. Man könnte auch aus IV. einen Werth für x suchen und ihn in III. einsetzen; es wäre dies aber ebenso wenig vortheilhaft als das bei der zweiten Auflösung der vorigen Aufgabe befolgte Verfahren, indem in der Gleichung III. ein einziges

mit y behaftetes Glied, dagegen 2 mit Potenzen von x behaftete Glieder vorkommen.

Nr. 5.

$$\begin{cases} \text{I.} & x^2 - y^2 = a^2 \\ \text{II.} & (x+y+b)^2 + (x-y+b)^2 = 2c^2 \end{cases}$$

Auflösung.

III. $y^2 = x^2 - a^2$ (aus I. durch Vers. und Mult. mit -1),

$$\begin{matrix} x^2+2xy+y^2+2bx+2by+b^2+x^2 \\ -2xy+y^2+2bx-2by+b^2 \end{matrix} = 2c^2$$ (aus II. durch Auflösen der Klammern),

$2x^2+2y^2+4bx = 2c^2-2b^2$ (d. Versetzung),

IV. $x^2+y^2+2bx = c^2-b^2$ (durch Div. mit 2),

$2x^2+2bx = a^2-b^2+c^2$ (d. Addit. von I. und IV.),

$x^2+bx = \frac{a^2-b^2+c^2}{2}$ (d. Div. mit 2),

$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2-b^2+c^2}{2}+\frac{b^2}{4}$ (d. Ergänz. d. Quadr. mit $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$= \frac{2a^2-b^2+2c^2}{4}$

$x+\frac{b}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2a^2-b^2+2c^2}$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel),

*V. $x = \frac{-b\pm\sqrt{2a^2-b^2+2c^2}}{2}$ (durch Versetzung),

$y^2 = \frac{b^2\mp2b\sqrt{2a^2-b^2+2c^2}+2a^2-b^2+2c^2}{4}-a^2$ (durch Substit. von V. in III),

$= \frac{c^2-a^2\mp b\sqrt{2a^2-b^2+2c^2}}{2}$

*VI. $y = \pm\sqrt{\frac{c^2-a^2\mp b\sqrt{2a^2-b^2+2c^2}}{2}}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

Anmerkung. Eine andere Aufsuchung von y ist folgende:

$2y^2+2bx = c^2-b^2-a^2$ (durch Subtraction von I. von IV.),

VII. $y^2 = \frac{c^2-b^2-a^2}{2} - bx$ (d. Versetzung u. Div. durch 2),

$= \frac{c^2-b^2-a^2}{2} + \frac{b^2 \mp b\sqrt{2a^2-b^2+2c^2}}{2}$ (d. Substit. von V. in VII.),

$= \frac{c^2-a^2 \mp b\sqrt{2a^2-b^2+2c^2}}{2}$

VIII. $y = \pm\sqrt{\frac{c^2-a^2 \mp b\sqrt{2a^2-b^2+2c^2}}{2}}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel).

Die durch einen Druckfehler in die Nagel'sche Bearbeitung aufgenommene Gleichung ist eine rein quadratische, die wir ihrer eleganten Form wegen hier beifügen.

IX. $x^2 - y^2 = a^2$

X. $(x+y+b)^2 + (x+y-b)^2 = 2c^2$

$(x+y)^2 + 2b.(x+y) + b^2 + (x+y)^2 - 2b(x+y) + b^2 = 2c^2$ (aus X. durch Auflösen der Klammern),

$2(x+y)^2 = 2c^2 - 2b^2$ (durch Versetzung),

$(x+y)^2 = c^2 - b^2$ (durch Division mit 2),

XI. $x+y = \pm\sqrt{c^2-b^2}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

XII. $x-y = \frac{\pm a^2}{\sqrt{c^2-b^2}}$ (durch Division von IX. durch XI.),

$2x = \pm\sqrt{c^2-b^2} \pm \frac{a^2}{\sqrt{c^2-b^2}}$ (d. Add. von XI. u. XII.),

XIII. $x = \pm\frac{a^2-b^2+c^2}{2\sqrt{c^2-b^2}}$ (durch Bringen auf gleiche Benennung und Div. mit 2),

$2y = \pm\sqrt{c^2-b^2} \mp \frac{a^2}{\sqrt{c^2-b^2}}$ (d. Subtr. von XII. v. XI.),

XIV. $y = \pm\frac{c^2-a^2-b^2}{2\sqrt{c^2-b^2}}$ (durch Bringen auf gleiche Benennung und Div. mit 2).

Nr. 6.

I. $(x^2+y):(x^2-y) = 9:7$
II. $(1+x^2):(y+4) = (5y+7):3y$.

Auflösung. $2x^2 : 2y = 16 : 2$ (weil sich die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz verhält, wie die Summe der beiden letzten zu ihrer Differenz).

$x^2 : y = 8 : 1$ (durch Division mit 2),

III. $x^2 = 8y$ (durch Bild. der gleichen Produkte).

$(1+8y):(y+4) = (5y+7):3y$ (d. Substit. von III. in II.).

$3y + 24y^2 = 5y^2 + 20y + 7y + 28$ (durch Bildung der Produkte),

$19y^2 - 24y = 28$ (durch Versetzung),

$y^2 - \frac{24}{19}y = \frac{28}{19}$ (durch Division mit 19),

$y^2 - \frac{24}{19}y + (\frac{12}{19})^2 = \frac{28}{19} + \frac{144}{361}$ (d. Ergänzung des Quadr. mit $(\frac{12}{19})^2$),

$= \frac{676}{361}$

$y - \frac{12}{19} = \pm \frac{26}{19}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$y = \frac{12 \pm 26}{19}$ (durch Versetzung),

*IV. $= 2$ oder $= -\frac{14}{19}$

$x^2 = 16$ oder $= -\frac{112}{19}$ (d. Substit. von IV. in III),

*V. $x = \pm 4$ oder $= \pm 4\sqrt{-\frac{7}{19}}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

Anmerkung. Ganz derselbe Gang ergiebt sich, wenn man aus III. den Werth $y = \frac{x^2}{8}$ sucht und in II. einsetzt; die sich ergebende Gleichung wird dann $x^4 - \frac{192}{19}x^2 = \frac{1792}{19}$ sein.

Nr. 7.

$$\begin{cases} \text{I.} & x^2 + 2x^3y = 441 - x^4y^2 \\ \text{II.} & xy = 3 + x. \end{cases}$$

Auflösung.

$x^2 + 2x^3y + x^4y^2 = 441$ (aus I. durch Versetzung),

III. $x + x^2y = \pm 21$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

IV. $x^2y = 3x + x^2$ (aus II. durch Multiplikation mit x),

$x^2 + 4x = \pm 21$ (durch Substitution von IV. in III.),

$x^2 + 4x + 4 = 25$ oder $= -17$ (d. Ergänz. des Quadr. mit 4),

$x + 2 = \pm 5$ oder $= \pm\sqrt{-17}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

*V. $x = 3$ oder $= -7$ oder $= -2 \pm \sqrt{-17}$ (durch Versetzung),

VI. $y = \frac{3+x}{3}$ (aus II. durch Division mit x),

$= \frac{3+3}{3}$ oder $= \frac{3-7}{-7}$ oder $= \frac{3-2\pm\sqrt{-17}}{-2\pm\sqrt{-17}}$ (durch Substitution von V. in VI.),

*VII. $= 2$ oder $= \frac{4}{7}$ oder $= \frac{5 \mp \sqrt{-17}}{7}$.

Nr. 8.

$$\begin{cases} \text{I.} & x^2 + 4y^2 = 256 - 4xy \\ \text{II.} & 3y^2 - x^2 = 39. \end{cases}$$

Auflösung. $x^2+4xy+4y^2 = 256$ (aus I. durch Versetzung),

III. $x+2y = \pm 16$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

IV. $x = -2y \pm 16$ (durch Versetzung),

$3y^2 - 4y^2 + 64y - 256 = 39$ (durch Substit. von IV. in II.),

$y^2 \mp 64y = -295$ (d. Vers. u. Mult. mit -1),

$y^2 \mp 64y + (32)^2 = 1024 - 295$ (d. Ergänz. des Quadr. mit $(32)^2$),

$= 729$

$y \mp 32 = \pm 27$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$y = \pm 32 \pm 27$ (durch Versetzung),

*V. $= \pm 59$ oder $= \pm 5$

$x = \mp 118 \pm 16$ oder $= \mp 10 \pm 16$ (durch Substit. von V. in IV.),

*VI. $= \mp 102$ oder $= \pm 6$.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Substitution des Werthes $y = \pm 8 - \frac{x}{2}$ in II. Man erhält hierdurch die Gleichung: $x^2 \pm 96x = 612$.

Eine fernere Auflösung ergiebt sich auch noch durch Substitution des Werthes $x = \pm\sqrt{3y^2-39}$ in I. Man erhält hierdurch die Gleichung $y^4 - 3506y^2 = -87025$ und hieraus $y^2 = 1753 \pm 1728$.

Endlich ergiebt sich noch eine weitere Auflösung durch Substitution des Werthes $y = \pm\sqrt{13+\frac{x^2}{3}}$ in I. Man erhält hiedurch die Gleichung $\frac{x^4}{9} - 1160x^2 = -41616$ und hieraus $\frac{x^2}{3} = 1740 \pm 1728$.

Aus den beiden letzten Lösungen ist aber nicht ersichtlich, dass $x = +102$ und $y = -59$, sowie $x = -102$ und $y = +59$, sowie $x = +6$ und $y = +5$, sowie $x = -6$ und $y = -5$ zusammengehören.

No. 9.

I. $(x+y)^2 - 3y = 28 + 3x$

II. $2xy + 3x = 35$

Auflösung. $(x+y)^2 - 3y - 3x = 28$ (aus I. durch Versetzung),

$(x+y)^2 - 3(x+y) + (\frac{3}{2})^2 = 28 + \frac{9}{4} = \frac{121}{4}$ (d. Ergänz. des Quadrats mit $(\frac{3}{2})^2$),

$x+y-\frac{3}{2} = \pm\frac{11}{2}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

III. $x+y = 7$ oder $= -4$ (durch Vers.),

IV. $y = 7-x$ oder $= -4-x$ (durch Versetzung),

$14x-2x^2+3x = 35$; $\quad -8x-2x^2+3x = 35$

(durch Substit. von IV. in II.),

$2x^2-17x = -35$; $\quad 2x^2+5x = -35$

(durch Mult. mit -1),

$x^2-\frac{17}{2}x = -\frac{35}{2}$; $\quad x^2+\frac{5x}{2} = -\frac{35}{2}$

(durch Division mit 2),

$x^2-\frac{17}{2}x+(\frac{17}{4})^2 = \frac{289}{16}-\frac{35}{2}$; $\quad x^2+\frac{5x}{2}+(\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}-\frac{35}{2}$

$= \frac{9}{16} \quad\quad = -\frac{255}{16}$

(durch Ergänz. d. Quad. m. $(\frac{17}{4})^2$ oder $(\frac{5}{4})^2$,

$x-\frac{17}{4} = \pm\frac{3}{4}$; $\quad x+\frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{-255}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

*V. $x = 5$ oder $= \frac{7}{2}$ $\quad x = \frac{-5\pm\sqrt{-255}}{4}$

(durch Versetzung),

$y = 7-5$ oder $= 7-\frac{7}{2}$; $y = -4+\frac{5\mp\sqrt{-255}}{4}$

(durch Substit. von V. in VI.),

*VI. $= 2$ oder $= \frac{7}{2}$; $\quad = \frac{-11\mp\sqrt{-255}}{4}$

Anmerkung. Aus III. kann man auch $x = 7-y$ oder $= -4-y$ suchen und diesen Werth in II. substituiren, wodurch sich dann $y^2-\frac{11}{2}y = -7$ oder $y^2+\frac{11}{2}y = -\frac{47}{2}$ ergiebt.

Nr. 10.

I. $(2x-4y)^2+(x-2y) = 5$
II. $x^2-y^2 = 8.$

Auflösung.

$(2x-4y)^2+\frac{2x-4y}{2}+(\frac{1}{4})^2 = 5+\frac{1}{16} = \frac{81}{16}$ (aus I. d. Ergänz. des Quadrats mit $(\frac{1}{4})^2$),

$2x-4y+\frac{1}{4} = \pm\frac{9}{4}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$2x-4y = 2$ oder $= -\frac{5}{2}$ (d. Versetzung),

III. $x-2y = 1$ oder $= -\frac{5}{4}$ (durch Div. mit 2),

IV. $x = 1+2y$ oder $= 2y-\frac{5}{4}$ (d. Vers.).

$1+4y+4y^2-y^2 = 8;$ $\qquad$ $4y^2-5y+\frac{25}{16}-y^2 = 8$

(durch Substitution von IV. in II.),

$3y^2+4y = 7$ (d. Versetzung) $3y^2-5y = \frac{103}{16}$

$y^2+\frac{4}{3}y = \frac{7}{3}$ (d. Div. mit 3) $y^2-\frac{5}{3}y = \frac{103}{48}$

$y^2+\frac{4}{3}y+(\frac{2}{3})^2 = \frac{7}{3}+\frac{4}{9};$ $\qquad$ $y^2-\frac{5}{3}y+(\frac{5}{6})^2 = \frac{103}{48}+\frac{25}{36}$

$= \frac{25}{9}$ $\qquad$ $= \frac{409}{144}$

(durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{2}{3})^2$ oder $(\frac{5}{6})^2$).

$y+\frac{2}{3} = \pm\frac{5}{3}$ $\qquad$ $y-\frac{5}{6} = \pm\frac{1}{12}\sqrt{409}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

*V. $\quad y = 1$ oder $= -\frac{7}{3};$ $\quad y = \dfrac{10\pm\sqrt{409}}{12}$

(durch Versetzung),

$x = 1+2$ oder $= 1-\frac{14}{3};$ $x = \dfrac{10\pm\sqrt{409}}{6}-\frac{5}{4}$

(d. Substit. von V. in IV.)

*VI. $\quad = 3$ oder $= -\frac{11}{3};$ $\quad = \dfrac{5\pm2\sqrt{409}}{12}.$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Substitution der Werthe $y = \dfrac{x-1}{2}$ oder $y = \dfrac{4x+5}{8}$ in II. M... erhält hierdurch die Gleichungen: $x^2+\frac{2}{3}x = 11$ u. $x^2-\frac{5}{6}x = \frac{5\ldots}{4\ldots}$

Nr. 11.

I. $\quad \frac{3}{4}\sqrt{x-y} = 1+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

II. $\quad \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} = 5.$

Auflösung. $x-y = \frac{4}{3}\sqrt{x-y}+\frac{4}{3}$ (aus I. durch Mult. mit $\frac{4}{3}\sqrt{x-y}$),

$x-y-\frac{4}{3}\sqrt{x-y} = \frac{4}{3}$ (durch Versetzung),

$x-y-\frac{4}{3}\sqrt{x-y}+(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{3}+\frac{4}{9} = \frac{16}{9}$ (d. Ergänzung des Quadr. mit $(\frac{2}{3})^2$),

$\sqrt{x-y}-\frac{2}{3} = \pm\frac{4}{3}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x-y} = \dfrac{2\pm4}{3}$ (durch Versetzung),

$= 2$ oder $= -\frac{2}{3}$

IV. $\quad x-y = 4$ oder $= \frac{4}{9}$ (d. Erheben ins Quadrat

V. $\quad \sqrt{x+y} = 5-\sqrt{x-y}$ (aus II. durch Versetzung

$= 3$ oder $= \frac{17}{3}$ (d. Substit. von III. in V.

VI. $\quad x+y = 9$ oder $= \frac{289}{9}$ (d. Erheben ins Quadr.

*VII. $x = \frac{13}{2}$ oder $= \frac{293}{18}$ (durch Add. von IV. und VI. und Div. durch 2),

*VIII. $y = \frac{5}{2}$ oder $= \frac{285}{18} = \frac{95}{6}$ (durch Subtr. von IV. von VI. und Division durch 2).

Nr. 12.

I. $x^2 + 10x + y = 119 - 2\sqrt{y}\,.\,(x+5)$

II. $x + 2y = 13$.

Auflösung.

$x^2 + 10x + y + 2\sqrt{y}\,.\,(x+5) = 119$ (aus I. durch Versetzung),

$x^2 + 10x + 25 + 2(x+5)\sqrt{y} + y = 144$ (durch Add. von 25),

$x + 5 + \sqrt{y} = \pm 12$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel),

III. $x + \sqrt{y} = 7$ oder $= -17$ (durch Vers.),

$2y - \sqrt{y} = 6$ oder $= 30$ (durch Subtr. von III. von II.),

$y - \frac{1}{2}\sqrt{y} = 3$ oder $= 15$ (durch Div. mit 2),

$y - \frac{1}{2}\sqrt{y} + (\frac{1}{4})^2 = 3 + \frac{1}{16}$ oder $= 15 + \frac{1}{16}$ (durch Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{1}{4})^2$),

$= \frac{49}{16}$ oder $= \frac{241}{16}$

$\sqrt{y} - \frac{1}{4} = \pm \frac{7}{4}$ oder $= \pm \frac{1}{4}\sqrt{241}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

IV. $\sqrt{y} = 2$ oder $= -\frac{3}{2}$ oder $= \frac{1 \pm \sqrt{241}}{4}$ (durch Versetzung),

*V. $y = 4$ oder $= \frac{9}{4}$ oder $= \frac{121 \pm \sqrt{241}}{8}$ (durch Erheben zum Quadrat),

VI. $x = 7 - \sqrt{y}$ oder $= -17 - \sqrt{y}$ (aus III. durch Versetzung),

$x = 7 - 2$ oder $= 7 + \frac{3}{2}$ oder $= -17 - \frac{1 \pm \sqrt{241}}{4}$ (durch Substitution von IV. in VI.),

*VII. $= 5$ oder $= \frac{17}{2}$ oder $= \frac{-69 \mp \sqrt{241}}{4}$.

Anmerkung. Die Werthe von x ergeben sich auch durch Substitution von V. in II.

Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Substitution der Werthe $\sqrt{y} = 7 - x$ oder $= -17 - x$ oder $y = 49 - 14x + x^2$ oder $= 289 + 34x + x^2$ in II. Man erhält hierdurch die Gleichung $x^2 - \frac{27}{2}x = -\frac{85}{2}$ oder $x^2 + \frac{69}{2}x = -\frac{565}{2}$.

Analoge Auflösungen wie die erste ergeben sich, wenn man den sich aus der zweiten Gleichung ergebenden Werth $x = 13-2y$ oder $y = \frac{13-x}{2}$ in die erste einsetzt und dann erst ordnet. Die erste Substitution führt auf die Gleichung:

$$(9-y)^2+(9-y)\sqrt{y}+\frac{y}{4} = 26,$$

die zweite hingegen auf die Gleichung:

$$(x+5)^2+2(x+5)\sqrt{\frac{13-x}{2}}+\frac{13-x}{2} = 144,$$

deren jede sich durch Radicirung weiter behandeln lässt.

Nr. 13.

$$\begin{cases} \text{I.} & \frac{x^4}{y^2}+\frac{2x^2}{y} = 9\frac{39}{49} \\ \text{II.} & x^2+y^2 = 65. \end{cases}$$

Auflösung.

$\frac{x^4}{y^2}+\frac{2x^2}{y}+1 = 10\frac{39}{49} = \frac{529}{49}$ (aus I. d. Ergänz. des Quadr. mit 1)

$\frac{x^2}{y}+1 = \pm\frac{23}{7}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\frac{x^2}{y} = -1\pm\frac{23}{7}$ (durch Versetzung),

III. $= \frac{16}{7}$ oder $= -\frac{30}{7}$

IV. $x^2 = \frac{16}{7}y$ oder $= -\frac{30}{7}y$ (durch Mult. mit y),

$\frac{16}{7}y+y^2 = 65$; $\quad y^2-\frac{30}{7}y = 65$

(durch Substit. von IV. in II.),

$y^2+\frac{16}{7}y+(\frac{8}{7})^2 = 65+\frac{64}{49}$; $\quad y^2-\frac{30}{7}y+(\frac{15}{7})^2 = 65+\frac{225}{49}$

$= \frac{3249}{49}$ $\quad = \frac{3410}{49}$.

(durch Ergänzung des Quadr. mit $(\frac{8}{7})^2$ oder $(\frac{15}{7})^2$),

$y+\frac{8}{7} = \pm\frac{57}{7}$; $\quad y-\frac{15}{7} = \pm\frac{1}{7}\sqrt{3410}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

*V. $y = 7$ oder $= -\frac{65}{7}$; $\quad y = \frac{15\pm\sqrt{3410}}{7}$

(durch Versetzung),

$x^2 = \frac{16}{7}.7$ od. $= -\frac{16}{7}.\frac{65}{7}$; $\quad x^2 = -\frac{30}{7}\left(\frac{15+\sqrt{3410}}{7}\right)$

$= 16$ oder $= -\frac{16.65}{49}$ $\quad = -\frac{30}{49}(15\pm\sqrt{3410})$

(durch Substitution von V. in IV.),

*VI. $x = \pm 4$ oder $= \pm\frac{4}{7}\sqrt{-65}$; $\quad x = \pm\frac{1}{7}\sqrt{-450\mp 30\sqrt{3410}}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

Anmerkung. Aus III. ergiebt sich auch $y = \frac{7}{16}x^2$ oder $= -\frac{7}{30}x^2$ oder $y^2 = \frac{49}{256}x^4$ oder $= \frac{49}{900}x^4$ und durch Substitution dieses letzten Werthes in II. ergiebt sich: $\frac{49}{256}x^4 + x^2 = 65$ oder $\frac{49}{900}x^4 + x^2 = 65$ und hieraus $\frac{7}{16}x^2 + \frac{8}{7} = \pm\frac{57}{7}$ oder $\frac{7}{30}x^2 + \frac{15}{7} = \pm\frac{1}{7}\sqrt{3410}$.

Nr. 14.

$$\begin{cases} \text{I.} & x+y+\sqrt{x+y} = 6 \\ \text{II.} & x^2+y^2 = 10. \end{cases}$$

Auflösung.

$x+y+\sqrt{x+y}+(\frac{1}{2})^2 = 6+\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$ (aus I. durch Ergänzung des Quadr. mit $\frac{1}{4}$),

$\sqrt{x+y}+\frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x+y} = \frac{-1\pm5}{2}$ (durch Versetzung),

$= 2$ oder $= -3$

III. $x+y = 4$ oder $= 9$ (d. Erheben zum Quadr.),

IV. $x^2+2xy+y^2 = 16$ oder $= 81$ (d. Erheben zum Quadr.),

V. $2x^2+2y^2 = 20$ (aus II. durch Mult. mit 2),

$x^2-2xy+y^2 = 4$ oder $= -61$ (d. Subtr. von IV. von V),

VI. $x-y = \pm2$ oder $= \pm\sqrt{-61}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

*VII. $x = 3$ oder $= 1$ oder $= \frac{9\pm\sqrt{-61}}{2}$ (durch Add. von III. und VI. und Div. durch 2),

*VIII. $y = 1$ oder $= 3$ oder $= \frac{9\mp\sqrt{-61}}{2}$ (durch Subtr. von VI. von III. und Div. durch 2).

Anmerkung. Aus III. ergiebt sich auch $x = 4-y$ oder $= 9-y$ und durch Substitution in II. $y^2-4y = -3$ oder $y^2-9y = -\frac{71}{2}$. Derselbe Gang ergiebt sich, wenn man $y = 4-x$ oder $= 9-x$ in II. substituirt; man erhält hierdurch die Gleichungen: $x^2-4x = -3$ oder $x^2-9x = -\frac{71}{2}$.

Nr. 15.

$$\begin{cases} \text{I.} & x^2+4\sqrt{x^2+3y+5} = 55-3y \\ \text{II.} & 6x-7y = 16. \end{cases}$$

Auflösung.

$x^2+3y+4\sqrt{x^2+3y+5} = 55$ (aus I. durch Versetzung),

$x^2+3y+5+4\sqrt{x^2+3y+5}+4 = 64$ (d. Add. von $5+4=9$),

$\sqrt{x^2+3y+5}+2 = \pm8$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$$\sqrt{x^2+3y+5} = 6 \text{ oder } = -10 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$x^2+3y+5 = 36 \text{ oder } = 100 \text{ (d. Erheben zum Quadr.}$$

III. $$x^2+3y = 31 \text{ oder } = 95 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$6x-16 = 7y \text{ (aus II. durch Versetzung)},$$

IV. $$y = \frac{6x-16}{7} \text{ (durch Division mit 7)},$$

$$x^2+\frac{18x-48}{7} = 31 \text{ oder } = 95 \text{ (d. Substit. von IV. in III.}$$

$$x^2+\frac{18x}{7} = \frac{265}{7} \text{ oder } = \frac{713}{7} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$x^2+\frac{18x}{7}+\left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{265}{7}+\frac{81}{49} \text{ oder } = \frac{713}{7}+\frac{81}{49} \text{ (durch Ergän}$$

$$= \tfrac{1936}{49} \text{ oder } = \tfrac{5072}{49} \text{ des Quadr mit } (\tfrac{9}{7})^2)$$

$$x+\tfrac{9}{7} = \pm\tfrac{44}{7} \text{ oder } = \pm\tfrac{4}{7}\sqrt{317} \text{ (durch Auszieh}$$

der Qu.-Wurzel),

*V. $$x = 5 \text{ oder } = -\tfrac{53}{7} \text{ oder } = \frac{-9\pm4\sqrt{317}}{7}$$

(durch Versetzung),

$$y = \frac{30-16}{7} \text{ oder } = \frac{-\frac{318}{7}-16}{7} \text{ oder } = \frac{\frac{-54\pm24\sqrt{317}}{7}-16}{7}$$

*VI. $$= 2 \text{ od. } = -\tfrac{430}{7} \text{ od. } = \frac{-166\pm24\sqrt{3\ldots}}{49}$$

(durch Substit. von V. in IV.).

Anmerkung. Man kann auch y aus III. suchen und in IV. su stituiren, oder auch x aus II. suchen und in III. einsetzen. D erste dieser beiden Verfahren führt auf die oben behandelt Gleichungen, das zweite ist wegen des dabei nothwendigen Qu drirens eines Binoms unvortheilhaft.

Nr. 16.

I. $$x^2+3x+y = 73-2xy$$

II. $$y^2+3y+x = 44.$$

Auflösung.

III. $$x^2+3x+y+2xy = 73 \text{ (aus I. durch Versetzung)},$$

$$x^2+2xy+y^2+4x+4y = 117 \text{ (durch Add. von II. und III.)},$$

$$(x+y)^2+4(x+y)+4 = 121 \text{ (durch Ergänzen des Quadr. mit 4}$$

$$x+y+2 = \pm 11 \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel}$$

IV. $x+y = 9$ oder $= -13$ (durch Versetzung),

$y^2+2y = 35$ oder $= 57$ (durch Subtr. von IV. von II.),

$y^2+2y+1 = 36$ oder $= 58$ (d. Ergänz. des Quadr. mit 1),

$y+1 = \pm 6$ oder $= \pm\sqrt{58}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

*V. $y = 5$ oder $= -7$ oder $= -1\pm\sqrt{58}$ (d. Vers.),

VI. $x = 9-y$ oder $= -13-y$ (aus IV. durch Vers.),

*VII. $= 4$ oder $= 16$ oder $= -12\pm\sqrt{58}$ (d. Substit. von V. in VI.).

Nr. 17.

I. $$\frac{y}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{x+y}}{y} = \frac{17}{4\sqrt{x+y}}$$

II. $$x = y^2+2.$$

Auflösung. $$\frac{y^2}{(x+y)^2}+1 = \frac{17}{4}\cdot\frac{y}{x+y}$$ (aus I. durch Mult. mit $\frac{y}{\sqrt{x+y}}$),

$$\left(\frac{y}{x+y}\right)^2-\frac{17}{4}\cdot\frac{y}{x+y} = -1$$ (durch Versetzung),

$$\left(\frac{y}{x+y}\right)^2-\frac{17}{4}\cdot\frac{y}{x+y}+\left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{289}{64}-1 = \frac{225}{64}$$ (durch Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{17}{8})^2$),

$$\frac{y}{x+y}-\frac{17}{8} = \pm\frac{15}{8}$$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$$\frac{y}{x+y} = \frac{17\pm 15}{8}$$ (durch Versetzung),

$$= 4 \text{ oder } = \tfrac{1}{4}$$

$$y = 4x+4y \text{ oder } = \frac{x}{4}+\frac{y}{4}$$ (durch Mult. mit $x+y$),

III. $$x = -\tfrac{3}{4}y \text{ oder } = 3y$$ (durch Vers. und Division mit 4 oder $\frac{1}{4}$),

$-\frac{3}{4}y = y^2+2$; $\quad 3y = y^2+2$

(durch Substitution von III. in II.),

$y^2+\frac{3}{4}y = -2$ (d. Vers.) $\quad y^2-3y = -2$

$y^2+\frac{3}{4}y+(\frac{3}{8})^2 = \frac{9}{64}-2$; $\quad y^2-3y+(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}-2$

$= \frac{-119}{64}$; $\quad = \frac{1}{4}$

(durch Ergänzung des Quadrats mit $(\frac{3}{8})^2$ oder mit $(\frac{3}{2})^2$),

$y+\frac{3}{8} = \pm\frac{1}{8}\sqrt{-119}$; $\quad y-\frac{3}{2} = \pm\frac{1}{2}$

(d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

*IV. $y = \frac{-3 \pm \sqrt{-119}}{8}$; $y = 2$ oder $= 1$

(durch Versetzung),

$x = -\frac{3}{4} \cdot \frac{-3 \pm \sqrt{-119}}{8}$; $x = 3.2$ od. $= 3$.

*V. $= \frac{9 \mp 3\sqrt{-119}}{32}$; $= 6$ oder $= 3$

(durch Substit. von IV. in III.).

Anmerkung. Die Werthe von x ergeben sich auch durch Substitution von IV. in II. oder auch direct, wenn man aus I $y = -\frac{4}{3}x$ oder $= \frac{x}{3}$ sucht und in II. substituirt. Man erhält alsdann die Gleichungen $\frac{16}{9}x^2 - x = -2$ oder $\frac{x^2}{9} - x = -2$.

Auch lässt sich die Gleichung III. aus I. durch Multiplikation mit $\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{y}$ oder mit $y(x+y)^{\frac{3}{2}}$ finden. Im ersten Fall erhält man $\left(\frac{x+y}{y}\right)^2 - \frac{17}{4} \cdot \frac{x+y}{y} = -1$ und hieraus $\frac{x+y}{y} = \frac{17 \pm 1}{8}$. Im zweiten Fall erhält man $x^2 - \frac{9}{4}xy = \frac{9}{4}y^2$ und hieraus $\frac{x}{y} = \frac{9 \pm 15}{8}$. Siehe übrigens Nr. 70 des IV. Abschnitts.

Nr. 18.

I. $y - y^{\frac{1}{2}} = 16 - x$

II. $28 - y = x + 4x^{\frac{1}{2}}$.

Auflösung.

III. $28 - y^{\frac{1}{2}} = 16 + 4x^{\frac{1}{2}}$ (durch Add. von I. und II.

IV. $12 - 4x^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$ (durch Versetzung),

V. $144 - 96x^{\frac{1}{2}} + 16x = y$ (durch Erheben ins Quadrat),

$28 - 144 + 96x^{\frac{1}{2}} - 16x = x + 4x^{\frac{1}{2}}$ (d. Substit. von V. in II.),

$-116 = 17x - 92x^{\frac{1}{2}}$ (durch Versetzung),

$x - \frac{92}{17} \cdot x^{\frac{1}{2}} = -\frac{116}{17}$ (durch Division mit 17),

$x - \frac{92}{17}x^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{46}{17}\right)^2 = \frac{2116}{17^2} - \frac{116}{17}$ (durch Ergänzen des Quadr. mit $(\frac{46}{17})^2$),

$= \frac{144}{17^2}$

$x^{\frac{1}{2}} - \frac{46}{17} = \pm \frac{12}{17}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x^{\frac{1}{2}} = \frac{46 \pm 12}{17}$ (durch Versetzung),

VI. $= \frac{58}{17}$ oder $= 2$

*VII. $x = \frac{3364}{289}$ oder $= 4$ (durch Erheben ins Quadrat),

$y^{\frac{1}{2}} = 12 - \frac{232}{17}$ oder $= 12 - 8$ (d. Substit. von VI. in IV.),

$= -\frac{28}{17}$ oder $= 4$

*VIII. $y = \frac{784}{289}$ oder $= 16$ (durch Erheben ins Quadrat).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Substitution des Werthes $x^{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{y^{\frac{1}{2}}}{4}$ oder $x = 9 - \frac{3y^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{y}{16}$ in I. Man erhält hierdurch die Gleichung: $y - \frac{40}{17}y^{\frac{1}{2}} = \frac{112}{17}$.

Nr. 19.

I. $x^4 + y^4 = 97$

II. $x + y = 5.$

Auflösung.

III. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 625$ (aus II. durch Erheben zur 4ten Potenz),

IV. $4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = 528$ (d. Subtr. von I. von III.),

V. $x^2 + 2xy + y^2 = 25$ (aus II. durch Erheben zum Quadrat),

VI. $4x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3 = 100xy$ (d. Mult. mit $4xy$),

$2x^2y^2 = 100xy - 528$ (durch Subtr. von IV. von VI.),

$2x^2y^2 - 100xy = -528$ (durch Versetzung),

$x^2y^2 - 50xy = -264$ (durch Div. mit 2),

$x^2y^2 - 50xy + (25)^2 = 361$ (durch Ergänzung des Quadrats mit 625),

$xy - 25 = \pm 19$ (d. Ausz. der Qu.-Wurz),

VII. $xy = 44$ oder $= 6$ (d. Versetzung),

VIII. $4xy = 176$ od. $= 24$ (d. Mult. mit 4),

$x^2 - 2xy + y^2 = -151$ oder $= 1$ (d. Subtr. von VIII. von V.),

IX. $x - y = \pm\sqrt{-151}$ oder $= \pm 1$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

*X. $x = \frac{5 \pm \sqrt{-151}}{2}$ oder $= 3$ oder $= 2$ (durch Add. von II. u. IX. und Div. durch 2),

*XI. $y = \frac{5 \mp \sqrt{-151}}{2}$ oder $= 2$ oder $= 3$ (d. Subtr. von IX. von II. und Div. durch 2 oder durch Substit. von X. in II. od. IX.).

Anmerkung. Eine andere, umständlichere Lösung ist folgend

II. $x+y = 5$

XII. $x-y = d$

XIII. $x = \frac{5+d}{2}$ | durch Addition und Subtr. v

XIV. $y = \frac{5-d}{2}$ | II. u. XII. und Div. mit 2,

$\frac{1250+300d^2+2d^4}{16} = 97$ (d. Substit. von XIII. u. XIV. in I.

$d^4+150d^2 = 151$

$d^2 = -75 \pm 76$

$= 1$ oder $= -151$

XV. $d = x-y = \pm 1$ oder $= \pm\sqrt{-151}$.

Aus XV. und II. ergiebt sich das Weitere wie oben.

Nr. 20.

I. $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2$

II. $x^2 - 18 = 4(4y-9)$.

Auflösung. $\frac{3x-2y}{2x}+1 = 2\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}$ (durch M mit $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}$

$\frac{3x-2y}{2x} - 2\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+1 = 0$ (durch Versetzung),

$\pm\left[\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} - 1\right] = 0$ (d. Ausz. der Qu.-Wurze

$\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = 1$ (durch Versetzung),

$\frac{3x-2y}{2x} = 1$ (d. Erheben zum Quadr.

$3x-2y = 2x$ (durch Mult. mit $2x$),

III. $x = 2y$ (durch Versetzung),

$4y^2-18 = 8y^2-18y$ (durch Substit. v III. in II.),

$-18 = 4y^2-18y$ (d. Versetzung).

$y^2 - \frac{9}{2}y = -\frac{9}{2}$ (durch Division mit 4

$y^2 - \frac{9}{2}y + (\frac{9}{4})^2 = \frac{81}{16} - \frac{9}{2} = \frac{9}{16}$ (durch Ergän des Quadrats mit $(\frac{9}{4})^2$),

$y - \frac{9}{4} = \pm \frac{3}{4}$ (durch Ausziehen der Quadrat-Wurzel),

*IV. $y = 3$ oder $= \frac{3}{2}$ (durch Versetzung),

*V. $x = 6$ oder $= 3$ (durch Substit. von IV. in III.).

Anmerkung. Andere Auflösungen ergeben sich durch Multiplikation mit $\sqrt{2x}.\sqrt{3x-2y}$ oder mit $\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}$ und führen sämmtlich auf dasselbe Resultat wie oben.

Eine weitere Auflösung ist folgende:

$$\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} - 2 + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 0 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\pm\left[\sqrt[4]{\frac{3x-2y}{2x}} - \sqrt[4]{\frac{2x}{3x-2y}}\right] = 0 \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$\sqrt[4]{\frac{3x-2y}{2x}} = \sqrt[4]{\frac{2x}{3x-2y}} \text{ (d. Versetzung)},$$

$$\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} \text{ (d. Erheben zum Quadrat)},$$

$$3x - 2y = 2x \text{ (d. Mult. mit } \sqrt{2x}.\sqrt{3x-2y}),$$

wonach das Weitere wie oben folgt.

Erhebt man die Gleichung: $\sqrt[4]{\frac{3x-2y}{2x}} = \sqrt[4]{\frac{2x}{3x-2y}}$ zur 4ten Potenz, so ergiebt sich:

$$\frac{3x-2y}{2x} = \frac{2x}{3x-2y}$$

$$(3x-2y)^2 = 4x^2 \text{ [durch Mult. mit } 2x(3x-2y)],$$

$$3x - 2y = 2x \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)}.$$

Der Werth $3x - 2y = -2x$ oder $5x = 2y$ gilt hier nicht, indem für denselben zwar allerdings $\sqrt[4]{\frac{3x-2y}{2x}} = \sqrt[4]{\frac{2x}{3x-2y}}$ wird, aber die Hauptgleichung unmöglich ist, indem $\sqrt{-1} + \sqrt{-1} = 2$ sein müsste.

Nr. 21.

I. $x + 4\sqrt{x} + 4y = 21 + 4\sqrt{xy} + 8\sqrt{y}$

II. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6.$

Auflösung.

$$x + 4y - 4\sqrt{xy} + 4\sqrt{x} - 8\sqrt{y} = 21 \text{ (aus I. d. Versetzung)},$$

$$(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})^2 + 4(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) + 4 = 25 \text{ (durch Ergänzen des Quadr. mit 4)},$$

$\sqrt{x} - 2\sqrt{y} + 2 = \pm 5$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

III. $\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 3$ oder $= -7$ (durch Versetzung),

$3\sqrt{y} = 3$ oder $= 13$ (durch Subtr. von III. von II.)

IV. $\sqrt{y} = 1$ oder $= \frac{13}{3}$ (durch Division mit 3),

*V. $y = 1$ oder $= \frac{169}{9}$ (durch Erheben zum Quadr.

VI. $\sqrt{x} = 6 - \sqrt{y}$ (aus II. durch Versetzung),

$= 5$ oder $= \frac{5}{3}$ (durch Substit. von IV. in VI.

*VII. $x = 25$ oder $= \frac{25}{9}$ (durch Erheben zum Quadr.

Nr. 22.

I. $3x + \frac{2}{3}\sqrt{xy^2 + 9x^2y} = (x - \frac{1}{3})y$

II. $(6x + y) : y = (x + 5) : 3.$

Auflösung.

$9x + 2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{y + 9x} = 3xy - y$ (aus I. durch Mult. mit 3

$y + 9x + 2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{y + 9x} = 3xy$ (durch Versetzung),

$y + 9x + 2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{y + 9x} + xy = 4xy$ (d. Ergänz. des Quadr. mit xy

$\sqrt{y + 9x} + \sqrt{xy} = \pm 2\sqrt{xy}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel

$\sqrt{y + 9x} = \sqrt{xy}$ oder $= -3\sqrt{xy}$ (d. Vers.),

III. $y + 9x = xy$ oder $= 9xy$ (durch Erheben zum Quadrat),

IV. $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$ oder $= 9$ (durch Div. mit xy

$18x + 3y = xy + 5y$ (aus II. durch Bildung der gleichen Produkte),

V. $18x - 2y = xy$ (durch Versetzung),

VI. $\frac{9}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ (durch Division mit $2xy$),

$\frac{18}{y} = \frac{3}{2}$ oder $= \frac{19}{2}$ (d. Add. von IV. u. VI.

*VII. $y = 12$ oder $= \frac{36}{19}$ (durch Mult. mit 2 und Division mit 3 oder 19),

$\frac{2}{x} = \frac{1}{2}$ oder $= \frac{17}{2}$ (d. Subtr. von VI. v. IV.

*VIII. $x = 4$ oder $= \frac{4}{17}$ (d. Mult. mit $2x$ und Division mit 1 oder 17).

Anmerkung. Die beiden Unbekannten lassen sich auf folgende Weise auch aus den Gleichungen III. und V. finden.

$9x = (x - 1)y$ oder $= (9x - 1)y$ (aus III. d. Versetzung

IX. $y = \frac{9x}{x - 1}$ oder $= \frac{9x}{9x - 1}$ (durch Division mit $x - 1$ oder mit $9x - 1$),

$18x = (x+2)y$ (aus V. durch Versetzung),

X. $y = \frac{18x}{x+2}$ (durch Division mit $x+2$),

$\frac{18x}{x+2} = \frac{9x}{x-1}$ oder $= \frac{9x}{9x-1}$ (d. Gleichsetzung v. IX. u. X.),

$\frac{2}{x+2} = \frac{1}{x-1}$ oder $= \frac{1}{9x-1}$ (durch Division mit $9x$),

$x+2 = 2x-2$ oder $= 18x-2$ [durch Mult. mit $(x+2)(x-1)$ oder mit $(x+2)(9x-1)$],

$4 = x$ oder $= 17x$ (durch Versetzung),

$x = 4$ oder $= \frac{4}{17}$

$y = 12$ oder $= \frac{36}{19}$ (d. Substit. von XI. in IX. oder X.).

Auch ergeben sich aus der Gleichsetzung der Werthe von xy aus III. und V. die Werthe: $y = 3x$ oder $= \frac{153}{19}x$, die sich nun in einer dieser beiden Gleichungen einsetzen lassen.

Bei der Einsetzung der Wurzeln in die Hauptgleichung übersehe man nicht, dass $\sqrt{xy^2 + 9x^2y}$ im zweiten Fall $= \sqrt{xy}\,.\,\sqrt{y+9x} = \sqrt{xy}\,.\,-3\sqrt{xy} = -3xy = -\frac{12.36}{17.19}$ ist.

Nr. 28.

I. $x+y = 5$

II. $(x^2+y^2)(x^3+y^3) = 455.$

Auflösung.

$(x^2+y^2).(x^2-xy+y^2) = 91$ (d. Div. von II. durch I.),

III. $x^4-x^3y+2x^2y^2-xy^3+y^4 = 91$ (d. Auflösen der Klamm.),

IV. $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = 625$ (aus I. durch Erheben zur 4ten Potenz),

V. $5x^3y+4x^2y^2+5xy^3 = 534$ (d. Subtr. von III. v. IV.),

VI. $x^2+2xy+y^2 = 25$ (aus I. durch Erheben zum Quadrat),

VII. $5x^3y+10x^2y^2+5xy^3 = 125xy$ (d. Mult. mit $5xy$),

$6x^2y^2 = 125xy - 534$ (durch Subtr. von V. von VII.),

$6x^2y^2 - 125xy = -534$ (durch Versetzung),

$x^2y^2 - \frac{125}{6}xy = -\frac{534}{6}$ (durch Div. mit 6),

$x^2y^2 - \frac{125}{6}xy + (\frac{125}{12})^2 = \frac{15625}{144} - \frac{534}{6}$ (d. Ergänz. $= \frac{2809}{144}$ des Quadr. m. $(\frac{125}{12})^2$),

$xy - \frac{125}{12} = \pm\frac{53}{12}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$$xy = \frac{125 \pm 53}{12} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$= \tfrac{89}{6} \text{ oder } = 6$$

VIII. $4xy = \frac{178}{3}$ oder $= 24$ (durch Mult. mit 4),

$x^2 - 2xy + y^2 = -\frac{103}{3}$ oder $= 1$ (durch Subtr. von VIII. von VI.),

IX. $x - y = \pm\sqrt{-\frac{103}{3}}$ oder $= \pm 1$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

*X. $x = \frac{5 \pm \sqrt{-\frac{103}{3}}}{2}$ oder $= 3$ oder $= 2$ (durch Add. von I. und IX. und Div. mit 2),

*XI. $y = \frac{5 \mp \sqrt{-\frac{103}{3}}}{2}$ oder $= 2$ oder $= 3$ (durch Subtr. von IX. von I. und Div. mit 2).

Anmerkung. Die Auflösung kann auch auf folgende Weise geschehen:

XII. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = 3125$ (aus I. d. Erheben zur 5ten Potenz),

XIII. $x^5 + x^3y^2 + x^2y^3 + y^5 = 455$ (aus II. durch Auflösen der Klammern),

XIV. $5x^4y + 9x^3y^2 + 9x^2y^3 + 5xy^4 = 2670$ (durch Subtr. von XIII. von XII.),

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 125$ (aus I. durch Erheben zum Kubus),

XV. $5x^4y + 15x^3y^2 + 15x^2y^3 + 5xy^4 = 625xy$ (d. Mult. mit $5xy$),

XVI. $6x^3y^2 + 6x^2y^3 = 625xy - 2670$ (d. Subtr. von XIV. v. XV.),

XVII. $6x^3y^2 + 6x^2y^3 = 30x^2y^2$ (aus I. durch Mult. mit $6x^2y^2$),

$30x^2y^2 = 625xy - 2670$ (durch Substit. von XVII. in XVI.),

$x^2y^2 = \frac{125}{6}xy - \frac{534}{6}$ (durch Divis. mit 30),

$x^2y^2 - \frac{125}{6}xy = -\frac{534}{6}$ (durch Versetzung),

wonach das Weitere wie oben folgt.

Eine fernere Auflösung ist folgende, in Nr. 19 angedeutete:

I. $x + y = 5$

XVIII. $x - y = d$

XIX. $x = \frac{5+d}{2}$ (d. Add. von I. u. XVIII. und Div. durch 2),

XX. $y = \frac{5-d}{2}$ (d. Subtr. von XVIII. v. I. u. Div. durch 2),

XXI. $x^2 + y^2 = \frac{25+d^2}{2}$

XXII. $$x^3+y^3 = \frac{125+15d^2}{4}$$

$$\frac{3125+125d^2+375d^2+45d^4}{8} = 455 \text{ (d. Subst. von XXI. u. XXII. in I.),}$$

$$d^4+\frac{100}{3}d^2 = \frac{103}{3} \text{ (durch Vereinfachen),}$$

$$d^2 = \frac{-50\pm 53}{3}$$

$$= 1 \text{ oder } = -\frac{103}{3}$$

$$d = x-y = \pm 1 \text{ oder } = \pm\sqrt{-\frac{103}{3}}$$

wonach das Weitere wie oben folgt.

Nr. 24.

I. $$x+y-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{6}{x-y}$$

II. $$x^2+y^2 = 41.$$

Auflösung.

$$x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2} = 6 \text{ (aus I. durch Mult. mit } x-y\text{),}$$

$$x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}+(\tfrac{1}{2})^2 = 6+\tfrac{1}{4} \text{ (durch Ergänzung des Quadr.}$$

$$= \frac{25}{4} \text{ mit } (\tfrac{1}{2})^2\text{),}$$

$$\sqrt{x^2-y^2}-\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{5}{2} \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),}$$

$$\sqrt{x^2-y^2} = 3 \text{ oder } = -2 \text{ (durch Versetzung),}$$

III. $$x^2-y^2 = 9 \text{ oder } = 4 \text{ (d. Erheben z. Quadr.),}$$

$$x^2 = 25 \text{ oder } = \frac{45}{2} \text{ (durch Add. von II. und III. und Div. durch 2),}$$

*IV. $$x = \pm 5 \text{ oder } = \pm 3\sqrt{\tfrac{5}{2}} \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),}$$

$$y^2 = 16 \text{ oder } = \frac{37}{2} \text{ (durch Subtr. von III. von II. und Div. durch 2),}$$

*V. $$y = \pm 4 \text{ oder } = \pm\sqrt{\tfrac{37}{2}} \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel).}$$

Anmerkung. Man vergleiche die Aufgabe Nr. 77 des IV. Abschnittes. Analog wie dort entsprechen hier die Werthe $x = -5$ und $y = -4$, sowie jene $x = +3\sqrt{\tfrac{5}{2}}$ und $y = +\sqrt{\tfrac{37}{2}}$ der Gleichung:

$$x+y+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{6}{x-y}.$$

Nr. 25.

I. $$\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{x^2} = 136\tfrac{1}{9}-2xy$$

II. $$x+4 = 14-y.$$

Auflösung.

$$\frac{x^4}{y^2}+2xy+\frac{y^4}{x^2} = \tfrac{1225}{9} \text{ (aus I. durch Versetzung),}$$

III. $$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} = \pm\tfrac{35}{3} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

IV. $$x+y = 10 \text{ (aus II. durch Versetzung),}$$

$$\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x} = \pm\tfrac{7}{6} \text{ (durch Division von III. durch IV.),}$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = \tfrac{13}{6} \text{ oder } = -\tfrac{1}{6} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+1 = \frac{13}{6}\cdot\frac{x}{y} \text{ oder } = -\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{y} \text{ (d. Mult. mit } \frac{x}{y}\text{),}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{13}{6}\cdot\frac{x}{y} = -1; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{y} = -1$$

(durch Versetzung),

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{13}{6}\cdot\frac{x}{y}+\left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}-1; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{y}+\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}-1$$

$$= \tfrac{25}{144}; \qquad = -\tfrac{143}{144}$$

(durch Ergänzen des Quadrats),

$$\frac{x}{y}-\tfrac{13}{12} = \pm\tfrac{5}{12}; \qquad \frac{x}{y}+\tfrac{1}{12} = \pm\tfrac{1}{12}\sqrt{-143}$$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$$\frac{x}{y} = \tfrac{3}{2} \text{ oder } = \tfrac{2}{3}; \qquad \frac{x}{y} = \frac{-1\pm\sqrt{-143}}{12}$$

(durch Versetzung),

V. $$x = \tfrac{3}{2}y \text{ oder } = \tfrac{2}{3}y; \qquad x = \frac{-1\pm\sqrt{-143}}{12}\cdot y$$

(durch Multiplikation mit y),

$$10 = \tfrac{3}{2}y+y \text{ oder } = \tfrac{2}{3}y+y; \quad 10 = \frac{-1\pm\sqrt{-143}}{12}y+y$$

$$= \tfrac{5}{2}y \text{ oder } = \tfrac{5}{3}y; \qquad = \frac{11\pm\sqrt{-143}}{12}\cdot y$$

(durch Substit. von V. in IV.),

$$y = \tfrac{2}{5}.10 \text{ oder } = \tfrac{3}{5}.10; \quad y = \frac{120}{11\pm\sqrt{-143}}$$

*VI. $$= 4 \text{ oder } = 6; \qquad = 5\mp5\sqrt{-\tfrac{13}{11}}$$

$$\text{(d. Mult. mit } \tfrac{2}{5} \text{ oder } \tfrac{3}{5} \text{ oder } \frac{12}{11\pm\sqrt{-143}}\text{),}$$

*VII. $$x = 6 \text{ oder } = 4; \qquad x = 5\pm5\sqrt{-\tfrac{13}{11}}$$

(durch Substit. von VI. in IV. oder in V.).

Anmerkung. Der Beweis, dass $\frac{120}{11 \pm \sqrt{-143}} = 5 \mp 5\sqrt{-\tfrac{13}{11}}$ wird dem Schüler nicht schwer fallen.

Diese Aufgabe kann auch folgendermassen auf rein quadratischem Wege gelöst werden:

VIII. $x^3 + y^3 = \pm \frac{35}{3} xy$ (aus III. d. Mult. mit xy),

IX. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1000$ (aus IV. durch Erheben zum Kubus),

X. $3x^2y + 3xy^2 = 1000 \mp \frac{35}{3} xy$ (d. Subtr. von VIII. von IX.),

XI. $3x^2y + 3xy^2 = 30xy$ (aus IV. durch Mult. mit $3xy$),

$30xy = 1000 \mp \frac{35}{3} xy$ (durch Substit. von XI. in X.),

$(30 \pm \frac{35}{3})xy = 1000$ (durch Versetzung),

$xy = \frac{1000}{30 \pm \frac{35}{3}}$ (durch Division mit $30 \pm \frac{35}{3}$),

$= 24$ oder $= \frac{600}{11}$

XII. $4xy = 96$ oder $= \frac{2400}{11}$ (durch Mult. mit 4),

XIII. $x^2 + 2xy + y^2 = 100$ (aus IV. durch Erheben zum Quadrat),

$x^2 - 2xy + y^2 = 4$ oder $= -\frac{1300}{11}$ (d. Subtr. v. XII. v. XIII.),

XIV. $x - y = \pm 2$ oder $= \pm 10\sqrt{-\tfrac{13}{11}}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

XV. $x = 6$ oder $= 4$ oder $= 5 \pm 5\sqrt{-\tfrac{13}{11}}$ (durch Add. von IV. und XIV. und Div. durch 2),

XVI. $y = 4$ oder $= 6$ oder $= 5 \mp 5\sqrt{-\tfrac{13}{11}}$ (durch Subtr. von XIV. von IV. und Div. durch 2),

oder auch folgendermassen:

XVII. $x^2 - xy + y^2 = \pm \frac{7}{6} xy$ (d. Division von VIII. durch IV.),

XVIII. $x^2 + 2xy + y^2 = 100$ (aus IV. durch Erheben zum Quadr.),

$3xy = 100 \mp \frac{7}{6} xy$ (d. Subtr. von XVII. v. XVIII.),

$(3 \pm \frac{7}{6})xy = 100$ (durch Versetzung),

$xy = \frac{100}{3 \pm \frac{7}{6}}$ (durch Division mit $3 \pm \frac{7}{6}$),

$= 24$ oder $= \frac{600}{11}$,

wonach das Weitere wie oben folgt. Ein weiterer Weg ergäbe sich noch aus:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \text{ oder} = \frac{-1}{6}$$

durch Multiplikation mit $\frac{y}{x}$ oder mit xy. Ersteres führt auf den in der ersten Auflösung befolgten Gang, letzteres auf

$$x^2+y^2 = \tfrac{13}{6}xy \text{ oder } = -\tfrac{1}{6}xy$$

und die Subtraktion dieser Gleichung von $x^2+2xy+y^2 = 100$ giebt wieder obige Werthe von xy.

Nr. 26.

$$\begin{cases} \text{I.} & \dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y} = 4\tfrac{4}{5} \\ \text{II.} & \sqrt{\dfrac{x-y}{x^4}}+\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{9\sqrt{x-y}}. \end{cases}$$

Auflösung. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2-1 = \dfrac{24}{5}\cdot\dfrac{x+y}{x-y}$ (aus I. durch Mult. mit $\dfrac{x+y}{x-y}$),

$\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2-\dfrac{24}{5}\cdot\dfrac{x+y}{x-y} = 1$ (durch Versetzung),

$\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2-\dfrac{24}{5}\cdot\dfrac{x+y}{x-y}+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2 = \tfrac{144}{25}+1 = \tfrac{169}{25}$ (durch Ergänz. des Quadr. mit $(\tfrac{12}{5})^2$),

$\dfrac{x+y}{x-y}-\tfrac{12}{5} = \pm\tfrac{13}{5}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{12\pm 13}{5}$ (durch Versetzung),

$= 5$ oder $= -\tfrac{1}{5}$

$\dfrac{2y}{2x} = \tfrac{4}{6}$ oder $= \tfrac{6}{4}$ (weil wenn $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ auch $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{c-d}{c+d}$ ist),

$\dfrac{y}{x} = \tfrac{2}{3}$ oder $= -\tfrac{3}{2}$

$y = \tfrac{2}{3}x$ od. $= -\tfrac{3}{2}x$ (d. Mult. mit x),

$\dfrac{x-y}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x-y}}{x} = \tfrac{4}{9}$ (aus II. d. Mult. mit $\sqrt{x-y}$),

$\dfrac{x-y}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x-y}}{x}+(\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{4}{9}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{25}{36}$ (durch Ergänzung des Quadr. mit $(\tfrac{1}{2})^2$),

$\dfrac{\sqrt{x-y}}{x}+\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{5}{6}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\dfrac{\sqrt{x-y}}{x} = -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{5}{6}$ durch Versetzung),

$= \tfrac{1}{3}$ oder $= -\tfrac{4}{3}$

$\sqrt{x-y} = \tfrac{1}{3}x$ od. $= -\tfrac{4}{3}x$ (d. Mult. mit x),

IV. $x-y = \tfrac{1}{9}x^2$ oder $= \tfrac{16}{9}x^2$ (durch Erheben ins Quadrat),

$x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{9}x^2$ oder $= \frac{16}{9}x^2$; $\qquad x + \frac{3}{2}x = \frac{x^2}{9}$ oder $= \frac{16}{9}x^2$

(durch Substit. von III. in IV.),

$\frac{x}{3} = \frac{x^2}{9}$ oder $= \frac{16}{9}x^2$; $\qquad \frac{5}{2}x = \frac{x^2}{9}$ oder $= \frac{16}{9}x^2$

$1 = \frac{x}{3}$ oder $= \frac{16}{3}x$; $\qquad 1 = \frac{2}{45}x$ od. $= \frac{32}{45}x$

(durch Div. mit $\frac{x}{3}$ oder mit $\frac{5}{2}x$),

*V. $x = 3$ oder $= \frac{3}{16}$; $\qquad x = \frac{45}{2}$ oder $= \frac{45}{32}$

(durch Mult. mit 3 oder $\frac{3}{16}$ oder $\frac{45}{2}$ oder $\frac{45}{32}$),

$y = \frac{2}{3}x$ (d. Substit. von V. in VI.) $\quad y = -\frac{3}{2}x$

*VI. $= 2$ oder $= \frac{1}{8}$. $\qquad = -\frac{135}{4}$ oder $= -\frac{135}{64}$.

Anmerkung. Die Gleichung III. ergiebt sich auch, wenn man I. mit $\frac{x-y}{x+y}$ oder mit $(x+y)(x-y)$ multiplizirt. In letzterem Fall ergiebt sich $x^2 - y^2 = \frac{5}{6}xy$, welche Gleichung sich entweder nach x oder y oder nach vorhergegangener Division durch y^2 oder x^2 nach $\frac{x}{y}$ oder $\frac{y}{x}$ auflösen lässt.

Die Gleichung II. lässt sich auch durch Multiplikation mit $x^2\sqrt{x-y}$ oder durch Multiplikation mit $x\sqrt{x-y}$ vereinfachen; erstere führt auf $\sqrt{x-y} + \frac{x}{2} = \pm\frac{5}{6}x$, letztere hingegen auf $\sqrt{\frac{x-y}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \pm\frac{5}{6}\sqrt{x}$.

Nr. 27.

$$\begin{cases} \text{I.} & \sqrt{6\sqrt{x}+6\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = 9 - \frac{1}{2}\sqrt{x} \\ \text{II.} & x - y = 12. \end{cases}$$

Auflösung.

$\sqrt{6(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 9$ (aus I. durch Versetzung),

$2\sqrt{6}\cdot\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \sqrt{x}+\sqrt{y} = 18$ (durch Mult. mit 2),

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+6 = 24$ (d. Ergänz. des Quadr. mit 6),

$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{6} = \pm 2\sqrt{6}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = (-1 \pm 2)\sqrt{6}$ (durch Versetzung),

$= \sqrt{6}$ oder $= -3\sqrt{6}$

III. $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 6$ oder $= 54$ (d. Erheb. z. Quadr.),

IV. $\sqrt{x}-\sqrt{y} = 2$ oder $= \frac{2}{9}$ (durch Div. von II. durch III.),

$\sqrt{x} = 4$ oder $= \frac{244}{9}$ (durch Add. von III. u. IV. und Div. durch 2),

*V. $x = 16$ oder $= \frac{59536}{81}$ (durch Erheben zum Quadrat),
$\sqrt{y} = 2$ oder $= \frac{242}{9}$ (durch Subtr. von IV. von III. und Division durch 2),
*VI. $y = 4$ oder $= \frac{58564}{81}$ (durch Erheben zum Quadrat).

Nr. 28.

I. $y^4 - 432 = 12xy^2$
II. $y^2 = 12 + 2xy$.

Auflösung.

$y^4 - 12xy^2 = 432$ (aus I. durch Versetzung),
$y^4 - 12xy^2 + 36x^2 = 432 + 36x^2$ (durch Ergänzung des Quadr.
III. $= 36(12 + x^2)$ mit $36x^2$),
$y^2 - 2xy = 12$ (aus II. durch Versetzung),
IV. $y^2 - 2xy + x^2 = 12 + x^2$ (d. Ergänz. des Quadr. mit x^2),
$y^4 - 12xy^2 + 36x^2 = 36(y^2 - 2xy + x^2)$ (d. Substit. von IV. in III.),
V. $y^2 - 6x = \pm 6(y - x)$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

und nun entweder

$y^2 - 6x = 6y - 6x$
$y^2 = 6y$ (durch Weglassen der gleichen Glieder),
*VI. $y = 6$ (durch Division mit y),
$36 = 12 + 12x$ (durch Substit. von VI. in II.),
$24 = 12x$ (durch Versetzung),
*VII. $x = 2$ (durch Division mit 12);

oder auch: $y^2 - 6x = 6x - 6y$
$y^2 + 6y = 12x$ (durch Versetzung),
VIII. $y^4 + 6y^3 = 12xy^2$ (durch Multiplikation mit y^2),
$6y^3 = -432$ (d. Subtr. von I. von VIII. u. Versetz.),
$y^3 = -72$ (durch Division mit 6),
*IX. $y = -2\sqrt[3]{9}$ (durch Ausziehen der Kub.-Wurzel),
$12\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{9} = 12x$ (durch Substit. von IX. in V.),
*X. $x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$ (durch Division mit 12).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$y^2 - 12 = 2xy$ (aus II. durch Versetzung),
XI. $x^2 = \frac{y^2 - 12}{2y}$ (durch Division mit $2y$),
$y^4 - 432 = 12y^2 \frac{y^2 - 12}{2y}$ (durch Substit. von XI. in I.),
XII. $= 6y^3 - 72y$
$y^4 - 6y^3 = 432 - 72y$ (durch Versetzung),
$y^3(y - 6) = -72(y - 6)$ (d. Ausheben gleicher Faktoren),

$$y^3 = -72$$

XIII. $y = -2\sqrt[3]{9}$ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),

$$x = \frac{12\sqrt[3]{3}-12}{-4\sqrt[3]{9}} \text{ (durch Substit. von XIII. in XI.),}$$

XIV. $= \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$.

Die andern Werthe ergeben sich, wenn man $y - 6 = 0$ setzt, oder folgendermassen:

$y^4 + 72y = 6y^3 + 432$ (aus XII. durch Versetzung),

$y(y^3+72) = 6(y^3+72)$ (durch Ausheben gleicher Faktoren),

XV. $y = 6$ (durch Division mit y^3+72),

$$x = \frac{36-12}{12} \text{ (durch Substit. von XV. in XI.),}$$

XVI. $= 2$.

Nr. 29.

I. $\frac{4}{y^2} + \frac{4+y}{y} = \frac{8+4y}{x} + \frac{12y^2}{x^2}$

II. $4y^2 - xy = x$.

Auflösung. $\frac{4+4y+y^2}{y^2} = \frac{4}{x}(2+y) + \frac{12y^2}{x^2}$ (aus I. durch Versetzung),

$\left(\frac{2+y}{y}\right)^2 - \frac{4}{x}(2+y) = \frac{12y^2}{x^2}$ (durch Versetzung),

$\left(\frac{2+y}{y}\right)^2 - \frac{4}{x}(2+y) + \frac{4y^2}{x^2} = \frac{16y^2}{x^2}$ (durch Ergänz. des Quadr. mit $\frac{4y^2}{x^2}$),

$\frac{2+y}{y} - \frac{2y}{x} = \pm\frac{4y}{x}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\frac{2+y}{y} = \frac{6y}{x}$ oder $= -\frac{2y}{x}$ (d. Versetz.),

III. $2x + xy = 6y^2$ od. $= -2y^2$ (d. Mult. m. xy),

IV. $x + xy = 4y^2$ (aus II. durch Versetzung

V. $2x + 2xy = 8y^2$ und Mult. mit 2),

VI. $x = 2y^2$ oder $= -6y^2$ (durch Subtr. von IV. von III.),

VII. $xy = 2y^2$ oder $= -10y^2$ (durch Subtr. von III. von V.),

*VIII. $y = 1$ oder $= -\frac{5}{3}$ (durch Div. von VII. durch VI.),

*IX. $x = 2$ oder $= -\frac{50}{3}$ (durch Substit. von VIII. in VI.).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Substitution des Werthes $x = \frac{4y^2}{1+y}$ in I. und führt auf die Gleichung $3y^2+2y = 5$.

Nr. 30.

$$\begin{cases} \text{I.} & \sqrt{(1+x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2} = 4 \\ \text{II.} & (4-x^2)^2 = 18-4y^2. \end{cases}$$

Auflösung. $\sqrt{(1+x)^2+y^2} = 4-\sqrt{(1-x)^2+y^2}$ (aus I. durch Versetzung),

$(1+x)^2+y^2 = 16-8\sqrt{(1-x)^2+y^2}+(1-x)^2+y^2$ (durch Erheben zum Quadrat),

$1+2x+x^2-16-1+2x-x^2 = -8\sqrt{(1-x)^2+y^2}$ (durch Weglassen der gleichen Glieder u. Versetzen),

$4x-16 = -8\sqrt{(1-x)^2+y^2}$

$x-4 = -2\sqrt{(1-x)^2+y^2}$ (d. Div. mit 4),

$x^2-8x+16 = 4-8x+4x^2+4y^2$ (durch Erheben zum Quadrat),

III. $3x^2 = 12-4y^2$ (durch Versetzung und Mult. mit -1),

$16-8x^2+x^4 = 18-4y^2$ (aus II. durch Auflösen der Klammern),

IV. $x^4-8x^2 = 2-4y^2$ (durch Versetzung),

$x^4-11x^2 = -10$ (d. Subtr. von III. von IV.),

$x^4-11x^2+(\frac{11}{2})^2 = \frac{121}{4}-10 = \frac{81}{4}$ (durch Ergänzung des Quadrats),

$x^2-\frac{11}{2} = \pm\frac{9}{2}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

V. $x^2 = 10$ oder $= 1$ (durch Versetzung),

*VI. $x = \pm\sqrt{10}$ oder $= \pm 1$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

VII. $12-3x^2 = 4y^2$ (aus III. durch Versetzung),

$4y^2 = -18$ oder $= 9$ (durch Substit. von V. in III.),

$y^2 = \frac{-9}{2}$ oder $= \frac{9}{4}$ (d. Div. mit 4),

*VIII. $y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{-2}$ oder $= \pm\frac{3}{2}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

Anmerkung. Ein Blick auf die Hauptgleichungen zeigt, dass sowohl für $x = +\sqrt{10}$ als auch für $x = -\sqrt{10}$ beide Werthe

von y gelten, was natürlich auch für die beiden andern Wurzeln gilt.

Bei der Einsetzung der Werthe $x = \pm\sqrt{10}$ und $y^2 = -$ [illegible] ergiebt sich die Gleichung $\sqrt{26+8\sqrt{10}}+\sqrt{26-8\sqrt{10}} = 8$, welche sich nun weiter nach der Formel:

$\sqrt{A+\sqrt{B}} \pm \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{2(A \pm \sqrt{A^2-B})}$ oder nach jener:

$$\sqrt{M \pm \sqrt{N}} = \sqrt{\frac{M+\sqrt{M^2-N}}{2}} \pm \sqrt{\frac{M-\sqrt{M^2-N}}{2}}$$

behandeln lässt.

Nr. 31.

$$\begin{cases} \text{I.} & \dfrac{x+\sqrt{x+y}}{x-\sqrt{x+y}} - \dfrac{\sqrt{x}-x-y}{\sqrt{x}+x+y} = 2\tfrac{9}{40} \\ \text{II.} & y^2 - \sqrt{xy^2} = \dfrac{4x}{9}. \end{cases}$$

Auflösung. $\dfrac{x+\sqrt{x+y}}{x-\sqrt{x+y}} + \dfrac{x-\sqrt{x+y}}{x+\sqrt{x+y}} = \tfrac{89}{40}$ (aus I., weil $-(\sqrt{x}-x-y) = x+y-\sqrt{x}$ ist),

$\left(\dfrac{x+\sqrt{x+y}}{x-\sqrt{x+y}}\right)^2 - \dfrac{89}{40}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x+y}}{x-\sqrt{x+y}} = -1$ (durch Mult. mit $\dfrac{x+\sqrt{x+y}}{x-\sqrt{x+y}}$ und nachherige Versetzung),

$\left(\dfrac{x+\sqrt{x+y}}{x-\sqrt{x+y}}\right)^2 - \dfrac{89}{40}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x+y}}{x-\sqrt{x+y}} + \left(\dfrac{89}{80}\right)^2 = \tfrac{7921}{6400} - 1$ (d. Ergänz. des Quadr. mit

$= \tfrac{1521}{6400}$ $(\tfrac{89}{80})^2$),

$\dfrac{x+\sqrt{x+y}}{x-\sqrt{x+y}} - \tfrac{89}{80} = \pm\tfrac{39}{80}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\dfrac{x+\sqrt{x+y}}{x-\sqrt{x+y}} = \dfrac{89 \pm 39}{80}$ (durch Versetzung),

$= \tfrac{8}{5}$ oder $= \tfrac{5}{8}$

$\dfrac{2(x+y)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{x+y}{\sqrt{x}} = \pm\tfrac{13}{3}$ (weil wenn $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ auch $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$ ist),

III. $x+y = \pm\tfrac{13}{3}\sqrt{x}$ (durch Mult. mit $\sqrt{x}$),

$y^2 - y\sqrt{x} + \dfrac{x}{4} = \dfrac{4x}{9} + \dfrac{x}{4}$ (d. Ergänz. des Quadr. mit $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$ aus II.),

$= \dfrac{25x}{36}$

$$y - \frac{\sqrt{x}}{2} = \pm \tfrac{5}{6}\sqrt{x} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$y = (\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{5}{6})\sqrt{x} \text{ (durch Versetzung)},$$

IV. $$= \tfrac{4}{3}\sqrt{x} \text{ oder } = -\tfrac{1}{3}\sqrt{x}$$

$$x = (\pm\tfrac{13}{3} - \tfrac{4}{3})\sqrt{x} \text{ oder } = (\pm\tfrac{13}{3} + \tfrac{1}{3})\sqrt{x}$$
(durch Subtr. von IV. von III),

V. $$\sqrt{x} = 3 \text{ oder } = -\tfrac{17}{3} \text{ oder } = \tfrac{14}{3} \text{ oder } = -4$$
(durch Division mit $\sqrt{x}$),

* VI. $$x = 9 \text{ oder } = \tfrac{289}{9} \text{ oder } = \tfrac{196}{9} \text{ oder } = 16$$
(durch Erheben zum Quadrat),

* VII. $$y = 4 \text{ oder } = -\tfrac{68}{9} \text{ oder } = -\tfrac{14}{9} \text{ oder } = \tfrac{4}{3}$$
(durch Substit. von V. in IV.).

Anmerkung. Eine analoge Auflösung ergiebt sich, wenn man die Gleichung I. mit $\frac{x - \sqrt{x+y}}{x + \sqrt{x+y}}$ multiplizirt.

Eine fernere Aufsuchung der Gleichung III. ist folgende:

$$\frac{(x+y)^2 + 2(x+y)\sqrt{x+x+}}{(x+y)^2 - 2(x+y)\sqrt{x+x}} = \tfrac{49}{40}(x+y)^2 - \tfrac{49}{40}x$$ (aus I. durch Mult. mit $(x+\sqrt{x+y}).(x-\sqrt{x+y}) = (x+y)^2 - x$),

$$\tfrac{169}{40}x = \tfrac{9}{40}(x+y)^2 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$(x+y)^2 = \tfrac{169}{9}x \text{ (durch Division mit } \tfrac{9}{40}),$$

$$x+y = \pm\tfrac{13}{3}\sqrt{x} \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)}.$$

Bei der Einsetzung der Wurzeln in die Hauptgleichung übersehe man nicht, dass $\sqrt{xy^2} = y\sqrt{x}$ ist, und dass dieser Ausdruck im zweiten Fall $= -\frac{68}{9}.-\frac{17}{3} = \frac{1156}{27}$, im dritten aber $= -\frac{14}{9}.\frac{14}{3} = -\frac{196}{27}$ und im vierten endlich $= \frac{4}{3}.-4 = -\frac{16}{3}$ wird.

Aus der Gleichung $x+y = \pm\frac{13}{3}\sqrt{x}$ geht hervor, dass man in der Hauptgleichung $\sqrt{x}$ sowohl positiv als negativ annehmen kann.

Nr. 32.

I. $$\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = 4\tfrac{1}{4} - \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$$

II. $$x(x+y) = 52 - \sqrt{x^2+xy+4}.$$

Auflösung. $$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2 = \frac{17}{4}.\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} - 1$$ (aus I. durch Mult. mit $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$),

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2 - \frac{17}{4}.\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = -1 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2-\frac{17}{4}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\left(\frac{17}{8}\right)^2=\frac{289}{64}-1=\frac{225}{64}$$

(d. Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{17}{8})^2$),

$\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{17}{8}=\pm\frac{15}{8}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{17\pm15}{8}$ (durch Versetzung),

$=4$ oder $\frac{1}{4}$

$\frac{2\sqrt{x^2-y^2}}{2x}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}=\pm\frac{3}{5}$ weil wenn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ auch $\frac{a\mp b}{a\pm b}=\frac{c\mp d}{c\pm d}$ ist),

$\sqrt{x^2-y^2}=\pm\frac{3}{5}x$ (durch Mult. mit x),

$x^2-y^2=\frac{9}{25}x^2$ (d. Erheben zum Quadr.),

$\frac{16}{25}x^2=y^2$ (durch Versetzung),

III. $y=\pm\frac{4}{5}x$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x^2+xy+\sqrt{x^2+xy+4}=52$ (aus II. durch Versetzung),

$x^2+xy+4+\sqrt{x^2+xy+4}+\frac{1}{4}=52+\frac{17}{4}=\frac{225}{4}$ (durch Ergänz. des Quadr. mit $4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$),

$\sqrt{x^2+xy+4}+\frac{1}{2}=\pm\frac{15}{2}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x^2+xy+4}=7$ oder $=-8$ (d. Versetzung),

$x^2+xy+4=49$ oder $=64$ (durch Erheben zum Quadrat),

IV. $x^2+xy=45$ oder $=60$ (d. Versetzung),

$x^2+\frac{4}{5}x^2=45$ oder $=60$; $x^2-\frac{4}{5}x^2=45$ oder $=60$
(durch Substit. von III. in IV.),

$\frac{9}{5}x^2=45$ oder $=60$; $\frac{x^2}{5}=45$ oder $=60$

$x^2=25$ oder $=\frac{100}{3}$; $x^2=225$ oder $=300$
(durch Mult. mit $\frac{5}{9}$ oder mit 5),

*V. $x=\pm5$ oder $\pm10\sqrt{\frac{1}{3}}$; $x=\pm15$ od. $=\pm10\sqrt{3}$
(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

*VI. $y=\pm4$ oder $=\pm8\sqrt{\frac{1}{3}}$; $y=\mp12$ od. $=\mp8\sqrt{3}$
(durch Substit. von V. in III.).

Anmerkung. Die Gleichung III. ergiebt sich auf analogem Wege wie oben, wenn die Gleichung I. mit $\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$, oder noch

kürzer, wenn sie mit $(x+\sqrt{x^2-y^2})(x-\sqrt{x^2-y^2}) = y^2$ multiplizirt wird.

Die Gleichung $\sqrt{x^2-y^2} = \pm\frac{4}{5}x$ zeigt an, dass die erste Gleichung giltig bleibt, wenn man in ihr die Zeichen von $\sqrt{x^2-y^2}$ ändert, wie sich auch schon durch blosse Anschauung ergiebt.

Nr. 33.

$$\begin{cases} \text{I.} & 5y+\dfrac{\sqrt{x^2-15y-14}}{5} = \dfrac{x^2}{3}-36 \\ \text{II.} & \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y}{2}}. \end{cases}$$

Auflösung. $15y+\frac{3}{5}\sqrt{x^2-15y-14} = x^2-108$ (aus I. durch Mult. mit 3),

$x^2-15y-\frac{3}{5}\sqrt{x^2-15y-14} = 108$ (durch Versetzung und Mult. mit -1),

$x^2-15y-14-\frac{3}{5}\sqrt{x^2-15y-14}+(\frac{3}{10})^2 = 108-\frac{1391}{100} = \frac{9409}{100}$ (d. Add. von $(\frac{3}{10})^2-14 = -\frac{1391}{100}$),

$\sqrt{x^2-15y-14}-\frac{3}{10} = \pm\frac{97}{10}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x^2-15y-14} = 10$ od. $= -\frac{47}{5}$ (d. Vers.),

$x^2-15y-14 = 100$ oder $= \frac{2209}{25}$ (durch Erheben zum Quadr.),

III. $x^2-15y = 114$ oder $= \frac{2559}{25}$ (durch Versetzung),

$\frac{x^2}{8y}-\sqrt{\frac{x^2}{2y}\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)}+\frac{2x}{3}+\frac{y}{2} = 0$ (aus II. d. Versetzung),

$\pm\left[\frac{x}{2\sqrt{2y}}-\sqrt{\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}}\right] = 0$ (d. Ausz. d. Qu.-Wurzel),

$\frac{x}{2\sqrt{2y}} = \sqrt{\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}}$ (durch Versetzung),

$\frac{x^2}{8y} = \frac{2x}{3}+\frac{y}{2}$ (durch Erheben zum Quadrat),

$\frac{x^2}{4} = \frac{4xy}{3}+y^2$ (durch Mult. mit $2y$),

$y^2+\frac{4xy}{3}+\left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4}+\frac{4x^2}{9}$ (durch Ergänzung des Quadrats mit $\left(\frac{2x}{3}\right)^2$),

$= \frac{25x^2}{36}$

$y+\frac{2x}{3} = \pm\frac{5x}{6}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$$y = -\frac{2x}{3} \pm \frac{5x}{6} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$\text{IV.} \qquad = \frac{x}{6} \text{ oder } = -\frac{3x}{2}$$

Entweder:

$$x^2 - \tfrac{5}{2}x = 114 \text{ oder } = \tfrac{2559}{25} \text{ (d. Substit. von IV. in III.),}$$

$$x^2 - \tfrac{5}{2}x + (\tfrac{5}{4})^2 = 114 + \tfrac{25}{16} \text{ oder } = \tfrac{2559}{25} + \tfrac{25}{16} \text{ (durch Ergänzung}$$

$$= \tfrac{1849}{16} \text{ oder } = \tfrac{41569}{400} \text{ des Quadr. mit } (\tfrac{5}{4})^2\text{),}$$

$$x - \tfrac{5}{4} = \pm\tfrac{43}{4} \text{ oder } = \pm\tfrac{1}{20}\sqrt{41569} \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),}$$

$$\text{*V.} \qquad x = 12 \text{ oder } = -\tfrac{19}{2} \text{ oder } = \frac{25 \pm \sqrt{41569}}{20}$$

(durch Versetzung),

$$y = \frac{x}{6} \text{ (durch Substit. von V. in VI.),}$$

$$\text{*VI.} \qquad = 2 \text{ oder } = -\tfrac{19}{12} \text{ oder } = \frac{25 \pm \sqrt{41569}}{120}.$$

Oder:

$$x^2 + \tfrac{45}{2}x = 114 \text{ oder } = \tfrac{2559}{25} \text{ (d. Substit. von IV. in III.),}$$

$$x^2 + \tfrac{45}{2}x + (\tfrac{45}{4})^2 = 114 + \tfrac{2025}{16} \text{ oder } = \tfrac{2559}{25} + \tfrac{2025}{16} \text{ (d. Ergänz.}$$

$$= \tfrac{3849}{16} \text{ oder } = \tfrac{91569}{400} \text{ des Quadr. mit } (\tfrac{45}{4})^2\text{),}$$

$$x + \tfrac{45}{4} = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{3849} \text{ oder } = \pm\tfrac{1}{20}\sqrt{91569} \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),}$$

$$\text{*V.} \qquad x = \frac{-45 \pm \sqrt{3849}}{4} \text{ oder } = \frac{-225 \pm \sqrt{91569}}{20}$$

(durch Versetzung),

$$y = -\frac{3x}{2} \text{ (durch Substit. von V. in VI.),}$$

$$\text{*VI.} \qquad = \frac{135 \mp 3\sqrt{3849}}{8} \text{ oder } = \frac{675 \mp 3\sqrt{91569}}{40}.$$

Anmerkung. Die Berücksichtigung, dass $\sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4y}$ (wie oben bewiesen), wird das Einsetzen der Wurzeln in die zweite Hauptgleichung bedeutend erleichtern.

Nr. 34.

$$\begin{cases} \text{I.} & \sqrt{\dfrac{x+y^2}{4x}} + \dfrac{y}{\sqrt{y^2+x}} = \dfrac{y^2}{4}\sqrt{\dfrac{4x}{y^2+x}} \\ \text{II.} & \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x-y-1}}}{\sqrt{x-\sqrt{x-y-1}}} = y+1. \end{cases}$$

Auflösung.

$x+y^2+2y\sqrt{x} = y^2x$ (aus I. durch Mult. mit $\sqrt{4x(y^2+x)} = 2\sqrt{x}.\sqrt{y^2+x}$),

$\sqrt{x}+y = \pm\, y\sqrt{x}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x}(1\mp y) = -y$ (durch Versetzung),

$\sqrt{x} = \frac{-y}{1\mp y}$ (durch Division mit $1\mp y$),

III. $= \frac{y}{y-1}$ oder $= \frac{-y}{y+1}$

$\frac{y+1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1})^2} = y+1$ (aus II. durch Mult. von Zähler und Nenner mit $\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1}$),

$1 = (\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1})^2$ (durch Mult. mit $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1})^2}{y+1}$),

$\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1} = \pm 1$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x}\mp 1 = \sqrt{x-y-1}$ (durch Versetzung),

$x\mp 2\sqrt{x}+1 = x-y-1$ (durch Erheben zum Quadrat),

$\mp 2\sqrt{x} = -(y+2)$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzung),

$\sqrt{x} = \frac{-(y+2)}{\mp 2}$ (durch Division mit ∓ 2),

IV. $= \pm\frac{y+2}{2}$.

$\sqrt{x} = \frac{y}{y-1} = \frac{y+2}{2}$; $\sqrt{x} = \frac{-y}{y+1} = \frac{y+2}{2}$

(durch Substit. von IV. in III.),

$2y = y^2+2y-y-2$; $-2y = y^2+2y+y+2$

(durch Mult. mit $2(y-1)$ oder $2(y+1)$),

$y^2-y = 2$ (d. Versetzung) $y^2+5y = -2$

$y^2-y+(\frac{1}{2})^2 = 2+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$; $y^2+5y+(\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}-2 = \frac{17}{4}$

(d. Ergänz. des Quadrats),

$y-\frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$; $y+\frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{17}$

*V. $y = 2$ oder $= -1$; $y = \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

(durch Versetzung),

$\sqrt{x} = 2$ oder $= \frac{1}{2}$; $\sqrt{x} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

(d. Substit. von V. in III. oder IV.),

*VI. $x = 4$ oder $= \frac{1}{4}$; $x = \frac{9\mp\sqrt{17}}{8}$

(d. Erheben zum Quadrat).

$$\sqrt{x} = \frac{y}{y-1} = -\frac{y+2}{2}; \qquad \sqrt{x} = -\frac{y}{y+1} = -\frac{y+2}{2}$$

(durch Substit. von IV. in III.),

$$2y = -y^2-2y+2+y; \quad 2y = y^2+2y+y+2$$

(d. Mult. mit $2(y-1)$ oder $-2(y+1)$,

$$y^2+3y = 2 \text{ (d. Versetzung) } y^2+y = -2$$

$$y^2+3y+(\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{9}{4}+2 = \tfrac{17}{4}; \quad y^2+y+(\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}-2 = -\tfrac{7}{4}$$

(d. Ergänz. des Quadrats),

$$y+\tfrac{3}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{17}; \qquad y+\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-7}$$

$$\text{*VII.} \qquad y = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}; \qquad y = \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$$

(durch Versetzung),

$$\sqrt{x} = \frac{-1\mp\sqrt{17}}{4}; \qquad \sqrt{x} = \frac{-3\mp\sqrt{-7}}{4}$$

(durch Substit. von VII. in III. oder IV.),

$$\text{*VIII.} \qquad x = \frac{9\pm\sqrt{17}}{8}; \qquad x = \frac{1\pm3\sqrt{-7}}{8}$$

(durch Erheben zum Quadrat).

Anmerkung. Die Gleichung IV. ergiebt sich auch auf folgende Weise:

$$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1})^2}{y+1} = y+1$$ (durch Mult. von Zähler und Nenner mit $\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1}$),

$$(\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1})^2 = (y+1)^2$$ (durch Mult. mit $y+1$),

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1} = \pm(y+1)$$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$$\sqrt{x-y-1} = \pm(y+1)-\sqrt{x}$$ (durch Versetzung),

$$x-(y+1) = (y+1)^2\mp2(y+1)\sqrt{x}+x$$ (durch Erheben zum Quadrat),

$$\pm2(y+1)\sqrt{x} = (y+1)^2+y+1$$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzung),

$$\pm2\sqrt{x} = y+1+1$$ (durch Division mit $y+1$),

$$\sqrt{x} = \pm\frac{y+2}{2}$$ (durch Division mit ±2);

oder auch folgendermassen:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-y-1} = y\sqrt{x}+\sqrt{x}-(y+1)\sqrt{x-y-1}$$ (durch Mult. mit $\sqrt{x}-\sqrt{x-y-1}$),

$$(y+2)\sqrt{x-y-1} = y\sqrt{x}$$ (durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzung),

$$(y^2+4y+4)(x-y-1) = y^2x$$ (durch Erheben zum Quadrat),

$y^2x+4x(y+1)-(y+1)(y^2+4y+4) = y^2x$ (durch Auflösen der Klammern),

$4x(y+1) = (y+1)(y^2+4y+4)$ (durch Weglassen der gleichen Glieder u. Vers.),

$x = \frac{y^2+4y+4}{4}$ [durch Div. mit $4(y+1)$],

$\sqrt{x} = \pm\frac{y+2}{2}$ (durch Ausziehen der Quadr.-Wurzel).

Die Unbekannten selbst ergeben sich noch auf folgende Weise:

Aus $\sqrt{x}+y = \pm y\sqrt{x}$ folgt

$y \mp y\sqrt{x} = -\sqrt{x}$ (durch Versetzung),

$y = \frac{-\sqrt{x}}{1\mp\sqrt{x}}$ (durch Division mit $1\mp\sqrt{x}$),

IX. $= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ oder $= -\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Aus $\sqrt{x} = \pm\frac{y+2}{2}$ folgt

$\pm 2\sqrt{x} = y+2$ (durch Mult. mit ± 2),

$y = \pm 2\sqrt{x}-2$ (durch Versetzung),

X. $= 2(\sqrt{x}-1)$ oder $= -2(\sqrt{x}+1)$.

$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 2(\sqrt{x}-1)$; $y = -\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x}-1)$

(durch Substit. von X. in IX.)

$\sqrt{x} = 2x-4\sqrt{x}+2$; $-\sqrt{x} = 2x-2$

(d. Mult. mit $\sqrt{x}-1$ oder $\sqrt{x}+1$),

$2x-5\sqrt{x} = -2$ (d. Versetz.) $2x+\sqrt{x} = 2$

$x-\frac{5}{2}\sqrt{x} = -1$; $x+\frac{1}{2}\sqrt{x} = 1$

(durch Division mit 2),

$x-\frac{5}{2}\sqrt{x}+(\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}-1$; $x+\frac{1}{2}\sqrt{x}+(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}+1$

$= \frac{9}{16}$; $= \frac{17}{16}$

(d. Ergänzung des Quadrats),

$\sqrt{x}-\frac{5}{4} = \pm\frac{3}{4}$; $\sqrt{x}+\frac{1}{4} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{17}$

(d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

XI. $\sqrt{x} = 2$ oder $= \frac{1}{2}$; $\sqrt{x} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

(durch Versetzung),

XII. $x = 4$ oder $= \frac{1}{4}$; $x = \frac{9\mp\sqrt{17}}{8}$

(durch Erheben zum Quadrat),

XIII. $y = 2$ oder $= -1$; $\quad y = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$

(durch Substit. von XII. in IX. oder X).

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = -2(\sqrt{x}+1); \quad y = -\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = -2(\sqrt{x}+1)$$

(durch Substit. von X. in IX.),

$$\sqrt{x} = -2x+2; \quad -\sqrt{x} = -2x-4\sqrt{x}-2$$

(d. Mult. mit $\sqrt{x}-1$ oder $\sqrt{x}+1$)

$$2x+\sqrt{x} = 2 \text{ (d. Versetzung) } 2x+3\sqrt{x} = -2$$

$$x+\frac{\sqrt{x}}{2} = 1; \quad x+\tfrac{3}{2}\sqrt{x} = -1$$

(d. Division mit 2),

$$x+\tfrac{1}{2}\sqrt{x}+(\tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{1}{16}+1; \quad x+\tfrac{3}{2}\sqrt{x}+(\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{9}{16}-1$$

$$= \tfrac{17}{16}; \quad = -\tfrac{7}{16}$$

(d. Ergänzung des Quadrats),

$$\sqrt{x}+\tfrac{1}{4} = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{17}; \quad \sqrt{x}+\tfrac{3}{4} = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{-7}$$

(d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),

XIV. $\quad \sqrt{x} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}; \quad \sqrt{x} = \frac{-3\pm\sqrt{-7}}{4}$

(durch Versetzung),

XV. $\quad x = \frac{9\mp\sqrt{17}}{8}; \quad x = \frac{1\pm3\sqrt{-7}}{8}$

(d. Erheben zum Quadrat),

XIV. $\quad y = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}; \quad y = \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$

(durch Substit. von XIV. in IX. oder X.).

Bei der Einsetzung der Wurzeln in die zweite Hauptgleichung übersehe man nicht, dass für die aus $\sqrt{x} = \frac{y+2}{2}$ hervorgegangenen Werthe $\sqrt{x-y-1} = \sqrt{x}-1$ und für jene aus $\sqrt{x} = -\frac{y+2}{2}$ hervorgegangenen $\sqrt{x-y-1} = \sqrt{x}+1$ ist.

Nr. 35.

$$\begin{cases} \text{I.} & \dfrac{x+y+\sqrt{x^2-y^2}}{x+y-\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{9}{8y}(x+y) \\ \text{II.} & (x^2+y)^2+x-y = 2x(x^2+y)+506. \end{cases}$$

Auflösung.

$$\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}} = \frac{9}{8y}(x+y)$$ (aus I. durch Division von Zähler und Nenner mit $\sqrt{x+y}$),

$$(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2 = \tfrac{9}{4}(x+y) \quad \text{(durch Multiplikation mit } (\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}).(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}) = 2y\text{)},$$

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} = \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{x-y} \quad \text{(d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$\sqrt{x-y} = (-1 \pm \tfrac{3}{2})\sqrt{x+y} \quad \text{(durch Versetzung)},$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{x+y} \text{ oder } = -\tfrac{5}{2}\sqrt{x+y}$$

$$x-y = \tfrac{1}{4}(x+y) \text{ oder } = \tfrac{25}{4}(x+y) \quad \text{(durch Erheben zum Quadrat)},$$

$$4x-4y = x+y \text{ oder } = 25x+25y \quad \text{(d. Mult. m. 4)},$$

III. $$y = \frac{3x}{5} \text{ oder } = -\frac{21x}{29} \quad \text{(d. Versetzung u. Division mit 5 oder 29)},$$

$$(x^2+y)^2-2x(x^2+y)+x-y = 506 \quad \text{(aus II. durch Versetzung)},$$

$$(x^2+y)^2-2x(x^2+y)-x^2-y+x^2+x = 506 \quad \text{(weil } x^2-x^2 = 0 \text{ ist)},$$

$$(x^2+y)^2-(2x+1)(x^2+y)+x^2+x+\tfrac{1}{4} = 506+\tfrac{1}{4} \quad \text{(durch Ergänz. des Quadr. mit } \tfrac{1}{4}\text{)},$$

$$(x^2+y)^2-(2x+1)(x^2+y)+\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 = \tfrac{2025}{4}$$

$$x^2+y-\frac{2x+1}{2} = \pm\tfrac{45}{2} \quad \text{(d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$x^2+y-x = \frac{1\pm 45}{2} \quad \text{(d. Vers.)},$$

IV. $$= 23 \text{ oder } = -22$$

Entweder:

$$x^2+\frac{3x}{5}-x = 23 \text{ oder } = -22 \quad \text{(d. Substit. von III. in IV.)},$$

$$x^2-\frac{2x}{5} = 23 \text{ oder } = -22$$

$$x^2-\frac{2x}{5}+(\tfrac{1}{5})^2 = 23+\tfrac{1}{25} \text{ oder } = \tfrac{1}{25}-22 \quad \text{(durch Ergänzung des Quadr. mit } (\tfrac{1}{5})^2\text{)},$$

$$= \frac{576}{25} \text{ oder } = \frac{-549}{25}$$

$$x-\tfrac{1}{5} = \pm\tfrac{24}{5} \text{ oder } = \pm\tfrac{3}{5}\sqrt{-61} \quad \text{(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

*V. $$x = 5 \text{ oder } = -\tfrac{23}{5} \text{ oder } = \frac{1\pm 3\sqrt{-61}}{5} \quad \text{(durch Versetzung)},$$

*VI. $$y = 3 \text{ oder } = -\tfrac{69}{25} \text{ oder } = \frac{3\pm 9\sqrt{-61}}{25} \quad \text{(durch Substit. von V. in III.)}.$$

Oder:

$$x^2 - \tfrac{21}{29}x - x = 23 \text{ oder } = -22 \text{ (d. Substit. von III. in IV.)},$$

$$x^2 - \tfrac{50}{29}x = 23 \text{ oder } = -22$$

$$x^2 - \tfrac{50}{29}x + (\tfrac{25}{29})^2 = 23 + \tfrac{625}{841} \text{ oder } = \tfrac{625}{841} - 22 \text{ (d. Ergänz. des}$$

$$= \tfrac{19968}{841} \text{ oder } = -\tfrac{17877}{841} \text{ Quadr. mit } (\tfrac{25}{29})^2),$$

$$x - \tfrac{25}{29} = \pm \tfrac{16}{29}\sqrt{78} \text{ oder } = \pm \tfrac{1}{29}\sqrt{-17877} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$\text{*VII.} \quad x = \frac{25 \pm 16\sqrt{78}}{29} \text{ oder } = \frac{25 \pm \sqrt{-17877}}{29} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\text{*VIII.} \quad y = \frac{-525 \mp 336\sqrt{78}}{841} \text{ od. } = \frac{-525 \mp 21\sqrt{-17877}}{841}$$

(durch Substit. von VII. in III.).

Anmerkung. Die Gleichung I. lässt sich auch folgendermassen vereinfachen:

$$\frac{(x+y+\sqrt{x^2-y^2})^2}{2xy+2y^2} = \frac{9}{8y}(x+y) \text{ (durch Mult. von Zähler u. Nenner mit } x+y+\sqrt{x^2-y^2}),$$

$$(x+y+\sqrt{x^2-y^2})^2 = \tfrac{9}{4}(x+y)^2 \text{ [durch Mult. mit } 2y(x+y)],$$

$$x+y+\sqrt{x^2-y^2} = \pm \tfrac{3}{2}(x+y) \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{x+y} \text{ (durch Division mit } \sqrt{x+y}),$$

wonach das Weitere wie oben folgt; oder auch folgendermassen:

$$\frac{2xy+2y^2}{(x+y-\sqrt{x^2-y^2})^2} = \frac{9}{8y}(x+y) \text{ (durch Mult. von Zähler u. Nenner mit } x+y-\sqrt{x^2-y^2}),$$

$$\frac{2y}{(x+y-\sqrt{x^2-y^2})^2} = \frac{9}{8y} \text{ (durch Division mit } x+y),$$

$$\frac{16y^2}{9} = (x+y-\sqrt{x^2-y^2})^2 \text{ (durch Multiplikation mit } \frac{8y(x+y-\sqrt{x^2-y^2})^2}{9}\text{)},$$

$$\pm \tfrac{4}{3}y = x+y-\sqrt{x^2-y^2} \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$\sqrt{x^2-y^2} = x+(1 \mp \tfrac{4}{3})y \text{ (durch Versetzung)},$$

$$= x - \tfrac{1}{3}y \text{ oder } = x + \tfrac{7}{3}y$$

$$x^2 - y^2 = x^2 - \tfrac{2}{3}xy + \frac{y^2}{9} \text{ oder } = x^2 + \tfrac{14}{3}xy + \tfrac{49}{9}y^2 \text{ (d. Erheben zum Quadr.)},$$

$$\tfrac{2}{3}xy = \tfrac{10}{9}y^2 \quad \text{(durch Weglassen der gleichen Glieder und Versetzen)}, \quad \tfrac{14}{3}xy = -\tfrac{58}{9}y^2$$

$$\tfrac{3}{5}x = y \quad \text{(durch Division mit } \tfrac{10}{9}y \text{ oder } -\tfrac{58}{9}y), \quad -\tfrac{21}{29}x = y$$

Um die Zeichen von $\sqrt{x^2-y^3}$ beim Einsetzen der Wurzeln in die erste Hauptgleichung richtig zu bestimmen, erinnere man sich, dass für die aus $y=\frac{3}{5}x$ hervorgegangenen Werthe: $\sqrt{x^2-y^2} = x-\frac{1}{3}y = x-\frac{1}{5}x = \frac{4}{5}x$ ist, und dass für die aus $y=-\frac{147}{29}x$ hervorgegangenen $\sqrt{x^2-y^2} = x+\frac{1}{3}y = x-\frac{49}{29}x = -\frac{20}{29}x$ ist, wie aus der letzten Auflösung hervorgeht.

Nr. 36.

$$\begin{cases} \text{I.} & \frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}} = 5 \\ \text{II.} & \frac{2x^2}{y}-\frac{x}{3\sqrt{y}} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Auflösung. $\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{y}{x}} = 5$ (aus I. weil $\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{y^2x}{x^2y}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$ und $\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}} = \sqrt[4]{\frac{x^2}{y^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}} = \sqrt[4]{\frac{x^2y^3}{y^2x^3}} = \sqrt[4]{\frac{y}{x}}$ ist),

$$\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}+\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 5+\frac{1}{16} = \frac{81}{16} \text{ (durch Ergänz. des Quadr. mit } (\tfrac{1}{4})^2\text{)},$$

$$\sqrt[4]{\frac{y}{x}}+\frac{1}{4} = \pm\frac{9}{4} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$\sqrt[4]{\frac{y}{x}} = 2 \text{ oder } = -\frac{5}{2} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\frac{y}{x} = 16 \text{ oder } = \frac{625}{16} \text{ (d. Erheb. z. 4ten Potenz)},$$

III. $$y = 16x \text{ oder } = \frac{625}{16}x \text{ (durch Mult. mit } x\text{)},$$

$$\frac{x^2}{y}-\frac{x}{6\sqrt{y}} = \frac{1}{6} \text{ (aus II. durch Division mit 2)},$$

$$\frac{x^2}{y}-\frac{x}{6\sqrt{y}}+\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{6}+\frac{1}{144} = \frac{25}{144} \text{ (durch Ergänzung des Quadr. mit } (\tfrac{1}{12})^2\text{)},$$

$$\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{1}{12} = \pm\frac{5}{12} \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \text{ oder } = -\frac{1}{3} \text{ (durch Versetzung)},$$

IV. $$x = \frac{1}{2}\sqrt{y} \text{ oder } = -\frac{1}{3}\sqrt{y} \text{ (d. Mult. mit } \sqrt{y}\text{)},$$

$$y = 8\sqrt{y} \text{ oder } = \frac{625}{32}\sqrt{y};\quad y = -\frac{16}{3}\sqrt{y} \text{ oder } = -\frac{625}{48}\sqrt{y}$$

(durch Substit. von IV. in III.),

V. $\sqrt{y} = 8$ oder $= \frac{625}{32}$; $\sqrt{y} = -\frac{16}{3}$ oder $= -\frac{625}{48}$
(durch Division mit $\sqrt{y}$),

*VI. $y = 64$ oder $= \frac{390625}{1024}$; $y = \frac{256}{9}$ oder $= \frac{390625}{2304}$
(durch Erheben zum Quadrat),

*VII. $x = 4$ oder $= \frac{625}{64}$; $x = \frac{16}{9}$ oder $= \frac{625}{144}$
(durch Substit. von V. in IV.).

Bei Einsetzung der Wurzeln in die Hauptgleichung übersehe man nicht, dass für zwei derselben $\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}} = \left(\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^3 = (-\frac{5}{2})^3 = -\frac{125}{8}$ ist.

Nr. 37.

$$\begin{cases} \text{I.} & \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1 \\ \text{II.} & \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{y^3x} = 78. \end{cases}$$

Auflösung.

III. $x + y = 61 + \sqrt{xy}$ (aus I. d. Mult. mit $\sqrt{xy}$),

$x + 2\sqrt{xy} + y = 61 + 3\sqrt{xy}$ (durch Add. von $2\sqrt{xy}$),

IV. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \pm\sqrt{61 + 3\sqrt{xy}}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

V. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{78}{\sqrt[4]{xy}}$ (aus II. durch Div. mit $\sqrt[4]{xy}$),

$\frac{78}{\sqrt[4]{xy}} = \pm\sqrt{61 + 3\sqrt{xy}}$ (durch Substit. von V. in IV.),

$\frac{6084}{\sqrt{xy}} = 61 + 3\sqrt{xy}$ (d. Erheben zum Quadr.),

$6084 = 61\sqrt{xy} + 3xy$ (d. Mult. mit $\sqrt{xy}$),

$xy + \frac{61}{3}\sqrt{xy} = 2028$ (durch Division mit 3),

$xy + \frac{61}{3}\sqrt{xy} + (\frac{61}{6})^2 = 2028 + \frac{3721}{36}$ (durch Ergänzung des
$= \frac{76729}{36}$ Quadrats mit $(\frac{61}{6})^2$),

$\sqrt{xy} + \frac{61}{6} = \pm\frac{277}{6}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

VI. $\sqrt{xy} = \frac{-61 \pm 277}{6}$ (durch Versetzung),
$= 36$ oder $= -\frac{169}{3}$

$xy = 1296$ oder $= \frac{28561}{9}$ (durch Erheben zum Quadrat),

VII. $4xy = 5184$ oder $= \frac{114244}{9}$ (durch Mult. mit 4),

VIII. $x+y = 97$ oder $= \frac{14}{3}$ (d. Substit. von VI. in III.),

IX. $x^2+2xy+y^2 = 9409$ oder $= \frac{196}{9}$ (d. Erheben ins Quadr.),

$x^2-2xy+y^2 = 4225$ oder $= -12672$ (durch Subtr. von VII. von IX.),

X. $x-y = \pm 65$ oder $= \pm 24\sqrt{-22}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

*XI. $x = 81$ oder $= 16$ oder $= \frac{7}{3} \pm 12\sqrt{-22}$ (d. Add. von VIII. u. X. und Div. durch 2),

*XII. $y = 16$ oder $= 81$ oder $= \frac{7}{3} \mp 12\sqrt{-22}$ (d. Subtr. von X. von VIII. und Div. durch 2).

Anmerkung. Andere Auflösungen sind folgende:

XIII. $x+2\sqrt{xy}+y = 61+3\sqrt{xy}$

XIV. $x-2\sqrt{xy}+y = 61-\sqrt{xy}$ (durch Subtr. von $4\sqrt{xy}$),

$x+2\sqrt{xy}+y = 61+108$ oder $= 61-169$ (d. Substit.
$= 169$ oder $= -108$ von VI. in XIII.),

XV. $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \pm 13$ oder $= \pm 6\sqrt{-3}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$x-2\sqrt{xy}+y = 61-36$ oder $= 61+\frac{169}{3}$ (durch Substit.
$= 25$ oder $= \frac{352}{3}$ von VI. in XIV.),

XVI. $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \pm 5$ oder $= \pm\sqrt{\frac{22}{3}}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{x} = \pm 9$ oder $= \pm 4$ od. $= \pm 3\sqrt{-3} \pm 2\sqrt{\frac{22}{3}}$ (d. Add. von XV. u. XVI. und Div. mit 2),

XVII. $x = 81$ oder $= 16$ oder $= \frac{7}{3} \pm 12\sqrt{-22}$ (durch Erheben zum Quadrat),

$\sqrt{y} = \pm 4$ oder $= \pm 9$ oder $= \pm 3\sqrt{-3} \mp 2\sqrt{\frac{22}{3}}$ (d. Subtr. v. XVI. von XV. und Div. durch 2),

XVIII. $y = 16$ oder $= 81$ oder $= \frac{7}{3} \mp 12\sqrt{-22}$ (durch Erheben zum Quadrat).

Eine andere Aufsuchung von $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ergiebt sich aus:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \frac{78}{\sqrt[4]{xy}}$$

$$= \frac{78}{\pm 6} \text{ oder } = \frac{78}{\pm\sqrt{-\frac{169}{3}}} \text{ (durch Substit. von VI. in V.),}$$

$$= \pm 13 \text{ oder } = \pm 6\sqrt{-3}.$$

Da die hier vorkommenden Operationen beinahe nur rein quadratische sind, so wird es dem Schüler leicht werden, sie noch in anderer Weise zu combiniren.

Bei der Einsetzung des zweiten Paares der Wurzeln in die Hauptgleichung berücksichtige man, dass $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$ ist und dass $\sqrt{xy}=-\frac{169}{3}$ und dass $\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=\sqrt[4]{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ $=\sqrt{-\frac{169}{3}}.(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ ist. Die Ausdrücke $\sqrt{\frac{1}{3}\pm 12\sqrt{-22}}+\sqrt{\frac{1}{3}\mp 12\sqrt{-22}}$ endlich lassen sich nach den bereits in der 30sten Aufgabe angezeigten Formeln behandeln.

Nr. 38.

$$\begin{cases} \text{I.} & x+\sqrt{3y^2-11+2x} = 7+2y-y^2 \\ \text{II.} & \sqrt{3y-x+7} = \dfrac{x+y}{x-y}. \end{cases}$$

Auflösung.

$$\sqrt{3y^2-11+2x} = 7+2y-y^2-x \text{ (aus I. durch Vers.)},$$

$$3y^2-11+2x = 49+4y^2+y^4+x^2+28y-14y^2-14x-4y^3-4xy+2xy^2 \text{ (durch Erheben zum Quadr.)},$$

$$x^2-(16+4y-2y^2)x = 4y^3+13y^2-28y-y^4-60 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$x^2-(16+4y-2y^2)x+(8+2y-y^2)^2 = 4y^3+13y^2-28y-y^4-60+64+y^4+4y^2+32y-16y^2-4y^3$$

$$= 4+4y+y^2 \text{ (d. Ergänz. des Quadr.)},$$

$$x-8-2y+y^2 = \pm(y+2) \text{ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$x = 8+2y-y^2\pm(y+2) \text{ (d. Versetzung)},$$

$$\text{III.} \quad = 10+3y-y^2 \text{ oder } = 6+y-y^2.$$

Die Gleichung $x=10+3y-y^2$ ist für elementare Behandlung unbrauchbar, indem ihre Einsetzung in II. auf eine Gleichung 6ten Grades führt; dagegen ergiebt sich für $x=6+y-y^2$:

$$\sqrt{3y-6-y+y^2+7} = \frac{6+y-y^2+y}{6+y-y^2-y} \text{ (d. Substit. von III. in II.)},$$

$$\sqrt{y^2+2y+1} = \frac{6+2y-y^2}{6-y^2}$$

$$\pm(y+1) = \frac{6+2y-y^2}{6-y^2}$$

Die Gleichung $-(y+1)=\frac{6+2y-y^2}{6-y^2}$ ist ebenfalls für elementare Behandlung unbrauchbar, dagegen giebt

$$y+1 = \frac{6+2y-y^2}{6-y^2}$$

$$6y+6-y^3-y^2 = 6+2y-y^2 \text{ (durch Mult. mit } 6-y^2\text{)},$$
$$4y = y^3 \text{ (d. Weglassen der gleichen Glieder u. Vers.)},$$
$$y^2 = 4 \text{ (durch Division mit } y\text{)},$$
$$\text{*IV.} \quad y = \pm 2 \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$x = 6 \pm 2 - 4 \text{ (durch Substit. von IV. in III.)},$$
$$\text{*V.} \quad = 4 \text{ oder } = 0.$$

Anmerkung. Das zweite Paar Wurzeln, nemlich $x = 0$ und $y = -2$ entspricht den Gleichungen: $x - \sqrt{3y^2 - 11 + 2x} = 7+2y-y^2$ und $-\sqrt{3y-x+7} = \frac{x+y}{x-y}$.

Nr. 39.

$$\begin{cases} \text{I.} \quad x^4+y^4 = 1+2xy+3x^2y^2 \\ \text{II.} \quad x^3+y^3 = 2y^2x+2y^2+x+1. \end{cases}$$

Auflösung.

$$x^4-2x^2y^2+y^4 = 1+2xy+x^2y^2 \text{ (aus I. durch Subtr. von } 2x^2y^2\text{)},$$
$$\text{III.} \quad x^2-y^2 = \pm(1+xy) \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)}.$$

Die Gleichung $x^2-y^2 = -(1+xy)$ ist für elementare Behandlung unbrauchbar, dagegen giebt:

$$x^2-y^2 = 1+xy$$
$$x^2-xy-y^2 = 1 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$\text{IV.} \quad x^2-xy+y^2 = 1+2y^2 \text{ (durch Add. von } 2y^2\text{)},$$
$$x+y = x+1 \text{ (durch Division von II. durch IV.)},$$
$$\text{*V.} \quad y = 1 \text{ (durch Weglassen der gleichen Glieder)},$$
$$x^2-1 = 1+x \text{ (durch Substit. von V. in III.)},$$
$$x^2-x = 2 \text{ (durch Versetzung)},$$
$$x^2-x+(\tfrac{1}{2})^2 = 2+\tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4} \text{ (durch Ergänzung des Quadr.)},$$
$$x-\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{3}{2} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$
$$\text{*VI.} \quad x = 2 \text{ oder } = -1 \text{ (durch Versetzung)}.$$

Anmerkung. Die Gleichung $x^2-y^2 = -1-xy$ liesse sich auf analoge Weise wie oben $x^2-y^2 = 1+xy$ anwenden, wenn die II. Gleichung $x^3-y^3 = 2y^2x \pm 2y^2 - x \mp 1$ wäre.

Nr. 40.

$$\begin{cases} \text{I.} \quad x^2y-4 = 4x^{\frac{1}{2}}y-\frac{y^3}{4} \\ \text{II.} \quad x^{\frac{3}{2}}-3 = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Auflösung.

$$x^2y+\frac{y^3}{4} = 4+4x^{\frac{1}{2}}y \text{ (aus I. durch Versetzung)},$$

$$x^2y+xy^2+\frac{y^3}{4} = 4+4x^{\frac{1}{2}}y+xy^2 \text{ (durch Addition von } xy^2\text{)},$$

$$\text{III.}\quad xy^{\frac{1}{2}}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2} = \pm(2+x^{\frac{1}{2}}y) \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel).}$$

Die Gleichung $xy^{\frac{1}{2}}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2} = -(2+x^{\frac{1}{2}}y)$ ist für elementare Behandlung untauglich. Dagegen giebt

$$xy^{\frac{1}{2}}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2} = 2+x^{\frac{1}{2}}y$$

$$\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2}-x^{\frac{1}{2}}y+xy^{\frac{1}{2}} = 2 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$\text{IV.}\quad y^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}y+2xy^{\frac{1}{2}} = 4 \text{ (durch Multiplikation mit 2),}$$

$$\text{V.}\quad x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-xy^{\frac{1}{2}} = 3 \text{ (aus II. durch Versetzung),}$$

$$y^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}y+3xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}} = 1 \text{ (durch Subtr. von V. von IV.),}$$

$$y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ (d. Ausziehen der Kub.-Wurzel),}$$

$$\text{VI.}\quad y^{\frac{1}{2}} = 1+x^{\frac{1}{2}} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$\text{VII.}\quad y = 1+2x^{\frac{1}{2}}+x \text{ (d. Erheben z. Quadr.),}$$

$$x^{\frac{3}{2}}-x-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}(1+2x^{\frac{1}{2}}+x) = 3 \text{ (d. Subst. von VI. u. VII. in V.),}$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}} = 3 \text{ (d. Auflösen der Klammern),}$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}}+1 = 4 \text{ (durch Add. von 1),}$$

$$x^2-1 = 4x^{\frac{1}{2}}-4 \text{ (d. Mult. mit } x^{\frac{1}{2}}-1\text{),}$$

$$x^2+4 = 4x^{\frac{1}{2}}+1 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$x^2+4x+4 = 4x+4x^{\frac{1}{2}}+1 \text{ (d. Add. von } 4x\text{),}$$

$$x+2 = \pm(2x^{\frac{1}{2}}+1) \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$x-2x^{\frac{1}{2}}+1 = 0; \qquad x+2x^{\frac{1}{2}}+1 = -2$$

(durch Versetzung),

$$x^{\frac{1}{2}}-1 = 0; \qquad x^{\frac{1}{2}}+1 = \pm\sqrt{-2}$$

(durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$$\text{VIII.}\quad x^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ (d. Versetzung)} \qquad x^{\frac{1}{2}} = -1\pm\sqrt{-2}$$

$$\text{*IX.}\quad x = 1; \qquad x = -1\mp2\sqrt{-2}$$

(d. Erheben zum Quadrat),

$$y^{\frac{1}{2}} = 2; \qquad y^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{-2}$$

(d. Substit. von VIII. in VI.),

$$\text{*X.}\quad y = 4 \text{ (d. Erh. zum Quadr.)} \qquad y = -2.$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende, die sich ergiebt aus: $x^{\frac{3}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}} = 3$

$$x^{\frac{3}{2}}+2x+3x^{\frac{1}{2}} = x+2x^{\frac{1}{2}}+3 \text{ (d. Add. von } x+2x^{\frac{1}{2}}),$$
$$x^{\frac{1}{2}}(x+2x^{\frac{1}{2}}+3) = x+2x^{\frac{1}{2}}+3$$
$$x^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ (durch Division mit } x+2x^{\frac{1}{2}}+3),$$
$$x = 1 \text{ (durch Erheben zum Quadrat).}$$

Die beiden andern Wurzeln ergeben sich alsdann, wenn man $x+2x^{\frac{1}{2}}+3 = 0$ setzt, oder folgendermassen aus:

$$x^{\frac{3}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}} = 3$$
$$x^{\frac{3}{2}}+x-2x^{\frac{1}{2}} = 3-3x^{\frac{1}{2}} \text{ (durch Subtr. von } 3x^{\frac{1}{2}}),$$
$$x^{\frac{3}{2}}+2x-x-2x^{\frac{1}{2}} = 3-3x^{\frac{1}{2}} \text{ (weil } 2x-x=x \text{ ist),}$$
$$(x+2x^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-1) = -3(x^{\frac{1}{2}}-1) \text{ (durch Ausheben der Faktoren),}$$
$$x+2x^{\frac{1}{2}} = -3 \text{ [durch Division mit } (x^{\frac{1}{2}}-1)],$$
$$x+2x^{\frac{1}{2}}+1 = -2 \text{ (durch Addition von 1),}$$

wonach das Weitere wie oben folgt.

Eine fernere Auflösung ist folgende:

$$x^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}-1 \text{ (aus VI. durch Versetzung),}$$
$$y^{\frac{3}{2}}-3y+3y^{\frac{1}{2}}-4 = -x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}} \text{ (d. Substit. von XI. in II.),}$$
$$= y^{\frac{1}{2}}-y$$

Entweder:

XII. $\quad y^{\frac{3}{2}}+2y^{\frac{1}{2}} = 2y+4$ (durch Versetzung),

$\quad y^{\frac{1}{2}}(y+2) = 2(y+2)$ (d. Ausheben der gleichen Fakt.),

XIII. $\quad y^{\frac{1}{2}} = 2$ (durch Division mit $y+2$),

XIV. $\quad y = 4$ (durch Erheben zum Quadrat),

$\quad x^{\frac{1}{2}} = 1$ (durch Substit. von XIII. in XI.),

XV. $\quad x = 1$ (durch Erheben zum Quadrat).

Oder: $\quad y^{\frac{3}{2}}-2y = 4-2y^{\frac{1}{2}}$ (aus XII. durch Versetzung),

$\quad y(y^{\frac{1}{2}}-2) = -2(y^{\frac{1}{2}}-2)$ (durch Ausheben der gleichen Faktoren),

XVI. $\quad y = -2$ (durch Division mit $y^{\frac{1}{2}}-2$),

XVII. $\quad y^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{-2}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\quad x^{\frac{1}{2}} = -1\pm\sqrt{-2}$ (d. Substit. von XVII. in XI.),

XVIII. $\quad x = -1\mp 2\sqrt{-2}$ (d. Erheben zum Quadr.).

Nr. 41.

$$\begin{cases} \text{I.} \quad 5 - 2\sqrt{y+2} = \frac{9x^2}{64} - (\sqrt{x} - 3\sqrt{y})^2 \\ \text{II.} \quad \frac{7}{y} - 10\sqrt{\frac{x}{y}} = x - 16. \end{cases}$$

Auflösung.

$$\text{III.} \quad 5 - 2\sqrt{y+2} = \frac{9x^2}{64} - x - 9y + 6\sqrt{xy} \quad \text{(aus I. durch Auflösen der Klammern)},$$

$$7 - 10\sqrt{xy} = xy - 16y \quad \text{(aus III. durch Mult. mit } y\text{)},$$

$$xy + 10\sqrt{xy} = 7 + 16y \quad \text{(durch Versetzung)},$$

$$xy + 10\sqrt{xy} + 25 = 32 + 16y \quad \text{(durch Ergänzung des Quadrats)},$$

$$\sqrt{xy} + 5 = \pm 4\sqrt{y+2} \quad \text{(durch Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$\text{IV.} \quad \sqrt{xy} = -5 \pm 4\sqrt{y+2} \quad \text{(durch Versetzung)},$$

Der Werth $\sqrt{xy} = -5 - 4\sqrt{y+2}$ ist für elementare Behandlung unbrauchbar. Dagegen giebt der erste:

$$5 - 2\sqrt{y+2} = \frac{9x^2}{64} - x - 9y + 24\sqrt{y+2} - 30 \quad \text{(d. Substit. von IV. in III)},$$

$$9y - 26\sqrt{y+2} = \frac{9x^2}{64} - x - 35 \quad \text{(durch Versetzung)},$$

$$9y + 18 - 26\sqrt{y+2} + \tfrac{169}{9} = \frac{9x^2}{64} - x - 35 + \tfrac{331}{9} \quad \text{(durch Add. von } 18 + \tfrac{169}{9} = \tfrac{331}{9}\text{)},$$

$$9(y+2) - 26\sqrt{y+2} + (\tfrac{13}{3})^2 = \frac{9x^2}{64} - x + \tfrac{16}{9}$$

$$3\sqrt{y+2} - \tfrac{13}{3} = \pm\left(\frac{3x}{8} - \frac{4}{3}\right) \quad \text{(durch Ausz. der Qu.-Wurzel)}.$$

Der Werth $3\sqrt{y+2} - \frac{13}{3} = -\left(\frac{3x}{8} - \frac{4}{3}\right)$ ist für elementare Behandlung unbrauchbar, dagegen giebt der erste:

$$3\sqrt{y+2} = \frac{3x}{8} - \tfrac{4}{3} + \tfrac{13}{3} \quad \text{(durch Versetzung)},$$

$$= \frac{3x}{8} + 3$$

$$\text{V.} \quad \sqrt{y+2} = \frac{x}{8} + 1 \quad \text{(durch Division mit 3)},$$

$$y + 2 = \frac{x^2}{64} + \frac{x}{4} + 1 \quad \text{(durch Erheben zum Quadrat)},$$

$$\text{VI.} \quad y = \frac{x^2}{64} + \frac{x}{4} - 1 \quad \text{(durch Versetzung)},$$

$$\sqrt{xy} = -1 + \frac{x}{2} \text{ (durch Substit. von V. in IV.),}$$

$$xy = 1 - x + \frac{x^2}{4} \text{ (durch Erheben zum Quadrat),}$$

$$\text{VII.} \quad y = \frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{4} \text{ (durch Division mit } x\text{),}$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{x}{4} - 1 = \frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{4} \text{ (durch Substit. von VII. in VI.),}$$

$$\frac{x^2}{64} = \frac{1}{x} \text{ (durch Weglassen der gleichen Glieder),}$$

$$x^3 = 64 \text{ (durch Multiplikation mit } 64x\text{),}$$

$$^*\text{VIII.} \quad x = 4 \text{ (durch Ausziehen der Kubik-Wurzel),}$$

$$^*\text{IX.} \quad y = \tfrac{1}{4} \text{ (durch Substitution von VIII. in VI. oder VII.).}$$

Nr. 42.

$$\begin{cases} \text{I.} \quad \dfrac{y}{2x} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{y - \sqrt{x-1}}{y^2 - 2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} \\ \text{II.} \quad \tfrac{1}{4}y^4 = y^2x - 1. \end{cases}$$

Auflösung.

$$y^4 = 4y^2x - 4 \text{ (aus II. d. Mult. mit 4),}$$

$$y^4 - 4y^2x = -4 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$y^4 - 4y^2x + 4x^2 = 4x^2 - 4 \text{ (d. Ergänz. des Quadr.),}$$

$$y^2 - 2x = \pm 2\sqrt{x^2-1} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$\text{III.} \quad y^2 = 2x \pm 2\sqrt{x^2-1} \text{ (d. Versetzung).}$$

Der Werth $y^2 = 2x - 2\sqrt{x^2-1}$ ist für elementare Behandlung unbrauchbar, dagegen giebt der erste:

$$y^2 = x + 1 + x - 1 + 2\sqrt{x^2-1} \text{ (weil } 2x = x + x \text{ und } 0 = 1 - 1 \text{ ist),}$$

$$= x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + x - 1$$

$$\text{IV.} \quad y = \pm\left[\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right] \text{(d. Ausz. d. Qu.-Wurz.),}$$

$$\frac{y}{2x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y - \sqrt{x-1}}{2x} = \frac{\sqrt{x+1}}{x} \text{ (durch Substit. von III. in I.),}$$

$$\frac{y}{2} + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}\sqrt{x-1} = \sqrt{x+1} \text{ (durch Multiplikation mit } x\text{),}$$

$$\tfrac{5}{6}y = \sqrt{x+1} + \tfrac{1}{3}\sqrt{x-1} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$\text{V.} \quad y = \tfrac{6}{5}\sqrt{x+1} + \tfrac{2}{5}\sqrt{x-1} \text{ (durch Mult. mit } \tfrac{6}{5}\text{),}$$

Entweder:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \tfrac{6}{5}\sqrt{x+1} + \tfrac{2}{5}\sqrt{x-1} \text{ (d. Substit. von IV. in V.),}$$

$$\tfrac{3}{5}\sqrt{x-1} = \tfrac{1}{5}\sqrt{x+1} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$\text{VI.} \quad 3\sqrt{x-1} = \sqrt{x+1} \text{ (durch Mult. mit 5),}$$

$$9x - 9 = x + 1 \text{ (durch Erheben zum Quadrat),}$$

$$8x = 10 \text{ (durch Versetzung),}$$

*VII. $x = \frac{5}{4}$ (durch Division mit 8),

VIII. $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x-1}$

IX. $\sqrt{x-1} = \frac{1}{3}\sqrt{x+1}$ } (aus VI. durch Versetzung),

X. $y = 4\sqrt{x-1}$ oder $= \frac{4}{3}\sqrt{x+1}$ (durch Substit. von VIII. und IX. in IV. oder V.),

$= 4\sqrt{\frac{1}{4}}$ oder $= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{9}{4}}$ (durch Substit. von VII. in X.),

$= 4(\pm\frac{1}{2})$ oder $= \frac{4}{3}(\pm\frac{3}{2})$

*XI. $= \pm 2$.

Oder:

$-\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{6}{5}\sqrt{x+1} + \frac{2}{5}\sqrt{x-1}$ (d. Substit. von IV. in V.),

$-\frac{7}{5}\sqrt{x-1} = \frac{11}{5}\sqrt{x+1}$ (durch Versetzung),

XII. $-7\sqrt{x-1} = 11\sqrt{x+1}$ (durch Mult. mit 5),

$49x - 49 = 121x + 121$ (durch Erheben zum Quadrat),

$72x = -170$ (durch Versetzung),

*XIII. $x = -\frac{85}{36}$ (durch Division mit 72),

XIV. $\sqrt{x+1} = -\frac{7}{11}\sqrt{x-1}$

XV. $\sqrt{x-1} = -\frac{11}{7}\sqrt{x+1}$ } (aus VI. durch Versetzung),

XVI. $y = -\frac{4}{11}\sqrt{x-1}$ oder $= \frac{4}{7}\sqrt{x+1}$ (durch Substit. von VIII. und IX. in IV. oder V.),

$= -\frac{4}{11}\sqrt{-\frac{121}{36}}$ oder $= \frac{4}{7}\sqrt{-\frac{49}{36}}$ (durch Substit. von VII. in X.),

$= -\frac{4}{11}(\pm\frac{11}{6}\sqrt{-1})$ oder $= \frac{4}{7}(\pm\frac{7}{6}\sqrt{-1})$

*XVII. $= \pm\frac{2}{3}\sqrt{-1}$.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich durch Substitution des aus V. folgenden Werthes $y^2 = \frac{8}{5}x + \frac{32}{25} + \frac{24}{25}\sqrt{x^2-1}$ in III. Man erhält hierdurch die Gleichung:

$$16 - 5x = 13\sqrt{x^2-1} \text{ und hieraus}$$

$$x^2 + \frac{10}{9}x = \frac{425}{144}$$

$$x = \frac{5}{4} \text{ oder } = -\frac{85}{36}$$

und durch Substitution dieser Werthe in III.:

$$y^2 = 4 \text{ oder } = -\frac{4}{9}$$

$$y = \pm 2 \text{ oder } = \pm\frac{2}{3}\sqrt{-1}.$$

Diese Auflösung giebt aber nicht, wie die erste, die nöthigen Anhaltspunkte zur Einsetzung der Wurzeln in die Hauptgleichung; denn aus der Entstehung der Gleichungen XI. und XVII. ist ersichtlich, dass für $y = +2$ die beiden Wurzeln $\sqrt{x+1}$ und

$\sqrt{x-1}$ auch positiv, für $y = -2$ aber beide negativ sind, dass ferner für $y = +\frac{2}{3}\sqrt{-1}$ der Werth $\sqrt{x-1} = -\frac{11}{6}\sqrt{-1}$ jener $\sqrt{x+1} = -\frac{7}{11}\sqrt{x-1} = +\frac{7}{6}\sqrt{-1}$ und dass endlich für $y = -\frac{2}{3}\sqrt{-1}$ der Werth $\sqrt{x-1} = \frac{11}{6}\sqrt{-1}$, jener $\sqrt{x+1} = -\frac{7}{11}\sqrt{x-1} = -\frac{7}{6}\sqrt{x-1}$ ist.

Nr. 43.

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & (x-2)y-\sqrt{xy}(y^2-1) = 2y^2-x \\ \text{II.} & \frac{1}{4}xy = \frac{\sqrt{xy}-12}{xy-18}. \end{array}\right.$$

Auflösung.

$xy+x-(y^2-1)\sqrt{xy} = 2y^2+2y$ (aus I. d. Versetzung).

Entweder:

$x(y+1)-(y+1)(y-1)\sqrt{xy} = 2y(y+1)$ (durch Ausheben gleicher Faktoren),

$x-(y-1)\sqrt{xy} = 2y$ (durch Division mit $y+1$),

$x-2y = (y-1)\sqrt{xy}$ (d. Versetzung),

III. $\sqrt{xy} = \frac{x-2y}{y-1}$ (durch Div. mit $y-1$),

Oder: $xy-2y^2-y^2\sqrt{xy} = -\sqrt{xy}+2y-x$ (aus I. durch Versetzung),

$xy-2y^2-y^2\sqrt{xy}+y\sqrt{xy} = y\sqrt{xy}-\sqrt{xy}+2y-x$ (durch Addition von $y\sqrt{xy}$),

$y(x-2y-(y-1)\sqrt{xy}) = -(x-2y-(y-1)\sqrt{xy})$ (d. Ausheben gleicher Faktoren),

*IV. $y = -1$ (d. Division mit $x-2y-(y-1)\sqrt{xy}$),

$\frac{1}{4}(xy)^2-\frac{9}{2}xy = \sqrt{xy}-12$ (aus II. durch Mult. mit $xy-18$),

$\frac{1}{4}(xy)^2-\frac{7}{2}xy+(\frac{7}{2})^2 = xy+\sqrt{xy}-12+\frac{49}{4}$ (durch Add. von $xy+(\frac{7}{2})^2$),

$= xy+\sqrt{xy}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}xy-\frac{7}{2} = \pm(\sqrt{xy}+\frac{1}{2})$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

V. $xy-7 = \pm(2\sqrt{xy}+1)$ (d. Mult. mit 2),

$xy-2\sqrt{xy} = 8$ (d. Versetzung) $xy+2\sqrt{xy} = 6$

$xy-2\sqrt{xy}+1 = 9$; $xy+2\sqrt{xy}+1 = 7$

(durch Ergänzung des Quadrats),

$\sqrt{xy}-1 = \pm 3$; $\sqrt{xy}+1 = \pm\sqrt{7}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

VI. $$\sqrt{xy} = 4 \text{ oder } = -2; \qquad \sqrt{xy} = -1 \pm \sqrt{7}$$

(durch Versetzung),

VII. $$xy = 16 \text{ oder } = 4; \qquad xy = 8 \mp 2\sqrt{7}$$

(durch Erheben zum Quadrat),

VIII. $$x = \frac{16}{y} \text{ oder} = \frac{4}{y}; \qquad x = \frac{8 \mp 2\sqrt{7}}{y}$$

(durch Division mit y).

Entweder:

$$\frac{x-2y}{y-1} = 4; \qquad \frac{x-2y}{y-1} = -1+\sqrt{7}$$

(durch Substit. von VI. in III.),

$$x-2y = 4y-4; \qquad x-2y = -y+y\sqrt{7}+1-\sqrt{7}$$

(durch Multiplikation mit $y-1$),

IX. $$x = 6y-4; \qquad x = y(1+\sqrt{7})+(1-\sqrt{7})$$

(durch Versetzung),

$$6y^2-4y = 16; \qquad y^2(1+\sqrt{7})+(1-\sqrt{7})y = 8-2\sqrt{7}$$

(durch Substitution von IX. in VII.),

$$y^2-\tfrac{2}{3}y = \tfrac{8}{3}; \qquad y^2+\frac{1-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}y = \frac{8-2\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$$

(durch Division mit dem Coefficienten von y^2),

$$y^2-\tfrac{2}{3}y+(\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{8}{3}+\tfrac{1}{9}; \qquad y^2+\frac{1-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}y+\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})}\right)^2$$

$$= \tfrac{25}{9}; \quad \text{(durch Ergänzung des Quadrats)} \quad = \frac{8-2\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}+\frac{8-2\sqrt{7}}{4(1+\sqrt{7})^2} = \frac{(8-2\sqrt{7})\,.\,(5+4\sqrt{7})}{4(1+\sqrt{7})^2}$$

$$y-\tfrac{1}{3} = \pm\tfrac{5}{3}; \qquad y+\frac{1-\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})} = \pm\frac{1-\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})}\sqrt{5+4\sqrt{7}}$$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$$y = \frac{1 \pm 5}{3}; \qquad y = \frac{1-\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})}\left[-1 \pm \sqrt{5+4\sqrt{7}}\right]$$

*X. $$= 2 \text{ od.} = -\tfrac{4}{3}; \qquad = \frac{4-\sqrt{7}}{6}\left[1 \mp \sqrt{5+4\sqrt{7}}\right]$$

(durch Versetzung),

$$x = \frac{16}{y} \text{ od.} = 6y-4; \qquad x = \frac{8-2\sqrt{7}}{y} \text{ od.} = y(1+\sqrt{7})+1-\sqrt{7}$$

*XI. $$= 8 \text{ oder } = -12; \qquad = \frac{1-\sqrt{7}}{2}(1 \pm \sqrt{5+4\sqrt{7}})$$

(durch Substit. von X. in VIII. oder IX.).

Oder: $\frac{x-2y}{y-1} = -2$ (durch Substit. von VI. in III.),

$x-2y = -2y+2$ (durch Mult. mit $y-1$),

*XII. $x = 2$ (d. Weglassen der gleich. Glieder),

XIII. $y = \frac{4}{x}$ (aus VII. durch Div. mit x),

*XIV. $= 2$ (durch Substit. von XII. in XIII.).

Oder: $\frac{x-2y}{y-1} = -1-\sqrt{7}$ (d. Substit. von VI. in III.),

$x-2y = -y-\sqrt{7}.y+1+\sqrt{7}$ (durch Mult. mit $y-1$),

XV. $x = y(1-\sqrt{7})+1+\sqrt{7}$ (d. Versetzung),

$y^2(1-\sqrt{7})+(1+\sqrt{7})y = 8+2\sqrt{7}$ (d. Substit. von XV. in VII.),

$y^2+\frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}y = \frac{8+2\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}$ (durch Div. mit $1-\sqrt{7}$),

$y^2+\frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}y+\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2(1-\sqrt{7})}\right)^2 = \frac{8+2\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}+\frac{8+2\sqrt{7}}{4(1-\sqrt{7})^2}$

$= \frac{8+2\sqrt{7}}{4(1-\sqrt{7})^2}(5-4\sqrt{7})$ (d. Ergänz. des Quadr.),

$y+\frac{1+\sqrt{7}}{2(1-\sqrt{7})} = \pm\frac{1+\sqrt{7}}{2(1-\sqrt{7})}\sqrt{5-4\sqrt{7}}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$y = \frac{1+\sqrt{7}}{2(1-\sqrt{7})}[-1\pm\sqrt{5-4\sqrt{7}}]$ (d. Versetzung),

*XVI. $= \frac{4+\sqrt{7}}{6}(1\mp\sqrt{5-4\sqrt{7}})$

$x = \frac{8+2\sqrt{7}}{y}$ oder $= y(1-\sqrt{7})+1+\sqrt{7}$ (d. Substit. v. XVI. in VIII. oder XV.),

*XVII. $= \frac{1+\sqrt{7}}{2}(1\pm\sqrt{5-4\sqrt{7}})$.

Oder endlich: $x = \frac{16}{y}$ oder $= \frac{4}{y}$ oder $= \frac{8\mp 2\sqrt{7}}{y}$

*XVIII. $= -16$ oder $= -4$ oder $= -8\pm 2\sqrt{7}$ (durch Substit. von IV. in VIII.).

Nr. 44.

I. $3x-x\sqrt{\frac{5x^2}{4}-2y+8} = 2-y$

II. $\frac{\sqrt{x+y}}{2x}-\frac{1}{4}x = \frac{2x-3}{\sqrt{x+y}}-\frac{3y}{2x}$.

Auflösung. $2-y+x\sqrt{\frac{5x^2}{4}-2y+8} = 3x$ (aus I. d. Vers. u. Mult. mit -1),

$4-2y+2x\sqrt{\frac{5x^2}{4}-2y+8} = 6x$ (d. Mult. mit 2),

$\frac{5x^2}{4}-2y+8+2x\sqrt{\frac{5x^2}{4}-2y+8}+x^2 = 4+6x+\frac{9x^2}{4}$ (durch Add. von $4+\frac{5x^2}{4}+x^2 = 4+\frac{9}{4}x^2$),

$\sqrt{\frac{5x^2}{4}-2y+8}+x = \pm(2+\frac{3}{2}x)$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{\frac{5x^2}{4}-2y+8} = -x\pm(2+\frac{3}{2}x)$ (durch Versetzung),

$= 2+\frac{x}{2}$ oder $= -\frac{5}{2}x-2$

$\frac{5x^2}{4}-2y+8 = 4+2x+\frac{x^2}{4}$ oder $= \frac{25x^2}{4}+10x+4$

$-2y = -4+2x-x^2$ oder $= 10x-4+5x^2$

III. $y = \frac{x^2}{2}-x+2$ oder $= 2-5x-\frac{5x^2}{2}$

$x+y-\frac{3x^2}{2}\sqrt{x+y} = 4x^2-6x-3y\sqrt{x+y}$ (aus II. d. Mult. mit $2x\sqrt{x+y}$),

IV. $x+y+\left(3y-\frac{3x^2}{2}\right)\sqrt{x+y} = 4x^2-6x$ (durch Versetzung).

Der Werth $y=2-5x-\frac{5x^2}{2}$ ist für elementare Behandlung unbrauchbar, dagegen giebt der erste:

$\frac{x^2}{2}+2+(6-3x)\sqrt{\frac{x^2}{2}+2} = 4x^2-6x$ (durch Substit. von III. in IV.),

$\frac{x^2}{2}+2+(6-3x)\sqrt{\frac{x^2}{2}+2}+\left(3-\frac{3x}{2}\right)^2 = 4x^2-6x+9-9x+\frac{9x^2}{4}$

$= \frac{25}{4}x^2-15x+9$ (d. Ergänz. des Quadr.),

$\sqrt{\frac{x^2}{2}+2}+3-\frac{3x}{2} = \pm\left[\frac{5x}{2}-3\right]$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{\frac{x^2}{2}+2} = \frac{3x}{2}-3\pm\left(\frac{5x}{2}-3\right)$

$= 4x-6$ oder $= -x$ (durch Versetzung),

$$\frac{x^2}{2}+2 = 16x^2-48x+36 \text{ oder } = x^2.$$

Entweder: $-34 = \frac{31}{2}x^2-48x$ (durch Versetzung),

$x^2-\frac{96}{31}x = -\frac{68}{31}$ (durch Mult. mit $\frac{2}{31}$),

$x^2-\frac{96}{31}x+\left(\frac{48}{31}\right)^2 = \frac{2304}{31^2}-\frac{68}{31}$ (d. Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{48}{31})^2$),

$= \frac{196}{31^2}$

$x-\frac{48}{31} = \pm\frac{14}{31}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$x = \frac{48\pm 14}{31}$ (durch Versetzung),

*V. $= 2$ oder $= \frac{34}{31}$

$y = 2-2+2$ oder $= \frac{578}{961}-\frac{34}{31}+2$ (durch Substit. von V, in III).

*VI. $= 2$ oder $= \frac{1446}{961}$

Oder: $\frac{x^2}{2}+2 = x^2$

$2 = \frac{x^2}{2}$ (durch Versetzung),

$x^2 = 4$ (durch Mult. mit 2),

*VII. $x = \pm 2$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$y = 2-2+2$ oder $= 2+2+2$ (durch Substit. von VII. in III.).

*VIII. $= 2$ oder $= 6$

Nr. 45.

I. $x^2-y^2 = 3$

II. $(x^4+y^4)^2+x^2y^2(x^2-y^2)^2+x^2-y^2 = 328.$

Auflösung.

$(x^4+y^4)^2+x^2y^2(x^4-2x^2y^2+y^4) = 325$ (durch Subtr. von I. von II.),

$(x^4+y^4)^2+x^2y^2(x^4+y^4)-2x^4y^4 = 325$ (durch Auflösen der Klammern),

$(x^4+y^4)^2+x^2y^2(x^4+y^4)+\frac{x^4y^4}{4} = 325+\frac{9x^4y^4}{4}$ (durch Add. von $\frac{9}{4}x^4y^4$),

III. $x^4+y^4+\frac{x^2y^2}{2} = \pm\sqrt{325+\frac{9x^4y^4}{4}}$ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel),

IV. $x^4+y^4-2x^2y^2 = 9$ (d. Erheben z. Quadr. aus II.),

$\frac{5x^2y^2}{2} = -9\pm\sqrt{325+\frac{9x^4y^4}{4}}$ (durch Subtr. von IV. von III.),

$$\frac{5x^2y^2}{2}+9 = \pm\sqrt{325+\frac{9x^4y^4}{4}} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$\tfrac{25}{4}x^4y^4+45x^2y^2+81 = 325+\frac{9x^4y^4}{4} \text{ (d. Erheben zum Quadr.),}$$

$$4x^4y^4+45x^2y^2 = 244 \text{ (durch Versetzung),}$$

$$x^4y^4+\tfrac{45}{4}x^2y^2 = 61 \text{ (durch Division mit 4),}$$

$$x^4y^4+\tfrac{45}{4}x^2y^2+(\tfrac{45}{8})^2 = \tfrac{2025}{64}+61 \text{ (durch Ergänz. des Quadr.}$$
$$= \tfrac{5929}{64} \text{ mit } (\tfrac{45}{8})^2\text{),}$$

$$x^2y^2+\tfrac{45}{8} = \pm\tfrac{77}{8} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

V. $x^2y^2 = 4$ oder $= -\frac{61}{4}$ (durch Versetzung),

VI. $4x^2y^2 = 16$ oder $= -61$ (durch Mult. mit 4),

$x^4+y^4+2x^2y^2 = 25$ oder $= -52$ (d. Add. von IV. u. V.),

VII, $x^2+y^2 = \pm 5$ oder $= \pm 2\sqrt{-13}$ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

VIII. $x^2 = 4$ oder $= -1$ oder $= \frac{3\pm 2\sqrt{-13}}{2}$

(d. Add. von I. und VII. und Div. durch 2),

*IX. $x = \pm 2$ oder $= \pm\sqrt{-1}$ oder $= \pm\sqrt{\frac{3\pm 2\sqrt{-13}}{2}}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

$y^2 = 1$ oder $= -4$ oder $= \frac{-3\pm 2\sqrt{-13}}{2}$ (d. Subtr. von I. von VII. und Div. durch 2 oder Substit. von VIII. in I. oder V. oder VII.),

*X. $y = \pm 1$ oder $= \pm 2\sqrt{-1}$ oder $= \pm\sqrt{\frac{-3\pm 2\sqrt{-13}}{2}}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel).

Anmerkung. Die beiden Gleichungen I. und V. lassen sich auch noch dadurch verbinden, dass man für x^2 oder y^2 aus einer der beiden Gleichungen einen Werth sucht und in die andere substituirt; Verfahren, die zu einfach sind, um hier noch wiederholt zu werden.

Aus
$$x^2-y^2 = 3$$
$$x^2+y^2 = s$$
folgt:
$$x^2 = \frac{s+3}{2}$$
$$y^2 = \frac{s-3}{2}$$

und durch Substitution dieser Werthe in II. ergiebt sich nach gehöriger Reduction:

$$s^4 + 27s^2 = 1300$$
$$s^2 = \frac{-27 \mp 77}{2}$$
$$= 25 \text{ oder } = -52$$
$$s = x^2 + y^2 = \pm 5 \text{ oder } = \pm 2\sqrt{-13}.$$

woraus das Uebrige wie oben folgt.

Nr. 46.

$$\begin{cases} \text{I.} & \dfrac{x^2y^2}{2} + 4 - 40y^2 = 140 - y^2\sqrt{x^2 - \dfrac{272}{y^2}} \\ \text{II.} & x^2 - \dfrac{2}{y}\left(\dfrac{3}{y} + 15x\right) = \dfrac{30}{y^2} + \dfrac{5x}{y}. \end{cases}$$

Auflösung.

$$\frac{x^2y^2}{2} - 136 + y^2\sqrt{x^2 - \frac{272}{y^2}} = 40y^2 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$x^2y^2 - 272 + 2y\sqrt{x^2y^2 - 272} = 80y^2 \text{ (durch Mult. mit 2 und}$$

$$\text{weil } y^2\sqrt{x^2 - \frac{272}{y^2}} = y^2 \cdot \sqrt{\frac{x^2y^2 - 272}{y^2}} = y\sqrt{x^2y^2 - 272} \text{ ist}),$$

$$x^2y^2 - 272 + 2y\sqrt{x^2y^2 - 272} + y^2 = 81y^2 \text{ (d. Ergänz. des Quadr.)},$$

$$\sqrt{x^2y^2 - 272} + y = \pm 9y \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$\sqrt{x^2y^2 - 272} = 8y \text{ oder } = -10y \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\text{III.} \quad x^2y^2 - 272 = 64y^2 \text{ oder } = 100y^2 \text{ (d. Erheben z. Quadr.)},$$

$$x^2 - \frac{6}{y^2} - \frac{30x}{y} = \frac{30}{y^2} + \frac{5x}{y} \text{ (aus II. d. Aufl. der Klammern)},$$

$$x^2 - \frac{35x}{y} = \frac{36}{y^2} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$x^2y^2 - 35xy = 36 \text{ (durch Multiplikation mit } y^2),$$

$$x^2y^2 - 35xy + (\tfrac{35}{2})^2 = 36 + \tfrac{1225}{4} \text{ (d. Ergänzung des Quadrats)},$$

$$= \tfrac{1369}{4}$$

$$xy - \tfrac{35}{2} = \pm \tfrac{37}{2} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel)},$$

$$\text{IV.} \quad xy = 36 \text{ oder } = -1 \text{ (durch Versetzung)},$$

$$\text{V.} \quad x^2y^2 = 1296 \text{ oder } = 1 \text{ (d. Erheben zum Quadr.)},$$

$$1296 - 272 = 64y^2 \text{ od.} = 100y^2; \quad 1 - 272 = 64y^2 \text{ od.} = 100y^2$$
(durch Substitution von V. in III.),

$$1024 = 64y^2 \text{ od.} = 100y^2; \quad -271 = 64y^2 \text{ od.} = 100y^2$$

$$y^2 = 16 \text{ od.} = \tfrac{256}{25}; \quad y^2 = -\tfrac{271}{64} \text{ od.} = -\tfrac{271}{100}$$
(durch Division mit 64 oder 100),

$$\text{VI.} \quad y = \pm 4 \text{ od.} = \pm \tfrac{16}{5}; \quad y = \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{-271} \text{ od.} = \pm \tfrac{1}{10}\sqrt{-271}$$
(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

VII. $x = \frac{36}{y}$; $x = -\frac{1}{y}$

(aus IV. durch Div. mit y),

*VIII. $= \pm 9$ oder $= \pm \frac{45}{4}$; $x = \mp \frac{8}{\sqrt{-271}}$ oder

(durch Substit. von VI. in VII.). $= \mp \frac{10}{\sqrt{-271}}$

Anmerkung. Die Gleichung III. ergiebt sich auch durch Multiplikation mit $\frac{2}{y^2}$ und Auflösung nach $\sqrt{x^2 - \frac{272}{y^2}}$, man erhält hiefür die Werthe $= 8$ oder $= -10$.

Die Gleichung IV. ergiebt sich auch direct aus $x^2 - \frac{35}{y}x = \frac{36}{y^2}$ durch Auflösung nach x.

Nr. 47.

$$\begin{cases} \text{I.} & \frac{2y^2 - 8\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{4y^2 - 16\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2} \\ \text{II.} & \sqrt{x} + \sqrt{8(y - \sqrt{x}) - 4} = y + 1. \end{cases}$$

Auflösung.

$2y^2 - 8\sqrt{x} + 2\sqrt{x} . \sqrt{y^2 - 4\sqrt{x}} = \frac{3x}{2}$ (aus I. durch Mult. mit $\sqrt{x}$),

$y^2 - 4\sqrt{x} + \sqrt{x} . \sqrt{y^2 - 4\sqrt{x}} = \frac{3x}{4}$ (durch Division mit 2),

$y^2 - 4\sqrt{x} + \sqrt{x} . \sqrt{y^2 - 4\sqrt{x}} + \frac{x}{4} = x$ (d. Ergänzung des Quadr.),

$\sqrt{y^2 - 4\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \pm\sqrt{x}$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$\sqrt{y^2 - 4\sqrt{x}} = \frac{-1 \pm 2}{2}\sqrt{x}$ (d. Versetzung),

$= \frac{1}{2}\sqrt{x}$ oder $= -\frac{3}{2}\sqrt{x}$

$y^2 - 4\sqrt{x} = \frac{x}{4}$ oder $= \frac{9}{4}x$ (durch Erheben zum Quadr.),

III. $y^2 = \frac{x}{4} + 4\sqrt{x}$ oder $= \frac{9}{4}x + 4\sqrt{x}$ (durch Versetzung),

$y - \sqrt{x} - 2\sqrt{2(y - \sqrt{x}) - 1} = -1$ (aus II. durch Versetzung und Mult. mit -1),

$2(y - \sqrt{x}) - 4\sqrt{2(y - \sqrt{x}) - 1} = -2$ (durch Mult. mit 2),

$2(y - \sqrt{x}) - 1 - 4\sqrt{2(y - \sqrt{x}) - 1} + 4 = 3 - 2 = 1$ (durch Add. von $4 - 1 = 3$),

$\sqrt{2(y - \sqrt{x}) - 1} - 2 = \pm 1$ (d. Ausz. der Qu.-Wurzel),

$$\sqrt{2(y-\sqrt{x})-1} = 3 \text{ oder } = 1 \text{ (durch Versetzung),}$$
$$2(y-\sqrt{x})-1 = 9 \text{ oder } = 1 \text{ (durch Erheben zum Quadr.),}$$
$$2(y-\sqrt{x}) = 10 \text{ oder } = 2 \text{ (durch Versetzung),}$$
$$y-\sqrt{x} = 5 \text{ oder } = 1 \text{ (durch Division mit 2),}$$
$$\text{IV.} \quad y = 5+\sqrt{x} \text{ oder } = 1+\sqrt{x} \text{ (durch Versetzung),}$$
$$\text{V.} \quad y^2 = 25+10\sqrt{x}+x \text{ oder } = 1+2\sqrt{x}+x \text{ (durch Erheben zum Quadrat),}$$

Entweder:

$$\frac{x}{4}+4\sqrt{x} = 25+10\sqrt{x}+x; \qquad \frac{9x}{4}+4\sqrt{x} = 25+10\sqrt{x}+x$$
(durch Substitution von III. in IV.),
$$-25 = \frac{3x}{4}+6\sqrt{x}; \qquad \frac{5x}{4}-6\sqrt{x} = 25$$
(durch Versetzung),
$$x+8\sqrt{x} = -\tfrac{100}{3}; \qquad x-\tfrac{24}{5}\sqrt{x} = 20$$
(durch Mult. mit $\frac{4}{3}$ oder $\frac{4}{5}$),
$$x+8\sqrt{x}+(4)^2 = 16-\tfrac{100}{3}; \qquad x-\tfrac{24}{5}\sqrt{x}+(\tfrac{12}{5})^2 = 20+\tfrac{144}{25}$$
$$= -\tfrac{52}{3}; \qquad = \tfrac{644}{25}$$
(durch Ergänzung des Quadrats),
$$\sqrt{x}+4 = \pm 2\sqrt{-\tfrac{13}{3}}; \qquad \sqrt{x}-\tfrac{12}{5} = \pm\tfrac{2}{5}\sqrt{161}$$
(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),
$$\text{VI.} \quad \sqrt{x} = -4\pm 2\sqrt{-\tfrac{13}{3}}; \qquad \sqrt{x} = \frac{12\pm 2\sqrt{161}}{5}$$
(durch Versetzung),
$$\text{*VII.} \quad x = -\tfrac{4}{3}\mp 16\sqrt{-\tfrac{13}{3}}; \qquad x = \frac{788\pm 48\sqrt{161}}{5}$$
(durch Erheben zum Quadr.),
$$y = 5+\sqrt{x}; \qquad y = 5+\sqrt{x}$$
$$\text{*VIII.} \quad = 1\pm 2\sqrt{-\tfrac{13}{3}}; \qquad = \frac{37\pm 2\sqrt{161}}{5}$$
(durch Substit. von VI. in IV.).

Oder:

$$4\sqrt{x}+\frac{x}{4} = 1+2\sqrt{x}+x; \qquad \frac{9x}{4}+4\sqrt{x} = 1+2\sqrt{x}+x$$
(durch Substit. von III. in IV.),
$$-1 = \frac{3x}{4}-2\sqrt{x}; \qquad \frac{5x}{4}+2\sqrt{x} = 1$$
(durch Versetzung),
$$x-\tfrac{8}{3}\sqrt{x} = -\tfrac{4}{3}; \qquad x+\tfrac{8}{5}\sqrt{x} = \tfrac{4}{5}$$
(durch Mult. mit $\frac{4}{3}$ oder $\frac{4}{5}$),
$$x-\tfrac{8}{3}\sqrt{x}+(\tfrac{4}{3})^2 = \tfrac{16}{9}-\tfrac{4}{3}; \qquad x+\tfrac{8}{5}\sqrt{x}+(\tfrac{4}{5})^2 = \tfrac{4}{5}+\tfrac{16}{25}$$
$$= \tfrac{4}{9}; \qquad = \tfrac{36}{25}$$
(durch Ergänz. des Quadr. mit $(\frac{4}{3})^2$ oder mit $(\frac{4}{5})^2$),

$\sqrt{x}-\frac{4}{3} = \pm\frac{2}{3}$; $\qquad\qquad$ $\sqrt{x}+\frac{4}{5} = \pm\frac{6}{5}$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

III. $\sqrt{x} = 2$ oder $= \frac{2}{3}$; $\qquad\qquad$ $\sqrt{x} = \frac{2}{5}$ oder $= -2$

(durch Versetzung),

X. $x = 4$ oder $= \frac{4}{9}$; $\qquad\qquad$ $x = \frac{4}{25}$ oder $= 4$

(durch Erheben zum Quadrat),

$y = 1+\sqrt{x}$; $\qquad\qquad$ $y = 1+\sqrt{x}$

XI. $= 3$ oder $= \frac{5}{3}$; $\qquad\qquad$ $= \frac{7}{5}$ oder $= -1$

(durch Substitution von IX. in IV.).

Anmerkung. Bei der Einsetzung der Wurzeln in die Hauptgleichung darf man erstens die in den Gleichungen VI. und IX. enthaltenen Werthe von $\sqrt{x}$ und zweitens auch nicht übersehen, dass für die aus $y^2 = \frac{4}{9}x+4\sqrt{x}$ hervorgegangenen Wurzeln $\sqrt{y^2-4\sqrt{x}} = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$ ist.

No. 48.

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}(x^{\frac{2}{3}}-1)+\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}(2x^{\frac{2}{3}}-1) = \dfrac{4y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}(y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})+\dfrac{3y}{x^{\frac{1}{3}}}+2 \\ \text{II.} & \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{2x^{\frac{2}{3}}}{y}-\dfrac{2x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{133}{36}\cdot\dfrac{1}{y^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{2}{x^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}. \end{array}\right.$$

Auflösung.

$$x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-1)+y^{\frac{2}{3}}(2x^{\frac{2}{3}}-1) = 4y^{\frac{2}{3}}(y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})+3y^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

(aus I. durch Mult. mit $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$),

$$x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}} = 4y^{\frac{2}{3}}(y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})+3y^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

(durch Auflösen der Klammern),

$$x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 4y^{\frac{2}{3}}(y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})+3y^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$$

(durch Versetzung),

$$x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}} = 4y^{\frac{4}{3}}+4y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})+(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^2$$

(durch Addition von $y^{\frac{4}{3}}$),

III. $$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = \pm(2y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$$

(durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),

Die Gleichung $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = -(2y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$ ist für elementare Behandlung untauglich, dagegen giebt der erste Werth:

$$x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$$

(durch Versetzung),

IV. $$x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}} = 1$$

(durch Division mit $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$),

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}}-\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{2x^{\frac{2}{3}}}{y}+\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{133}{36y^{\frac{2}{3}}} \text{ (aus II. d. Vers.),}$$

$$\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2-\frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)+\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}=\frac{133}{36y^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} \text{ (d. Ergänz. des Quadr. mit } \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{169}{36y^{\frac{2}{3}}} \quad \text{und weil } \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2y^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \text{ ist),}$$

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}=\pm\frac{13}{6y^{\frac{1}{3}}} \text{ (d. Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}\pm\frac{13}{6y^{\frac{1}{3}}} \text{ (durch Versetzung),}$$

$$=\frac{19}{6y^{\frac{1}{3}}} \text{ oder } =-\frac{7}{6y^{\frac{1}{3}}}$$

V. $$x-y=\tfrac{19}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \text{ oder } =-\tfrac{7}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \text{ (durch Mult. mit } y^{\frac{2}{3}}.x^{\frac{1}{3}}\text{),}$$

VI. $$x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\tfrac{19}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \text{ oder } =-\tfrac{7}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \text{ (durch Div. von V. durch IV.),}$$

VII. $$x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1 \text{ (d. Erheben zum Quadrat aus IV.),}$$

$$3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=\tfrac{19}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-1 \text{ oder } =-\tfrac{7}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-1 \text{ (durch Subtr. von VII. von VI.),}$$

$$1=\tfrac{1}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \text{ oder } =-\tfrac{25}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \text{ (d. Vers.),}$$

VIII. $$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=6 \text{ oder } =-\tfrac{6}{25} \text{ (d. Mult. mit 6 oder mit } -\tfrac{6}{25}\text{),}$$

IX. $$4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=24 \text{ oder } =-\tfrac{24}{25} \text{ (durch Mult. mit 4),}$$

$$x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=25 \text{ oder } =\tfrac{1}{25} \text{ (d. Add. von VII. u. IX.),}$$

X. $$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=\pm 5 \text{ oder } =\pm\tfrac{1}{5} \text{ (durch Ausziehen der Qu.-Wurzel),}$$

XI. $$x^{\frac{1}{3}}=3 \text{ oder } =-2 \text{ oder } =\tfrac{3}{5} \text{ oder } =\tfrac{2}{5} \text{ (d. Add. von IV. u. X. u. Div. durch 2),}$$

*XII. $x = 27$ oder $= -8$ oder $= \frac{27}{125}$ oder $= \frac{8}{125}$ (durch Erheben in den Kubus),

$y^{\frac{1}{3}} = 2$ oder $= -3$ oder $= -\frac{2}{5}$ oder $= -\frac{3}{5}$ (durch Subtr. von IV. von X. und Div. durch 2 oder durch Substit. von XI. in IV. oder VIII. oder X.),

*XIII. $y = 8$ oder $= -27$ oder $= -\frac{8}{125}$ oder $= -\frac{27}{125}$ (durch Erheben in den Kubus).

Anmerkung. Die Gleichung V. lässt sich noch auf andere, dem Wesen nach aber dem oben eingeschlagenen Weg analoge Arten erzielen:

$$x^2 - 2x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 2xy = \tfrac{133}{36}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}} - y^2 \text{ (aus II. durch Mult. mit } x^{\frac{2}{3}}\,.\,y^{\frac{4}{3}}),$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}} = \tfrac{133}{36}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$(x-y)^2 - 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x-y) + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = \tfrac{133}{36}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

$$= \tfrac{169}{36}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

(d. Ergänz. des Quadr. mit $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$),

$$x - y - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \pm\tfrac{13}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \text{ (durch Ausz. der Qu.-Wurzel)},$$

$$x - y = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \pm \tfrac{13}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \text{ (durch Versetzung)},$$

$$= \tfrac{19}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \text{ oder } = -\tfrac{7}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

Würde man mit $x^{\frac{2}{3}}$ allein multipliziren, so erhielte man auf analogem Wege die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{y^{\frac{2}{3}}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{x}{y^{\frac{2}{3}}} - y^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{133}{36}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}},$$

welche nach Ergänzung des Quadrats und weiterer Behandlung auf

XIV. $$\frac{x}{y^{\frac{2}{3}}} - y^{\frac{1}{3}} = \frac{19}{6}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} \text{ oder } = -\frac{7}{6}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}$$

und endlich durch Multiplikation mit $y^{\frac{2}{3}}$ auf V. führt.

Würde man mit $y^{\frac{2}{3}}$ allein multipliziren, so erhielte man die Gleichung:

$$\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} - \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2 + 2\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} - \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{133}{36}$$

und hieraus XV. $$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} - \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{19}{6} \text{ oder } = -\frac{7}{6}$$

und endlich durch Multiplikation mit $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ auch wieder V.

Würde man $y^{\frac{4}{3}}$ allein multipliziren, so erhielte man die Gleichung: $\left(x^{\frac{2}{3}}-\frac{y}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2-2y^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-\frac{y}{x^{\frac{1}{3}}}\right)=\frac{133}{36}y^{\frac{2}{3}}$

und hieraus XVI. $x^{\frac{2}{3}}-\frac{y}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{19}{6}y^{\frac{1}{3}}$ oder $=-\frac{7}{6}y^{\frac{1}{3}}$

und endlich durch Multiplikation mit $x^{\frac{1}{3}}$ auch wieder V.

Würde man endlich auch noch mit $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ multipliziren, so erhielte man die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{y^{\frac{1}{3}}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^2-2x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{y^{\frac{1}{3}}}-y^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{133}{36}x^{\frac{2}{3}}$$

und hieraus XVII. $\frac{x}{y^{\frac{1}{3}}}-y^{\frac{2}{3}}=\frac{19}{6}x^{\frac{1}{3}}$ oder $=-\frac{7}{6}x^{\frac{1}{3}}$

und endlich durch Multiplikation mit $y^{\frac{1}{3}}$ auch wieder V.

Die Gleichungen IV. und V. lassen sich auch noch auf folgende Arten mit einander verbinden:

XVIII. $x-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y=1$ (aus IV. durch Erheben in den Kubus),

XIX. $3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=\frac{19}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-1$ oder $=-\frac{7}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-1$ (durch Subtr. von XVIII. von V.),

$3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=\frac{19}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-1$ oder $=-\frac{7}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-1$ (durch Division von XIX. durch IV.).

woraus das Uebrige wie bei der ersten Auflösung folgt.

Oder auch durch Substitution eines der beiden Werthe $x^{\frac{1}{3}}=1+y^{\frac{1}{3}}$ oder $y^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}-1$ in V. Man erhält hierdurch die Gleichungen: $y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=6$ oder $=-\frac{6}{25}$ oder auch:

$$x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}=6 \text{ oder } =-\frac{6}{25}.$$

VI. Abschnitt.

Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Grösse führen.

Nr. 1. Welche Zahl hat die Eigenschaft, dass, wenn von ihrem Dreifachen 18 abgezogen wird, 6 übrig bleibt?

Auflösung. $x =$ gesuchte Zahl,

$3x - 18 = 6$ (aus den gegebenen Bedingungen).

$3x = 24$

$x = 8.$

Nr. 2. Welche Zahl ist es, deren Doppeltes um 40 grösser ist, als die Hälfte von vier Fünfteln derselben?

Auflösung. $x =$ gesuchte Zahl,

$2x - 40 = \frac{2}{5}x$ (aus den gegebenen Bedingungen).

$10x - 200 = 2x$

$8x = 200$

$x = 25.$

Nr. 3. Zur Umzäunung eines Gartens, dessen Umfang 450 Fuss betrug, wurden zwei Arbeiter angestellt, von denen der eine täglich 9, der andere 6 Fuss verfertigte. In wieviel Tagen wurden beide mit einander fertig?

Auflösung. $x =$ gesuchte Anzahl Tage,

$9x =$ Arbeit des ersten Arbeiters in Fussen,

$6x =$ „ „ zweiten „ „ „

$15x =$ Gesammt-Arbeit beider.

$15x = 450$

$x = 30$ Tage.

Nr. 4. Es kaufte Jemand vier Stücke Seidenzeug, welche zusammen 50 Ellen massen. Das zweite Stück war doppelt, das dritte dreimal und das vierte viermal so lang als das erste. Wie lang war jedes?

Auflösung. $x =$ Länge des ersten Stücks in Ellen,

$2x =$ „ „ zweiten „ „ „

$3x =$ „ „ dritten „ „ „

$4x =$ „ „ vierten „ „ „

$10x =$ Gesammtlänge aller vier Stücke in Ellen.

$10x = 50$
$x = 5$ Ellen = Länge des ersten Stücks.
$2x = 10$ „ = „ „ zweiten „
$3x = 15$ „ = „ „ dritten „
$4x = 20$ „ = „ „ vierten „

Nr. 5. Ein Landwirth verkauft 13 Scheffel Gerste zu einem gewissen Preise; ein anderes Mal 17 Scheffel bei gleichen Fruchtpreisen. Das zweite Mal erhält er 16 fl. mehr als das erste Mal. Was ist der Preis eines jeden Scheffels Gerste?

Auflösung. x = Preis eines Scheffels in Gulden,
$13x$ = Erster Erlös in Gulden,
$17x$ = Zweiter „ „ „
$4x$ = Mehreinnahme im zweiten Fall.
$4x = 16$
$x = 4$ Gulden.

Nr. 6. Ein Fass von 198 Maass Bier wird in vier kleine Fässchen ausgefüllt, von denen das erste doppelt so gross als das zweite, ebenso das zweite doppelt so gross als das dritte, das dritte aber dreimal so gross als das vierte. Wenn diese vier Fässchen genau durch jenes Fass gefüllt werden, wie viel hält jedes?

Auflösung. x = Inhalt des vierten Fässchens in Maass,
$3x$ = „ „ dritten „ „ „
$6x$ = „ „ zweiten „ „ „
$12x$ = „ „ ersten „ „ „
$22x$ = Gesammtinhalt aller 4 Fässchen.
$22x = 198$
$x = 9$ Maass = Inhalt des vierten Fässchens,
$3x = 27$ „ = „ „ dritten „
$6x = 54$ „ = „ „ zweiten „
$12x = 108$ „ = „ „ ersten „

Nr. 7. Ein Silberarbeiter hat drei Stücke Silber, welche zusammen 48 Unzen wiegen. Das zweite wiegt 12 Unzen mehr als das erste, das dritte 9 Unzen mehr als das zweite. Wie schwer ist jedes?

Auflösung. x = Gewicht des ersten Stücks in Unzen,
$x+12$ = „ „ zweiten „ „ „
$x+21$ = „ „ dritten „ „ „

$3x+33$ = Gesammtgewicht der drei Stücke.
$3x+33 = 48$
$3x = 15$
$x = 5$ Unzen = Gewicht des ersten Stücks,
$x+12 = 17$ „ = „ „ zweiten „
$x+21 = 26$ „ = „ „ dritten „

Nr. 8. Ein Weinhändler füllt ein Fass von 96 Maass mit einer Mischung von Branntwein, Wein und Wasser. Er nimmt dazu 20 Maass Wasser mehr als Branntwein, und 17 Maass Wein mehr als Wasser. Wie viel also von jeder Sorte?

Auflösung. x = Menge des Branntweins in Maass,
$x+20$ = „ „ Wassers „ „
$x+37$ = „ „ Weins „ „
$3x+57$ = Gesammtmenge der drei Ingredienzen.
$3x+57 = 96$
$3x = 39$
$x = 13$ Maass Branntwein,
$x+20 = 33$ „ Wasser,
$x+37 = 50$ „ Wein.

Nr. 9. Es kauft Jemand vier Pferde, und zahlt für das zweite 12 Louisd'or weiter als für das erste, für das dritte 6 Louisd'or weiter als für das zweite, für das vierte endlich 2 Louisd'or weiter als für das dritte. Im Ganzen zahlt er 190 Louisd'or. Was kostet jedes Pferd?

Auflösung. x = Preis des ersten Pferdes in Louisd'or,
$x+12$ = „ „ zweiten „ „ „
$x+18$ = „ „ dritten „ „ „
$x+20$ = „ „ vierten „ „ „
$4x+50$ = Preis der vier Pferde in Louisd'or.
$4x+50 = 190$
$4x = 140$
$x = 35$ Louisd'or = Preis des ersten Pferdes,
$x+12 = 47$ „ = „ „ zweiten „
$x+18 = 53$ „ = „ „ dritten „
$x+20 = 55$ „ = „ „ vierten „

Nr. 10. Ein Mann hat sechs Kinder; das älteste kann wöchentlich 14 Kreuzer mehr als das zweite, dieses 16 mehr als das

dritte, letzteres 12 mehr als das vierte, das vierte 8 mehr als das fünfte, das fünfte endlich 10 mehr als das jüngste erwerben. Alle zusammen verdienen wöchentlich 4 fl. 20 krz. Wie viel verdient jedes einzelne?

Auflösung.

x	$=$	wöchentlicher Verdienst des jüngsten Kindes in krz.,
$x+10$	$=$	„ „ „ fünften „ „ „
$x+18$	$=$	„ „ „ vierten „ „ „
$x+30$	$=$	„ „ „ dritten „ „ „
$x+46$	$=$	„ „ „ zweiten „ „ „
$x+60$	$=$	„ „ „ ersten „ „ „
$6x+164$	$=$	„ „ der sechs Kinder in krz.
$6x+164$	$=$	260
$6x$	$=$	96
x	$=$	16 krzr. = Verdienst des sechsten Kindes,
$x+10$	$=$	26 „ = „ „ fünften „
$x+18$	$=$	34 „ = „ „ vierten „
$x+30$	$=$	46 „ = „ „ dritten „
$x+46$	$=$	1 fl. 2 krzr. = „ „ zweiten „
$x+60$	$=$	1 fl. 16 krzr. = „ „ ersten „

Nr. 11. Ein Reisender macht in vier Tagen 60 Meilen; wegen schlechter Beschaffenheit der Wege aber macht er den zweiten Tag $1\frac{1}{4}$ Meile, den dritten $2\frac{1}{4}$ und den vierten $3\frac{1}{2}$ Meilen weniger als den ersten. Wie viel also täglich?

Auflösung.

x	$=$	Weg des ersten Tags in Meilen,
$x-1\frac{1}{4}$	$=$	„ „ zweiten „ „ „
$x-2\frac{1}{4}$	$=$	„ „ dritten „ „ „
$x-3\frac{1}{2}$	$=$	„ „ vierten „ „ „
$4x-7$	$=$	Ganzer zurückgelegter Weg.
$4x-7$	$=$	60
$4x$	$=$	67
x	$=$	$16\frac{3}{4}$ Meilen = Weg des ersten Tags,
$x-1\frac{1}{4}$	$=$	$15\frac{1}{2}$ „ = „ „ zweiten „
$x-2\frac{1}{4}$	$=$	$12\frac{1}{2}$ „ = „ „ dritten „
$x-3\frac{1}{2}$	$=$	$13\frac{1}{4}$ „ = „ „ vierten „

Nr. 12. Fünf Städte A, B, C, D, E liegen nach der Ordnung der Buchstaben hinter einander. Die Entfernung von A bis E

beträgt 80 Meilen. Die Entfernung von B und C ist um 10 Meilen grösser, von C und D um 15 Meilen kleiner, und von D und E um 17 Meilen grösser als die von A und B. Wie weit sind die einzelnen Städte von einander entfernt?

Auflösung. x = Entfernung AB in Meilen,

$x+10$ = „ BC „ „

$x-15$ = „ CD „ „

$x+17$ = „ DE „ „

$4x+12$ = Entfernung von A bis E in Meilen.

$$4x+12 = 80$$

$$4x = 68$$

x = 17 Meilen = Entfernung AB,

$x+10$ = 27 „ = „ BC,

$x-15$ = 2 „ = „ CD,

$x+17$ = 34 „ = „ DE.

Nr. 13. Es giebt Jemand zwei Armen 27 Kreuzer, und zwar dem einen 5 Kreuzer mehr als dem andern. Wie viel also jedem?

Auflösung. x = Almosen des ersten Armen in Kreuzern,

$x+5$ = „ „ zweiten „ „ „

$2x+5$ = Ganzes Almosen beider Armen.

$$2x+5 = 27$$

$$2x = 22$$

x = 11 Krzr. = Almosen des einen Armen,

$x+5$ = 16 „ = „ „ zweiten „

Nr. 14. Von welcher Zahl ist das Dreifache ebensoviel über 40, als die Hälfte unter 51?

Auflösung. x = gesuchte Zahl,

$3x-40$ = Ueberschuss der dreifachen Zahl über 40,

$51-\frac{x}{2}$ = „ von 51 üb. die Hälfte der Zahl.

$$3x-40 = 51-\frac{x}{2}$$

$$\frac{7x}{2} = 91$$

$$x = 26.$$

Nr. 15. Zwei Arbeiter erhielten für ihre Arbeit gleichen Lohn. Hätte der eine 15 fl. mehr, der andere 9 fl. weniger er-

halten, so hätte der erste dreimal so viel bekommen als der zweite. Wie viel erhielt jeder?

Auflösung. x = Lohn jedes Arbeiters in Gulden,

$x+15$ = vorausgesetzter Lohn des ersten Arbeit.,

$x-9$ = „ „ „ zweiten „

$$x+15 = 3(x-9)$$
$$= 3x-27$$
$$42 = 2x$$
$x = 21$ Gulden.

Nr. 16. Zwei Kaufleute theilten den, bei einem gemeinschaftlichen Geschäft gemachten Gewinn, so dass der eine 450 fl. mehr erhielt als der andere. Der ganze Gewinn betrug 490 fl. weniger als das Dreifache des Antheils, den der weniger betheiligte Kaufmann erhielt. Wie gross war der Gewinn?

Auflösung. x = Antheil des weniger betheiligten Kaufmanns am Gewinn in fl.,

$x+450$ = Antheil des zweiten Kaufmanns,

$2x+450$ = ganzer Gewinn,

aber auch $3x-490$ = „ „

$$3x-490 = 2x+450$$
x = 940 fl. = Gewinn des ersten Kaufm.,

$x+450$ = 1390 „ = „ „ zweiten „

$2x+450$ oder $3x-490$ = 2330 „ ganzer Gewinn.

Nr. 17. Der Umfang eines Dreiecks beträgt 75 Fuss. Die Grundlinie ist um 11 Fuss länger als die eine, und um 16 Fuss länger als die andere Seite. Wie lang sind die drei Seiten des Dreiecks?

Auflösung. x = Länge der Grundlinie in Fussen,

$x-11$ = „ „ einen Seite „ „

$x-16$ = „ „ andern „ „ „

$3x-27$ = Gesammtumfang des Dreiecks.

$$3x-27 = 75$$
$$3x = 102$$
x = 34 Fuss = Länge der ersten Seite,

$x-11$ = 23 „ = „ „ zweiten „

$x-16$ = 18 „ = „ „ dritten „

Nr. 18. Bei einer Gesellschaft, welche in einer Schenke gemeinschaftlich zehrte, betrug der, ein jedes Mitglied an der Rechnung treffende Antheil 4 fl.; wären es vier Personen mehr gewesen, so hätte jeder nur $3\frac{1}{2}$ fl. zu zahlen gehabt. Wie gross war die Gesellschaft?

Auflösung. x = Anzahl Gäste,

$4x$ = ganze Zeche in fl.,

$x+4$ = vorausgesetzte Anzahl Gäste,

$\frac{4x}{x+4}$ = vorausgesetzter Antheil eines Gastes in fl.

$$\frac{4x}{x+4} = 3\frac{1}{2}$$

$$8x = 7x+28$$

$x = 28$ Gäste.

Nr. 19. Die Zahl 46 soll so in zwei Theile getheilt werden, dass, wenn man den ersten durch 7 und den zweiten durch 3 dividirt, die Summe der Quotienten = 10 wird. Wie heissen die beiden Theile?

Auflösung. x = erster Theil,

$46-x$ = zweiter Theil,

$\frac{x}{7}$ = erster Quotient,

$\frac{46-x}{3}$ = zweiter Quotient,

$\frac{x}{7}+\frac{46-x}{3} = \frac{322-4x}{21}$ = Summe beider Quotienten.

$$\frac{322-4x}{21} = 10$$

$$322-4x = 210$$

$$112 = 4x,$$

$x = 28$ = erster Theil,

$46-x = 18$ = zweiter Theil.

Nr. 20. Zwei Grundstücke zahlen Steuer; das erste 19 fl. weniger als das andere; das Dreifache der ersten Steuer um 5 fl. vermehrt ist gleich dem Doppelten der zweiten. Wie gross ist jede?

Auflösung. x = Steuer des ersten Grundstücks in fl.,

$x+19$ = „ „ zweiten „ „ „.

$3x+5 =$ der um 5 vermehrten dreifachen ersten Steuer,
$2x+38 =$ der doppelten zweiten Steuer.
$3x+5 = 2x+38$
$x = 33$ fl. = Steuer des ersten Grundstücks,
$x+19 = 52$ „ = „ „ zweiten „ .

Nr. 21. Es kauft Jemand eine Anzahl Eimer Branntwein, den Eimer zu 95 fl., und eine um 9 grössere Anzahl Eimer Wein, den Eimer zu 75 fl. und zahlt für den Branntwein im Ganzen 5 fl. mehr als für den Wein. Wie viel kaufte er von jeder Sorte?

Auflösung. $x =$ Anzahl Eimer Branntwein,
$x+9 =$ „ „ Wein,
$95x =$ Preis des Branntweins in fl.,
$75(x+9) =$ „ „ Weins in fl.,
aber auch $95x-5 =$ „ „ „ „ „
$95x-5 = 75x+675$
$20x = 680$
$x = 34$ Eimer Branntwein,
$x+9 = 43$ „ Wein.

Nr. 22. *A* und *B* haben jeder ein jährliches Einkommen von 4000 fl. *A* giebt jährlich 400 fl. mehr aus als *B*, und ihre Ersparnisse in vier Jahren sind zusammen so gross als das Jahres-Einkommen eines Einzelnen. Wie viel giebt jährlich jeder aus?

Auflösung. $x =$ Ausgabe des *A* in fl. per Jahr,
$x-400 =$ „ „ *B* „ „ „
$4000-x =$ Ersparn. „ *A* „ „ „
$4000-(x-400) = 4400-x =$ „ „ *B* „ „ „
$4(8400-2x) =$ 4jähr. Ersparn. von *A* u. *B* zus.
$4(8400-2x) = 4000$
$8400-2x = 1000$
$7400 = 2x$
$x = 3700$ fl. = jährl. Ausg. des *A*,
$x-400 = 3300$ fl. = „ „ „ *B*.

Nr. 23. Ein Tuchhändler verkauft zwei Stücke Tuch und verliert an dem einen 6 fl. mehr als an dem andern. Der ganze Verlust betrug 5 fl. weniger als das Dreifache des geringern Verlustes an dem einen Tuchstücke. Wie viel verlor er an jedem Stücke?

Auflösung. x = geringerer Verlust in fl.,
$x+6$ = grösserer „ „ „
$2x+6$ = Gesammtverlust „ „
aber auch $3x-5$ = „ „ „
$3x-5 = 2x+6$
x = 11 fl. = Verlust an dem einen Stück,
$x+6$ = 17 fl. = „ „ „ andern „

Nr. 24. Einem Landwirth kostete das Einernten des Korns für den Morgen $2\frac{1}{2}$ fl. Als 6 Morgen noch nicht eingeerntet waren, hatte er 25 fl. ausgegeben. Wie gross war die Morgenzahl?

Auflösung. x = ganze Morgenzahl,
$x-6$ = abgeerntete Morgenzahl,
$2\frac{1}{2}(x-6)$ = Kosten des Aberntens derselben in fl.
$\frac{5}{2}x-15 = 25$
$\frac{5x}{2} = 40$
x = 16 Morgen.

Nr. 25. In einer Seeschlacht war die Zahl der genommenen Schiffe um 7 grösser und die der verbrannten um 2 kleiner als die der gesunkenen; 15 entkamen und die ganze Zahl der Schiffe war das Achtfache der gesunkenen. Wie stark war die Flotte?

Auflösung. x = Anzahl gesunkener Schiffe,
$x+7$ = „ genommener „
$x-2$ = „ verbrannter „
$3x+5+15 = 3x+20$ = ganze Anzahl Schiffe,
aber auch $8x$ = „ „ „
$8x = 3x+20$
$5x = 20$
$x = 4$
$3x+20$ oder $8x$ = 32 Schiffe = Stärke der Flotte.

Nr. 26. Ein Pächter zahlt für ein Pachtgut 900 fl. Pacht, und zwar bei dem Theil des Guts, welcher gepflügt werden kann, 10 fl. für jeden Morgen, bei dem übrigen, welcher aus 5 Morgen weniger bestand, 6 fl. 40 krzr. Wie viel Morgen von jeder Sorte hält das Gut?

Auflösung. x = Anzahl pflügbarer Morgen,
$x-5$ = „ nicht pflügbarer Morgen,

$$10x = \text{Pacht des pflügbar. Lands in fl.,}$$
$$6\tfrac{2}{3}(x-5) = \text{„ „ nichtpflügb. „ „ „}$$
$$10x + \tfrac{20}{3}(x-5) = \tfrac{50}{3}(x-2) = \text{ganzer Pacht des Guts in fl.}$$
$$\tfrac{50}{3}(x-2) = 900$$
$$x-2 = 900 \cdot \tfrac{3}{50}$$
$$= 54$$
$$x = 56 \text{ Morgen pflügbares Land,}$$
$$x-5 = 51 \text{ „ nichtpflügbares Land.}$$

Nr. 27. Ein Behälter, welcher 820 Eimer hält, kann in 20 Minuten durch drei Röhren gefüllt werden, von denen die erste 10 Eimer mehr, die zweite 5 Eimer weniger in der Minute giebt als die dritte. Wie viel fliesst durch jede Röhre in der Minute?

Auflösung. x = Leistung der 3ten Röhre per Min. in Eim.,
$$x-5 = \text{„ „ 2ten „ „ „ „ „}$$
$$x+10 = \text{„ „ 1sten „ „ „ „ „}$$
$$3x+5 = \text{„ „ drei Röhren „ „ „ „}$$
$$20(3x+5) = \text{„ „ „ „ in 20 Min. „ „}$$
$$20(3x+5) = 820$$
$$3x+5 = 41$$
$$3x = 36$$
$$x = 12 \text{ Eim., die die 3te Röhre in 1 Min. liefert,}$$
$$x-5 = 7 \text{ „ „ „ 2te „ „ „ „}$$
$$x+10 = 22 \text{ „ „ „ 1ste „ „ „ „}$$

Nr. 28. Die Besatzung einer Festung beträgt 2600 Mann; sie besteht aus neunmal so viel Infanterie und dreimal so viel Artillerie als Cavallerie. Wie viel Mann von jeder Waffengattung sind darin?

Auflösung. x = Anzahl Cavalleristen,
$$9x = \text{„ Infanteristen,}$$
$$3x = \text{„ Artilleristen,}$$
$$13x = \text{ganze Besatzung.}$$
$$13x = 2600$$
$$x = 200 \text{ Cavalleristen,}$$
$$9x = 1800 \text{ Infanteristen,}$$
$$3x = 600 \text{ Artilleristen.}$$

Nr. 29. *A* und *B* spielen mit einander; das Geld des *A* beträgt vor dem Spiele $\frac{4}{5}$ von dem des *B*; nachdem aber *A* 10 fl.

gewonnen, hat er ebensoviel als *B*. Wie viel hatte jeder ursprünglich?

Auflösung. $4x$ = Geld des *A* vor dem Spiel in fl.,
$9x$ = „ „ *B* „ „ „ „ „
$4x+10$ = Geld des *A* nach dem Spiel in fl.
$9x-10$ = „ „ *B* „ „ „ „ „
$9x-10 = 4x+10$
$5x = 20$
$x = 4$
$4x$ = 16 fl. = Geld des *A* vor dem Spiel,
$9x$ = 36 fl. = „ „ *B* „ „ „

Nr. 36. Es hat Jemand eine gewisse Anzahl von Pferden zur Stallfütterung und dreimal so viel auf die Weide bestimmt; 15 Stück aber verwendet er für den täglichen Gebrauch. Die ganze Zahl der Pferde beträgt das Siebenfache von der Anzahl der im Stall befindlichen. Wie gross ist diese ganze Zahl von Pferden?

Auflösung. x = Anzahl der im Stall befindlichen Pferde,
$3x$ = „ „ auf der Weide „ „
$4x+15$ = ganze Anzahl Pferde,
aber auch $7x$ = „ „ „
$7x = 4x+15$
$3x = 15$
x = 5 Pferde,
$4x+15$ oder $7x$ = 35 = ganze Anzahl Pferde.

Nr. 31. Zwei Personen, welche 150 Meilen von einander entfernt wohnen, reisen einander entgegen; die eine macht in derselben Zeit 3 Meilen, in welcher die andere 7 Meilen macht. Welchen Weg hat jede nach dem Zusammentreffen zurückgelegt?

Auflösung. x = Anzahl Tage, die die Reis. unterwegs sind,
$3x$ = Weg des einen Reisenden in Meilen,
$7x$ = „ „ zweiten „ „ „
$10x$ = ganzer von beiden zurückgelegter Weg.
$10x = 150$
x = 15 Tage,
$3x$ = 45 Meilen, die der erste Reis. zurückgel. h.,
$7x$ = 105 „ „ „ zweite „ „ „

Anmerkung. Eine andere Lösung ist folgende:

y = Weg des einen Reisenden in Meilen,
$150-y$ = „ „ andern „ „ „
$y:(150-y) = 3:7$ (weil sich die ganzen Wege wie die in gleichem Zeitraum zurückgel. Strecken verh.),
y = 45 Meilen = Weg des einen Reisenden,
$150-y$ = 105 „ = „ „ andern „

Nr. 32. Ein Gut von 864 Morgen ist im Besitze von drei Personen. C hat so viel als A und B zusammen; die Antheile von A und B aber verhaltan sich zu einander wie 5 : 11. Wie viel Morgen hat jeder?

Auflösung. $5x$ = Antheil des A in Morgen,
$11x$ = „ „ B „ „
$16x$ = „ „ C „ „
$32x$ = ganze Morgenzahl des Guts.
$32x = 864$
$x = 27$
$5x$ = 135 Morgen = Antheil des A,
$11x$ = 297 „ = „ „ B,
$16x$ = 432 „ = „ „ C.

Nr. 33. Ein Wohlthäter vertheilt unter eine Anzahl armer Weiber und Kinder 57 fl. und giebt jedem Weibe 3, jedem Kinde 1 fl. Die Zahl der Weiber verhält sich zur Zahl der Kinder wie 4 : 7. Wie viel Weiber und Kinder erhielten Almosen?

Auflösung. $4x$ = Anzahl Weiber,
$7x$ = Anzahl Kinder,
$12x$ = Almosen aller Weiber in fl.,
$7x$ = Almosen der Kinder in fl.,
$19x$ = ganze vertheilte Summe in fl.
$19x = 57$
$x = 3$
$4x$ = 12 Weiber,
$7x$ = 21 Kinder.

Nr. 34. A und B treiben Geschäfte, A mit dreimal so viel Capital als B. Jeder gewinnt 500 fl. und jetzt verhält sich das neue Capital des A zu dem des B wie 7 : 3. Wie viel hatte jeder ursprünglich?

Auflösung. x = ursprüngliches Capital des B in fl.,
$3x$ = „ „ „ A „ „
$x+500$ = nachheriges Capital des B in fl.,
$3x+500$ = „ „ „ A „ „
$(3x+500):(x+500) = 7:3$
$9x+1500 = 7x+3500$
$2x = 2000$
x = 1000 fl., die B ursprünglich hatte,
$3x$ = 3000 fl., die A „ „

Nr. 35. Zwei Zahlen stehen im Verhältniss von $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$; nachdem die erste um 6, die zweite um 5 vermehrt worden ist, verhalten sie sich zu einander wie $\frac{2}{5}:\frac{1}{2}$. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. $3x$ = erste Zahl,
$4x$ = zweite Zahl, denn das Verhältniss $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$ ist jenem $3:4$ gleich,
$3x+6$ = erste Zahl nach ihrer Vermehrung,
$4x+5$ = zweite „ „ „ „
$(3x+6):(4x+5) = \frac{2}{5}:\frac{1}{2}$
$= 4:5$
$16x+20 = 15x+30$
$x = 10$
$3x = 30$ = erste Zahl,
$4x = 40$ = zweite Zahl.

Nr. 36. Ein Landwirth hat ein Quantum Heu, von dem er soviel verkauft, dass sich das Verkaufte zum Ueberreste verhält wie $4:5$. Nachdem er von diesem Ueberreste 15 Centner selbst verbraucht hat, verhält sich der Ueberrest noch zum Verkauften wie $1:2$. Wie gross war das ursprüngliche Quantum Heu?

Auflösung. $4x$ = verkauftes Quantum Heu in Ctr.,
$5x$ = ursprünglicher Ueberrest in Ctr.,
$9x$ = ganzes Quantum Heu in Ctr.,
$5x-15$ = Ueberrest nach d. Verbrauch von 15 Ctr.
$(5x-15):4x = 1:2$
$10x-30 = 4x$
$6x = 30$
$x = 5$
$9x$ = 45 Ctr. = ganzes Quantum Heu.

Nr. 37. Man hat drei Stücke Tuch, deren Längen sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 3 : 5 : 7. Nachdem von jedem Stücke 6 Ellen abgeschnitten worden sind, hat sich die ganze Ellenzahl im Verhältniss von 20 : 17 vermindert. Wie lang waren die drei Stücke?

Auflösung. $3x$ = ursprüngl. Länge d. ersten Stücks in Ellen,
$5x$ = „ „ zweiten „ „ „
$7x$ = „ „ dritten „ „ „
$15x$ = „ ganze Ellenzahl,
$15x - 18$ = nachherige ganze Ellenzahl nach dem Abschneiden von je 6 Ell. von jedem Stück.

$$15x : (15x - 18) = 20 : 17$$
$$15x : 18 = 20 : 3$$
$$x : 2 = 4 : 1$$
$$x = 8$$

$3x = 24$ Ellen = urspr. Länge d. ersten Stücks,
$5x = 40$ „ = „ „ „ zweiten „
$7x = 56$ „ = „ „ „ dritten „

Nr. 38. Vier Arbeiter erhielten jeder einen Tagelohn von 45 krz. Da die Arbeitstage der einzelnen sich verhielten wie die Zahlen 4, 5, 6, 7, so erhielt der erste und zweite zusammen 9 fl. weniger als der dritte und vierte zusammen. Wie viel erhielt jeder?

Auflösung. $4x$ = Anzahl Arbeitstage des ersten Arbeiters,
$5x$ = „ „ „ zweiten „
$6x$ = „ „ „ dritten „
$7x$ = „ „ „ vierten „

$\frac{3}{4} \cdot 4x = 3x$ = ganzer Lohn des ersten Arb. in fl.,

$\frac{3}{4} \cdot 5x = \frac{15x}{4}$ = „ „ „ zweiten „ „ „

$\frac{3}{4} \cdot 6x = \frac{9x}{2}$ = „ „ „ dritten „ „ „

$\frac{3}{4} \cdot 7x = \frac{21x}{4}$ = „ „ „ vierten „ „ „

$3x + \frac{15x}{4} = \frac{27x}{4}$ = Lohn des ersten u. zweiten Arb. in fl.,

$\frac{9x}{2} + \frac{21x}{4} = \frac{39x}{4}$ = „ „ dritten u. vierten „ „ „

$\frac{39x}{4} - \frac{27x}{4} = 3x$ = Mehreinnahme d. dritten u. vierten Arb. in fl.

$3x = 9$
$x = 3$
$3x = 9$ fl. = Lohn d. ersten Arb.,
$\frac{15x}{4} = 11\frac{1}{4}$ fl. = 11 fl. 15 krz. = „ „ zweiten „
$\frac{9x}{2} = 13\frac{1}{2}$ fl. = 13 „ 30 „ = „ „ dritten „
$\frac{21x}{4} = 15\frac{3}{4}$ fl. = 15 „ 45 „ = „ „ vierten „

Nr. 39. Aus zwei Fässern von gleichem Inhalte wird Wein ausgelassen im Verhältniss von 6 : 7. Wären aus dem Fasse, welches jetzt das leerere ist, 16 Maass weniger ausgelassen worden, so hätte man nur halb so viel ausgelassen, als aus dem andern. Wie viel Wein liess man aus jedem Fasse?

Auflösung. $6x$ = Anzahl M., die aus dem ersten Fass kamen,
$7x$ = „ „ „ „ „ zweiten „ „ welches nun das leerere ist,
$7x-16$ = vorausgesetzte Anzahl Maass, die aus dem zweiten Fass entnommen wurden.
aber auch $\frac{6x}{2} = 3x$ = „ „ „ „ „ „
$7x-16 = 3x$
$4x = 16$
$x = 4$
$6x = 24$ M., die dem ersten Fass genommen w.,
$7x = 28$ „ „ „ zweiten „ „ „

Nr. 40. Es hat Jemand zwei Aecker, welche die Form von Rechtecken haben. Die längern Seiten beider verhalten sich zu einander wie 6 : 11 und die beiden einander anliegenden Seiten des kleinern wie 3 : 2. Der Umfang des kleinern ist 270 Fuss grösser als die grössere Seite des grössern. Wie gross sind die Seiten des kleinern, und wie gross ist die längere Seite des grössern?

Auflösung. $6x$ = läng. Seite d. kleinern Rechteckes in Fuss.,
$11x$ = „ „ „ grössern „ „ „
$4x$ = kürz. „ „ kleinern „ „ „
$2(6x+4x) = 20x$ = Umfang des kleinern „ „ „
$20x-11x = 9x$ = Ueberschuss dieses Umfangs über die längere Seite des grössern Rechtecks.

$9x = 270$
$x = 30$
$6x = 180$ F. = längere Seite d. kleinern Rechtecks,
$4x = 120$ „ = kürzere „ „ „ „
$11x = 330$ „ = längere Seite d. grossen Rechtecks.

Nr. 41. Zwei Reisende *A* und *B*, von denen jeder 80 fl. bei sich hatte, treffen mit Räubern zusammen, welche dem *A* 5 fl. mehr als das Doppelte von dem nehmen, was *B* verliert. Dadurch behält *A* nur so viel übrig, dass er noch 13 fl. nöthig hätte, um die Hälfte von *B* zu haben. Wie viel wurde jedem genommen?

Auflösung. x = Verlust des *B* in fl.,
$2x+5$ = „ *A* „ „
$80-x$ = Rest des *B* in fl.,
$80-(2x+5) = 75-2x$ = „ „ *A* „ „
$75-2x+13 = 88-2x$ = vorausges. Rest, der dem *A* bleiben müsste, um die Hälfte von *B* zu haben.

aber auch $\frac{80-x}{2}$ = „ „ „ „ „

$$\frac{80-x}{2} = 88-2x$$
$$80-x = 176-4x$$
$$3x = 96$$
$x = 32$ fl., die dem *B* genommen wurden,
$2x+5 = 69$ fl., „ „ *A* „ „

Nr. 42. Es vertheilt Jemand 40 fl. unter 50 Personen, und giebt einer Anzahl derselben 45 krz. für die Person, dem Reste 1 fl. 15 krz. für die Person. Wie viel Personen bekamen die eine, wie viele die andere Summe?

Auflösung. $4x$ = Anz. Pers., v. denen jede $\frac{3}{4}$ fl. erh.,
$50-4x$ = „ „ „ „ „ $\frac{5}{4}$ fl. „
$\frac{3}{4}.4x = 3x$ = Antheil der ersten in fl.
$\frac{5}{4}.(50-4x) = \frac{125}{2}-5x$ = „ „ zweiten „ „
$3x+\frac{125}{2}-5x = \frac{125}{2}-2x$ = ganze vertheilte Summe.

$$40 = \frac{125}{2}-2x$$
$$2x = \frac{45}{2}$$
$4x = 45$ Pers., die je 45 krz. erhielten,
$50-4x = 5$ „ „ „ 1 fl. 15 krz. „

Nr. 43. Es legt Jemand eine gewisse Summe $6\frac{1}{2}$ Jahre lang auf Zinsen zu 5 Procent. Hätte er dieselbe Summe auf 12 Jahre und 9 Monate zu 4 Procent ausgeliehen, so hätte er 1850 fl. mehr an Zinsen eingenommen. Wie gross war die ausgeliehene Summe?

Auflösung. x = ausgeliehene Summe in fl.,

$\frac{5}{100} \cdot 6\frac{1}{2} \cdot x = \frac{13x}{40}$ = 5proc. Zinsen während $6\frac{1}{2}$ Jahren,

$\frac{4}{100} \cdot 12\frac{3}{4} \cdot x = \frac{51x}{100}$ = 4proc. „ „ $12\frac{3}{4}$ „

$\frac{51x}{100} - \frac{13x}{40} = \frac{37x}{200}$ = Mehreinnahme im zweiten Fall.

$$\frac{37x}{200} = 1850$$

$$x = 10000 \text{ fl.}$$

Nr. 44. Aus drei Städten, *A*, *B*, *C*, sollen 594 Mann ausgehoben werden. Die Contingente von *A* und *B* verhalten sich zu einander wie 3 : 5, die von *B* und *C* wie 8 : 7. Wie viel hat jede Stadt zu stellen?

Auflösung. $3x$ = Contingent des *A*,

$5x$ = „ „ *B*,

$\frac{7}{8} \cdot 5x = \frac{35x}{8}$ = „ „ *C*,

$8x + \frac{35x}{8} = \frac{99x}{8}$ = ganze Mannschaft.

$$\frac{99x}{8} = 594$$

$$x = 48$$

$3x$ = 144 Mann, die *A* stellt,

$5x$ = 240 „ „ *B* „

$\frac{35x}{8}$ = 210 „ „ *C* „

Nr. 45. Zwei Personen, *A* und *B*, vereinigten sich zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte. *A* liess sein Geld 6 Jahre stehen und gewann damit $\frac{1}{4}$ seines ursprünglichen Capitals. *B* liess sein Capital, welches 500 fl. weniger als das des *A* betrug, 9 Jahre stehen, und gewann bei gleichem Verhältniss so viel, dass, wenn er $62\frac{1}{2}$ fl. weniger gewonnen hätte, sein Capital und Gewinn zusammen sich zu der gleichen Summe des *A* verhielte wie 4 : 5. Wie viel Capital hatte jeder ursprünglich?

Auflösung. $4x =$ urspr. Capital des A in fl.,

$4x - 500 =$ „ „ „ B „ „

$x =$ Gew. des A in 6 J. von $4x$ fl.,

$\frac{x}{6.4x} = \frac{1}{24} =$ Gew. des A und B von 1 fl. in 1 Jahr,

$9.\frac{1}{24}(4x - 500) = \frac{3x}{2} - \frac{375}{2} =$ Gew. des B von seinem Cap. in 9 Jahren,

$4x + x = 5x =$ Cap. und Gew. des A,

$4x - 500 + \frac{3x}{2} - \frac{375}{2} = \frac{11x}{2} - \frac{1375}{2} =$ „ „ „ „ B,

$\frac{11x}{2} - \frac{1375}{2} - 62\frac{1}{2} = \frac{11x}{2} - 750 =$ vorausg. Cap. u. Gew. d. B.

aber auch $4x =$ „ „ „ „ „ „

$$\frac{11x}{2} - 750 = 4x$$

$$\frac{3x}{2} = 750$$

$$x = 500$$

$4x = 2000$ fl. $=$ urspr. Cap. des A,

$4x - 500 = 1500$ fl. $=$ „ „ „ B.

Nr. 46. Das bei einem Bankerott vorhandene Vermögen von 21000 fl. soll unter vier Gläubiger nach Verhältniss ihrer Forderungen vertheilt werden. Nun verhält sich die Forderung des A zu der des B wie $2:3$, die des B zu der des C wie $4:5$ und die des C zu der des D wie $6:7$. Wie viel erhielt jeder von obiger Summe?

Auflösung. $2x =$ Antheil des A in fl.,

$3x =$ „ „ B „ „

$\frac{5}{4}.3x = \frac{15x}{4} =$ „ „ C „ „

$\frac{7}{6}.\frac{15x}{4} = \frac{35x}{8} =$ „ „ D „ „

$5x + \frac{15x}{4} + \frac{35x}{8} = \frac{105x}{8} =$ ganze vertheilte Summe.

$$\frac{105x}{8} = 21000$$

$$x = 1600$$

$2x = 3200$ fl., die A erhielt,

$3x = 4800$ fl., die B erhielt,

$\frac{15x}{4} = 6000$ „ „ C „

$\frac{35x}{8} = 7000$ „ „ D „

Nr. 47. Ein Kaufmann kauft Weizen, je 5 Scheffel um 70 fl. Später kaufte er noch eine geringere Sorte, deren Quantum sich zum vorigen verhält wie 3 : 4, und zwar je 8 Scheffel für 72 fl. Er verkauft hierauf das ganze Quantum, den Scheffel zu 10 fl. und verliert dadurch im Ganzen 156 fl. Wie viel hat er von jeder Sorte gekauft?

Auflösung. $4x =$ Anzahl gekaufter Schfl. der bessern Sorte,

$3x =$ „ „ „ „ geringern „

$\frac{70}{5}.4x = 56x =$ Einkaufspreis der bessern Sorte in fl.,

$\frac{72}{8}.3x = 27x =$ „ „ geringern „ „ „

$83x =$ „ des gesammten Weiz. in fl.,

$10.7x = 70x =$ Erlös aus dem Verkauf des Weizens,

$83x - 70x = 13x =$ Verlust bei diesem Verkauf in fl.

$13x = 156$

$x = 12$

$4x = 48$ Scheffel besserer Qualität,

$3x = 36$ „ geringerer „

Nr. 48. Drei Personen hatten in einem Gasthof gleich viel verzehrt. Da C kein Geld bei sich hatte, so zahlten A und B seine Rechnung, und zwar A viermal so viel als B. Hätte aber B 3 fl. weiter bezahlt, so hätten beide gleich viel an der Bezahlung übernommen. Wie viel hatte jeder verzehrt, und wie viel hatten A und B an der Rechnung des C übernommen?

Auflösung. $x =$ Antheil, den B an C's Rechn. zahlt in fl.,

$4x =$ „ „ A „ „ „ „ „ „

$x + 4x = 5x =$ Zeche eines jeden in fl.,

$x + 3 =$ vorausgesetzter Antheil, den B an C's Rechnung zahlt, in fl.,

$4x - 3 =$ vorausgesetzter Antheil, den A an C's Rechnung zahlt, in fl.

$4x - 3 = x + 3$

$3x = 6$

$x = 2$ fl., die B für C zahlt,

$4x = 8$ fl., die *A* für *C* zahlt,
$5x = 10$ fl., die jeder verzehrte.

Nr. 49. Eine gewisse Summe soll unter drei Personen so getheilt werden, dass *A* 3000 fl. weniger als die Hälfte der Summe, *B* 1000 fl. weniger als den dritten Theil und *C* 800 fl. mehr als den vierten Theil erhalten soll. Wie gross ist die zu vertheilende Summe, und was erhält jeder davon?

Auflösung. $12x$ = der zu vertheilenden Summe in fl.,
$6x - 3000$ = Antheil des *A* in fl.,
$4x - 1000$ = „ „ *B* „ „
$3x + 800$ = „ „ *C* „ „
$13x - 3200$ = der zu vertheilenden Summe.

$$13x - 3200 = 12x$$
$$x = 3200$$

$13x - 3200$ oder $12x = 38400$ fl. = der zu vertheilenden Summe,
$6x - 3000 = 16200$ „ = Antheil des *A*,
$4x - 1000 = 11800$ „ = „ „ *B*,
$3x + 800 = 10400$ „ = „ „ *C*.

Nr. 50. Ein Pächter hat zwei Schafheerden; die eine besteht aus 40 Stück Landschafen, die andere aber aus spanischen Schafen. Der Werth der letztern beträgt 300 fl. Jedes Schaf der letztern Heerde ist viermal so viel werth als ein Schaf der erstern, die ganze erste Heerde aber nur 40 fl. mehr als 8 Schafe der letztern. Wie viel Schafe enthält die letztere Heerde, und was ist ein Schaf in jeder Heerde werth?

Auflösung. x = Anzahl spanischer Schafe,
$\frac{300}{x}$ = Werth eines spanischen Schafes in fl.,
$\frac{1}{4} \cdot \frac{300}{x} = \frac{75}{x}$ = „ „ Landschafes in fl.,
$40 \cdot \frac{75}{x} = \frac{3000}{x}$ = Werth d. ganzen Heerde Landschafe in fl.,
$8 \cdot \frac{300}{x} = \frac{2400}{x}$ = Werth von 8 spanischen Schafen in fl.
aber auch $\frac{3000}{x} - 40$ = „ „ „ „ „ „ „

$$\frac{2400}{x} = \frac{3000}{x} - 40$$

$$40 = \frac{600}{x}$$

$$40x = 600$$

$$x = 15 \text{ spanische Schafe,}$$

$$\frac{300}{x} = 20 \text{ fl.} = \text{Werth eines span. Schafes in fl.}$$

$$\frac{75}{x} = 5 \text{ ,, } = \text{ ,, ,, Landschafes ,, ,,}$$

Nr. 51. *A* und *B* spielen Billard. *A* setzt 5 fl. gegen 4 auf jedes Spiel und hat nach einer bestimmten Anzahl von Spielen 10 fl. gewonnen. Hätten sie ein Spiel mehr gespielt, und hätte letzteres *B* gewonnen, so würde sich die Zahl der von *B* gewonnenen Spiele zu jener der von *A* gewonnenen verhalten wie 3 : 4. Wie viel Spiele hat jeder gewonnen?

Auflösung. x = Anzahl der von *A* gewonnenen Spiele,

$4x$ = Brutto-Gewinn des *A* in diesen x Spielen,

$4x - 10$ = ,, ,, *B* in seinen gewonnenen Spielen, weil der reine Gewinn des *A* nur 10 fl. beträgt,

$\frac{4x-10}{5}$ = Anzahl der von *B* gewonnenen Spiele, da er in jedem Spiele 5 fl. gewinnt,

$\frac{4x-10}{5} + 1 = \frac{4x-5}{5}$ = vorausges. Anzahl der von *B* gew. Spiele.

$$\frac{4x-5}{5} : x = 3 : 4$$

$$\frac{16x-20}{5} = 3x$$

$$16x - 20 = 15x$$

$x = 20$ von *A* gewonnene Spiele,

$\frac{4x-10}{5} = 14$,, *B* ,, ,,

Nr. 52. Der Brodvorrath einer belagerten Festung würde noch auf 6 Wochen ausreichen, wenn jedem Mann täglich 20 Loth Brod gegeben würden. Da aber bei einem Ausfall 1200 Mann der Besatzung theils getödtet, theils gefangen werden, so reicht derselbe Vorrath 8 Wochen lang, selbst wenn die Portion eines Mannes auf 24 Loth täglich erhöht wird. Wie viel Mann betrug anfangs die Besatzung?

Auflösung. $x =$ Anzahl Mann der ursprüngl. Besatzung,

$x - 1200 =$ „ „ „ nachherigen „

$6.7.20x = 840x =$ Brodvorrath der Festung in Loth,

$\frac{840.x}{8.7} = 15x =$ tägl. Brodbedarf der nachher. Bes. in Loth

aber auch: $24(x-1200) =$ „ „ „ „ „ „ „

$24x - 28800 = 15x$

$9x = 28800$

$x = 3200$ Mann.

Nr. 53. Eine Mischung von Kupfer und Zinn hält 100 Kub.-Zoll und wiegt 505 Unzen. Wie viel wiegt jedes einzelne Metall in derselben, wenn 1 Kub.-Zoll Kupfer $5\frac{1}{4}$ und 1 Kub.-Zoll Zinn $4\frac{1}{4}$ Unzen wiegt?

Auflösung. $4x =$ Menge Kupfers in Kub.-Zollen,

$100 - 4x =$ „ Zinns „ „

$5\frac{1}{4}.4x = 21x =$ Gewicht des Kupfers in Unzen,

$4\frac{1}{4}(100 - 4x) = 425 - 17x =$ „ „ Zinns „ „

$21x + 425 - 17x = 425 + 4x =$ „ der ganzen Mischung.

$425 + 4x = 505$

$4x = 80$

$x = 20$

$21x = 420$ Unzen = Gewicht des Kupfers,

$425 - 17x = 85$ „ = „ „ Zinns.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$y =$ Gewicht des Kupfers in Unzen,

$505 - y =$ „ „ Zinnes „ „

$\frac{y}{5\frac{1}{4}} = \frac{4y}{21} =$ Volumen des Kupfers in Kub.-Zollen,

$\frac{505-y}{4\frac{1}{4}} = \frac{4(505-y)}{17} =$ „ „ Zinns „ „

$\frac{4y}{21} + \frac{4(505-y)}{17} =$ Volumen d. ganzen Mischung in K.-Zoll.

$\frac{4y}{21} + \frac{4(505-y)}{7} = 100$

$y = 420$ Unzen Kupfer,

$505 - y = 85$ „ Zinn.

Nr. 54. Zwei Städte, A und B, sind $32\frac{1}{4}$ Meilen von einander entfernt. Von A fährt ein Eilwagen Morgens 6 Uhr ab nach

B und macht in jeder Stunde eine Meile. Nachmittags 2 Uhr fährt ein anderer Eilwagen von *B* nach *A* und macht in jeder Stunde $1\frac{1}{4}$ Meile. Wo werden beide zusammentreffen?

Auflösung. $4x$ = Anzahl Stunden, die der von *A* aus fahrende Eilwagen unterwegs ist,

und auch = Anzahl Meilen, die er in dieser Zeit macht,

$4x-8$ = Anzahl Stunden, die der von *B* aus fahrende Eilwagen unterwegs ist,

$1\frac{1}{4}(4x-8) = 5x-10$ = Anz. Meilen, die er in dieser Zeit zurückl.,

$4x+5x-10 = 9x-10$ = Anz. Meilen, welche beide Eilwägen zusammen zurücklegen.

$$9x-10 = 32\tfrac{3}{4}$$

$$9x = \frac{171}{4}$$

$$x = \frac{19}{4}$$

$4x = 19$ Meil. = Entfernung von *A*, in der sie sich treffen,

$5x-10 = 13\frac{1}{4}$ „ = „ von *B*, in der sie sich treffen.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Entfernung von *A*, in der sich die beiden Wägen treffen, in Meil.,

und auch = Anz. Stund., die der von *A* aus fahr. W. z. Zurückl. dies. Weges braucht,

$32\frac{3}{4}-y$ = Entfern. von *B*, in der sich die beiden Wägen treffen, in Meilen,

$\dfrac{32\frac{3}{4}-y}{1\frac{1}{4}} = \dfrac{131-4y}{5}$ = Anz. St., die der von *B* aus fahr. W. zum Zurückl. dies. Weges braucht,

$y - \dfrac{131-4y}{5} = \dfrac{9y-131}{5}$ = Anz. St., um welche der erste Eilw. länger unterwegs ist als der zweite.

$$\frac{9y-131}{5} = 8$$

$y = 19$ Meilen von *A* entfernt,

$32\frac{3}{4}-y = 13\frac{1}{4}$ „ „ *B* „

Nr. 55. Es hat Jemand eine gewisse Summe. Davon zahlt er seinen Gläubigern 96 fl. Die Hälfte des Restes leiht er einigen Freunden; von dem, was übrig bleibt, verzehrt er endlich den fünften Theil, und behält dadurch noch den zehnten Theil der ursprünglichen Summe. Wie gross war diese?

Auflösung. $10x$ = ganze Summe in fl.,
$10x - 96$ = Rest nach Bezahl. der Gläubiger in fl.,
$5x - 48$ = Darlehen an die Freunde in fl.,
und auch = Rest, der dann noch übrig bleibt, in fl.,
$x - \frac{48}{5}$ = verzehrte Summe in fl.,
$5x - 48 - (x - \frac{48}{5}) = 4x - \frac{4}{5}.48$ = zuletzt noch übrig bleibender Rest,
aber auch x = zuletzt noch übrig bleibender Rest.

$$4x - \frac{4}{5}.48 = x$$
$$3x = \frac{4}{5}.48$$
$$x = \frac{64}{5} \text{ fl.}$$
$$10x = 128 \text{ fl.} = \text{ursprüngliche Summe.}$$

Anmerkung. Ein weiterer Ansatz ergiebt sich folgendermassen aus obigem:

$$96 + 5x - 48 + x - \frac{48}{5} + x = 7x + \frac{4}{5}.48 = \text{ganze Summe in fl.,}$$
$$7x + \frac{4}{5}.48 = 10x$$
$$x = \frac{64}{5}$$
$$10x = 128 \text{ fl.}$$

Nr. 56. Bei der Musterung einer Armee waren die Truppen in einer dichten Masse 40 Mann tief aufgestellt. Dadurch war die in der Fronte stehende Mannschaft der vierte Theil der gegenüberstehenden Zuschauer. Wäre die Tiefe der Aufstellung für die Armee noch um 5 Mann vermehrt, und wären die Zuschauer auch mit aufgestellt worden, so wären in die Fronte 100 Mann weniger gekommen. Wie stark war die Armee?

Auflösung. x = Stärke der Armee,

$\frac{x}{40}$ = Anzahl Mann der Fronte,

$\frac{x}{40}.4 = \frac{x}{10}$ = Anzahl Zuschauer,

$x + \frac{x}{10} = \frac{11x}{10}$ = ganze Menschenmenge (Soldaten und Zuschauer),

$40 + 5 = 45$ = vorausgesetzte Gliederzahl,

$\frac{x}{40} - 100$ = vorausg. Anzahl Mann der Fronte,

$45\left(\frac{x}{40} - 100\right) = \frac{9}{8}x - 4500$ = ganze Menschenmenge (Soldaten und Zuschauer).

$$\frac{9x}{8} - 4500 = \frac{11x}{10}$$

$$45x - 180000 = 44x$$

$$x = 180000 \text{ Mann.}$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Anzahl Mann der Fronte,

$40y$ = Stärke der Armee,

$4y$ = Anzahl Zuschauer,

$44y$ = ganze Menschenmenge,

$40+5 = 45$ = vorausgesetzte Gliederzahl,

$\frac{44y}{45}$ = „ Anzahl Mann der Fronte.

aber auch $y - 100$ = „ „ „ „ „

$$y - 100 = \frac{44y}{45}$$

y = 4500 Mann in der Fronte,

$40y$ = 180000 Mann der Armee,

$4y$ = 18000 Zuschauer.

Nr. 57. *A* und *B* verkaufen zusammen 235 Tonnen Kupfer, die Tonne zu 860 fl. *A* nahm 42140 fl. mehr ein als *B*. Wie viel Tonnen verkaufte jeder?

Auflösung. x = Anzahl Tonnen, die *A* verkauft,

$235 - x$ = „ „ „ *B* „

$x - (235 - x) = 2x - 235$ = „ „ „ *A* mehr verkauft als *B*,

$860(2x - 235)$ = Werth dieses Ueberschusses in fl.

$$860(2x - 235) = 42140$$

$$2x - 235 = 49$$

$$2x = 284$$

x = 142 Tonnen, die *A* verkauft,

$235 - x$ = 93 „ „ *B* „

Anmerkung. Ein anderer Ansatz ergiebt sich auch folgendermassen aus obigem:

$\frac{42140}{860} = 49$ = Anzahl Tonnen, um welche *A* mehr verkauft hat als *B*,

$x - 49$ = Anzahl Tonnen, die *B* verkauft,

$x + x - 49 = 2x - 49$ = ganze Anzahl verkaufter Tonnen,

$$2x - 49 = 235$$
$$x = 142 \text{ Tonnen, die } A \text{ verkauft,}$$
$$x - 49 = 93 \quad „ \quad „ \ B \quad „$$

Nr. 58. Man kauft zwei Stücke Leinwand, von denen dem einen noch 12 Ellen fehlen, um viermal so lang zu sein als das andere. Von dem grössern Stücke kostet die Elle 1 fl. 15 krz., von dem kürzern 1 fl. Nachdem von dem grössern 23, von dem kleinern 5 Ellen abgeschnitten waren, wurde das Uebrige verkauft, jede Elle um 15 krz. theurer, als der Einkaufspreis betrug. Dadurch wurden 35 fl. 30 krz. gelöst. Wie gross war jedes Stück?

Auflösung. $4x$ = Länge des kleinern Stücks in Ellen,

$16x - 12$ = „ „ grössern „ „ „

$4x - 5$ = verkaufter Rest des kleinern St. in Ellen,

$16x - 35$ = „ „ „ grössern „ „ „

$1\frac{1}{4}(4x - 5) = 5x - \frac{25}{4}$ = Erlös aus dem kleinern Stück in fl.,

$1\frac{1}{2}(16x - 35) = 24x - \frac{105}{2}$ = „ „ „ grössern „ „ „

$5x - \frac{25}{4} + 24x - \frac{105}{2} = 29x - \frac{235}{4}$ = ganzer Erlös.

$$29x - \frac{235}{4} = 35\frac{1}{2}$$
$$29x = \frac{377}{4}$$
$$x = \frac{13}{4}$$

$4x = 13$ Ellen = Länge des kleinern Stücks,

$16x - 12 = 40$ „ = „ „ grössern „

Nr. 59. An seinem Geburtstage im Jahre 1829 gab ein Armenfreund einem Armen so viel krz., als er an diesem Tage Jahre alt war. In ganz ähnlicher Art erhielt der Arme dieses Geschenk auch die folgenden sieben Jahre bis zum Tode seines Wohlthäters. Dadurch hatte er im Ganzen 7 fl. 56 krz. erhalten. Wann war jener geboren und wie alt wurde er?

Auflösung. x = Alter des Wohlthäters im Jahre 1829,

und auch = Almosen im Jahre 1829 in krz.,

$x + 1$ = „ „ nächsten Jahre in krz.,

$x + 2$ = „ „ „ „ „ „

$x + 3$ = „ „ „ „ „ „

$x + 4$ = „ „ „ „ „ „

$x + 5$ = „ „ „ „ „ „

$x + 6$ = „ „ „ „ „ „

$x + 7$ = „ „ „ „ „ „

und auch = Alter des Wohlthäters bei seinem Tode,

$1829 - x$ = Geburtsjahr desselben,
$8x + 28$ = Summe aller Gaben in krz.

$$8x + 28 = 476$$
$$8x = 448$$
$$x = 56 \text{ Jahre},$$

$1829 - x = 1773$ = Geburtsjahr des Wohlthäters,
$x + 7 = 63$ Jahre = Alter desselben bei seinem Tode.

Nr. 60. Ein Courier reist durch einen Ort und legt in 6 Stunden 13 Meilen zurück. 12 Stunden später kommt ein zweiter Courier, welcher denselben Weg zu machen hat, durch den nämlichen Ort, und legt in 9 Stunden 26 Meilen zurück. Wann und in welcher Entfernung von dem genannten Orte wird der zweite Courier den ersten einholen?

Auflösung. x = Zeit, in welcher der zweite Courier den ersten einholt, in Stunden,
$x + 12$ = Zeit, welche der erste Cour. unterwegs ist, bis er vom zweiten eingeholt w.,
$\frac{26}{9}x$ = Weg des zweiten Couriers in Meilen,
$\frac{13}{6}(x+12) = \frac{13}{6}x + 26$ = „ „ ersten „ „ „

$$\frac{26x}{9} = \frac{13x}{6} + 26$$
$$52x = 39x + 468$$
$$13x = 468$$

$x = 36$ Stunden, in denen der zweite Cour. den ersten einholt,
$\frac{13}{6}x + 26$ oder $\frac{26}{9}x = 104$ Meilen = Entfernung, in der sie zusammentreffen.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:
y = Entfern., in der sie zusammentr., in Meil.,
$\frac{y}{\frac{13}{6}} = \frac{6}{13}y$ = Zeit, welche der erste Courier zum Zurücklegen derselben braucht, in Stunden,
$\frac{y}{\frac{26}{9}} = \frac{9}{26}y$ = Zeit, welche der zweite Courier zum Zurücklegen derselben braucht,
$\frac{6}{13}y - \frac{9}{26}y = \frac{3}{26}y$ = Anzahl Stunden, um welche der zweite Courier weniger braucht als der erste.

$$\frac{3}{26}y = 12$$

$y = 104$ Meilen = Entfernung, in der sie zusammentreffen,

$\frac{6}{13}y = 48$ Stunden nach Abreise des ersten Couriers,
oder $\frac{9}{26}y = 36$ „ „ „ „ zweiten „
treffen sie beide zusammen.

Nr. 61. In Folge einer entstandenen Bestürzung an der Börse wurden zwei Banquiers A und B um Einwechslung von Papieren gegen baar Geld bestürmt. B hielt den Sturm 3 Tage aus, und stellte dann seine Zahlungen ein. Dadurch wurde A so stark bestürmt, dass sich die täglichen Anforderungen verdreifachten, und er am Ende des zweiten Tages nachher ebenfalls seine Zahlungen einstellen musste. Hätten A und B ihre Kapitalien vereinigt, so hätten sie dem Andringen der Gläubiger, so wie es anfangs war, 7 Tage lang Stand halten können, und B wäre am Ende des siebenten Tages dem A 40000 fl. schuldig gewesen. Was war anfangs die tägliche Anforderung an die Bank von A?

Auflösung.

$x =$ ursprüngliche tägliche Anforderung an die Bank des A in fl.,

$3x =$ Summe, welche diese Bank in den ersten drei Tagen auszahlt in fl.,

und auch $=$ nachherige tägliche Anforderung an dieselbe,

$2 . 3x = 6x =$ Summe, welche sie in den letzten zwei Tagen auszahlt,

$3x + 6x = 9x =$ ganzes Capital der Bank des A in fl.,

$9x + 30000 =$ ganzes Capital der Bank des A und B zusammen; denn da B dem A für einen Vorschuss vom vierten mit siebenten Tage 40000 fl. schulden würde, so muss die ursprüngliche tägliche Anforderung an die Bank des B $\frac{40000}{4} = 10000$ fl., ihr Capital also 30000 fl. betragen haben.

$x + 10000 =$ ursprüngliche tägl. Anforderung an beide Banken,

$7(x + 10000) =$ nothwendiges Capital, um dem Sturme, wie er ursprünglich war, sieben Tage lang gemeinschaftlich zu widerstehen.

$$9x + 30000 = 7x + 70000$$
$$2x = 40000$$
$$x = 20000 \text{ fl.}$$ = ursprüngliche tägliche Anforderung an die Bank des A.

Nr. 52. Zwei Knaben, *A* und *B*, gingen miteinander zu der 5280 Fuss entfernten Schule. *A* schoss einen Pfeil ab in der Richtung des Weges, *B* nahm ihn auf und schoss ihn von der Stelle, auf welche er gefallen war, weiter vorwärts, und so wechselten sie ab, bis der Pfeil beim letzten Schiessen vor der Schule niederfiel. *A* hatte achtmal, *B* siebenmal geschossen. Ein anderes Mal standen beide an den entgegengesetzten Ufern eines Flusses. *A* schoss zu *B* hinüber und sein Pfeil fiel 39 Fuss rückwärts von der Stelle, auf welcher *B* stand. *B* hob ihn auf und schoss von der Stelle, an welcher der Pfeil niedergefallen war, nach *A* hinüber. Der Pfeil fiel $27\frac{6}{7}$ Fuss hinter *A* auf den Boden. Wie breit war der Fluss, unter der Voraussetzung, dass jeder Einzelne den Pfeil immer auf die nämliche Entfernung schoss?

Auflösung. $x =$ Breite des Flusses in Fussen,

$x+39 =$ Wurfweite des *A* „ „

$x+39+26\frac{6}{7} = x+66\frac{6}{7} =$ „ „ *B* „ „

$8(x+39) =$ Gesammtlänge der 8 Schüsse des *A* auf seinem Wege zur Schule,

$7(x+66\frac{6}{7}) =$ Gesammtlänge der 7 Schüsse des *B* auf seinem Wege zur Schule,

$8(x+39)+7(x+66\frac{6}{7}) = 15x+780 =$ Länge des Wegs zur Schule.

$$15x+780 = 5280$$

$$15x = 4500$$

$x = 300$ Fuss $=$ Breite des Flusses.

Nr. 63. Drei Kaufleute, *A*, *B*, *C*, legten zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen zusammen, *B* 100 fl. mehr als $\frac{4}{5}$ von *A* und *C* 300 fl. mehr als die Hälfte von *B*. Der Gewinn betrug $\frac{2}{5}$ der Einlage und der Antheil des *B* davon 1480 fl. Wie viel hatte jeder eingelegt und wie gross war der ganze Gewinn?

Auflösung. $5x =$ Einlage des *A* in fl.,

$4x+100 =$ „ „ *B* „ „

$\frac{1}{2}(4x+100)+300 = 2x+350 =$ „ „ *C* „ „

$11x+450 =$ Gesammt-Einlage von *A*, *B* u. *C*,

$\frac{2}{5}(11x+450) = \frac{22}{5}x+180 =$ ganzer Gewinn „ „ „ „ „

$\frac{2}{5}(4x+100) = \frac{8x}{5}+40 =$ Gewinn des *B* allein in fl.

$$\frac{8x}{5}+40 = 1480$$

$$\frac{8x}{5} = 1440$$
$$x = 900$$
$$5x = 4500 \text{ fl.} = \text{Einlage des } A,$$
$$4x+100 = 3700 \text{ „} = \text{ „ „ } B,$$
$$2x+350 = 2150 \text{ „} = \text{ „ „ } C,$$
$$\tfrac{22}{5}x+180 = 4140 \text{ „} = \text{ganzer Gewinn aller drei.}$$

Nr. 64. Ein Pächter muss vertragsmässig an den Gutsbesitzer für die Pachtung $\frac{2}{3}$ des reinen Gewinnes abgeben, welcher nach Abzug der Productionskosten von dem ganzen Ertrage übrig bleibt. Dadurch erhält er für seine Person $\frac{1}{6}$ des Ertrages. Später, als sich die Productionskosten im Verhältniss von 3 : 2, der Ertrag aber im Verhältniss von 5 : 3 vermindert hatten, bekam der Gutsbesitzer in Folge obigen Vertrags für seinen Antheil 2000 fl. Welches war ursprünglich der Ertrag des Gutes?

Auflösung.

x = ursprünglicher Ertrag des Gutes in fl.,

$\frac{x}{2}$ = „ reiner Gewinn in fl.,

und auch = ursprüngliche Productionskosten in fl., denn da dem Pächter für sich selbst $\frac{1}{6}$ des Ertrags oder aber auch $\frac{1}{3}$ des reinen Gewinns bleibt, so muss letzterer halb so gross sein als ersterer; die andere Hälfte des Ertrags müssen demnach die Productionskosten betragen.

$\frac{3x}{5}$ = nachheriger Ertrag des Gutes in fl.,

$\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{3}$ = nachherige Productionskosten „ „

$\frac{3}{5}x - \frac{x}{3} = \frac{4}{15}x$ = nachheriger reiner Gewinn „ „

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{15}x = \frac{8}{45}x$ = nachheriger Pachtschilling in fl.

$$\frac{8}{45}x = 2000$$
$$x = 11250 \text{ fl.} = \text{ursprünglicher Ertrag.}$$

Nr. 65. Es vermachte Jemand vier Dienern, *A*, *B*, *C*, *D*, Legate, nach Verhältniss der Zeit, welche sie bei ihm dienten, und unter der Bedingung, dass wenn einer von ihnen vor Austheilung derselben sterben sollte, sein Antheil unter die übrigen gleich ver-

theilt werden solle. *B* starb wirklich und nach der Vertheilung seines Antheils wurde der Antheil des *C* die mittlere Proportionalzahl zwischen den Antheilen des *A* und *D*, während *A* vorher 780, *C* 300, *D* 60 fl. hätte erhalten sollen. Wie viel bekam jeder nachher?

Auflösung. $3x$ = ursprüngliches Legat des *B* in fl.,
x = Antheil, den jeder der drei andern Diener daran erhält,
$780+x$ = nachheriger Antheil des *A*,
$300+x$ = „ „ „ *C*,
$60+x$ = „ „ „ *D*.

$$(780+x):(300+x) = (300+x):(60+x)$$
$$46800+840x+x^2 = 90000+600x+x^2$$
$$240x = 43200$$
$$x = 180 \text{ fl.}$$

$780+x = 960$ „ = nachheriger Antheil des *A*,
$300+x = 480$ „ = „ „ „ *C*,
$60+x = 240$ „ = „ „ „ *D*.

Nr. 66. Aus einer Garnison wird der dritte Theil eines Regimentes in eine benachbarte Stadt geschickt, um eine dort ausgebrochene Empörung zu stillen. Da der commandirende Offizier findet, dass seine Mannschaft dazu nicht stark genug sei, und dabei den Verdacht hat, dass 50 seiner Leute von den Empörern bestochen seien, so schickt er diese 50 zurück und bittet zugleich, seine Mannschaft bis auf die Hälfte zu erhöhen. Zu diesem Zwecke wird ihm noch $\frac{1}{3}$ der zuerst Zurückgebliebenen nachgeschickt. Wie stark war das Regiment?

Auflösung. $9x$ = Stärke des Regiments,
$3x$ = ursprünglich abgeschickte Mannschaft,
$6x$ = Rest der Mannschaft, der in der Garnison zurückbleibt,
$3x-50$ = Stärke des Detachements, nachdem der Offizier 50 Mann zurückgeschickt hat,
$2x$ = Mannsch., die d. Offiz. nachgeschickt w.,
$3x-50+2x = 5x-50$ = nunmehrige Stärke des Detachements,
aber auch $\frac{9}{2}x$ = „ „ „ „

$$5x-50 = \tfrac{9}{2}x$$
$$10x-100 = 9x$$

$x = 100$

$9x = 900$ Mann = Stärke des Regiments.

Nr. 67. Von zwei Orten A und B, welche 154 Meilen von einander entfernt sind, reisen zu gleicher Zeit zwei Personen einander entgegen. Die von A abgehende macht je 3 Meilen in 2 Stunden, die von B abgehende 5 Meilen in 4 Stunden. Wann und wo werden beide einander begegnen?

Auflösung.

$4x$ = Zeit, nach der sie sich begegnen, in Stunden,

$\frac{3}{2} . 4x = 6x$ = Weg, den die von A abgehende in dieser Zeit zurücklegt, in Meilen,

$\frac{5}{4} . 4x = 5x$ = Weg, den die von B abgeh. in dieser Zeit zurückl,

$11x$ = ganzer von beiden zurückgelegter Weg.

$11x = 154$

$x = 14$

$4x = 56$ Stunden, nach denen sie sich begegnen,

$6x = 84$ Meilen = Entfernung von A,

$5x = 70$ „ = „ „ B, in der sie sich treffen.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Entfern. von A, in der sie sich begegnen, in Meilen,

$154 - y$ = Entfern. von B, in der sie sich begegnen,

$\frac{y}{\frac{3}{2}} = \frac{2y}{3}$ = Zeit, welche der von A ausgehende Reisende zu obigen y Meilen braucht,

$\frac{154 - y}{\frac{5}{4}} = \frac{616 - 4y}{5}$ = Zeit, welche der von B ausgehende Reisende zu seiner Wegstrecke braucht.

$$\frac{2y}{3} = \frac{616 - 4y}{5}$$

y = 84 Meil. von A entfernt,

$154 - y$ = 70 „ „ B „ treffen sie sich,

$\frac{2y}{3}$ oder $\frac{616 - 4y}{5}$ = 56 Stunden, nach denen sie sich treffen.

Nr. 68. A reist von einem Orte ab und macht je 7 Meilen in 5 Stunden; 8 Stunden später reist ihm B nach und macht je 5 Meilen in 3 Stunden. Wie lange ist A auf der Reise und wie viele Meilen hat er zurückgelegt, bis ihn B einholt?

Auflösung.

$x =$ Zeit, die A unterwegs ist, bis ihn B einholt, in Stund.,

$x-8 =$ „ „ B „ „ „ er A „ „ „

$\frac{7}{5}x =$ Weg, den A in x Stunden zurücklegt, in Meilen,

$\frac{5}{3}(x-8) =$ „ „ B „ $x-8$ „ „ „ . „

$$\frac{5}{3}(x-8) = \frac{7}{5}x$$
$$25x-200 = 21x$$
$$4x = 200$$

$x = 50$ Stunden, die A reist,

$\frac{5}{3}(x-8)$ oder $\frac{7}{5}x = 70$ Meilen, die er macht.

Anmerkung. Analog wie bei der vorigen Aufgabe ergiebt sich auch hier eine zweite Lösung, nämlich:

$y =$ Anzahl Meilen, die A noch macht,

$\frac{y}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{7}y =$ Zeit, die A hierzu braucht, in Stunden,

$\frac{y}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}y =$ „ „ B „ „ „ „

$\frac{5}{7}y - \frac{3}{5}y = \frac{4}{35}y =$ Anzahl Stunden, die A länger braucht als B, um obige y Meilen zurückzulegen.

$$\frac{4}{35}y = 8$$

$y = 70$ Meilen,

$\frac{5}{7}y = 50$ Stunden.

Nr. 69. Ein Pächter hatte 500 fl. Pachtzins zu bezahlen. Seine jährlichen Ausgaben (die Steuern und sonstigen Abgaben mit eingerechnet, welche den sechsten Theil dieser Ausgaben betrugen) waren jedoch so gross, dass er nur 300 fl. dem Gutseigenthümer zu bezahlen im Stande war. Das folgende Jahr wurde der Pachtzins um 20 Procent herabgesetzt, die Steuern und Abgaben auf die Hälfte, der Gutsertrag aber war um $\frac{1}{3}$ gewachsen, und so war er trotzdem, dass seine übrigen Ausgaben unverändert geblieben waren, doch in den Stand gesetzt, den vollen Pachtzins und den Rückstand vom vorigen Jahre zu zahlen, und noch 50 fl. zurückzulegen. Was waren seine jährlichen Ausgaben und der jährliche Gutsertrag?

Auflösung. $12x =$ jährl. Ausgaben d. 1ten Jahres in fl.,

$2x =$ Steuern im 1. Jahre,

$10x =$ sonstige Ausg. im 1., sowie im 2. J.,

$12x+300 =$ Gutsertrag im 1. Jahre,

$\frac{4}{3}(12x+300) = 16x+400 =$ „ „ 2. „

x = Steuern im 2. Jahre,
$10x + x = 11x$ = jährl. Ausgaben im 2. Jahre,
$500 - \frac{20}{100} . 500 = 400$ = Pachtzins des 2. Jahres,
200 = Rückstand vom vorigen Jahre,
$400 + 200 + 11x = 600 + 11x$ = Gesammtauslagen des 2. Jahres,
$600 + 11x + 50 = 650 + 11x$ = Gutsertrag des 2. Jahres.

$$16x + 400 = 11x + 650$$
$$5x = 250$$
$$x = 50$$

$12x = 600$ fl. = jährl. Ausg. des 1. J.,
$11x = 550$ „ = „ „ „ 2. „
$12x + 300 = 900$ „ = Gutsertrag im 1. J.
$16x + 400$ oder $650 + 11x = 1200$ fl. = „ „ 2. J.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Gutsertrag im 1. Jahre in fl.,
$y - 300$ = Ausgaben des 1. Jahres in fl.,
$\frac{11}{12}(y - 300) = \frac{11}{12}y - 275$ = „ „ 2. „ „ „ denn dieselben wurden gegen das 1. J. um die Hälfte der Steuern, also um $\frac{1}{12}$ d. ganzen Betrages vermind.,
$500 - \frac{20}{100} . 500 = 400$ = Pachtzins des 2. J. in fl.,
200 = Rückstand vom vorigen Jahre in fl.,
$\frac{4}{3}y$ = Gutsertrag im 2. Jahre in fl.,
$\frac{4}{3}y - (\frac{11}{12}y - 275 + 400 + 200) = \frac{5}{12}y - 325$ = Ersparn. im 2. J. in fl.

$$\frac{5}{12}y - 325 = 50$$

$y = 900$ fl. = Gutsertrag des 1. Jahres,
$\frac{4}{3}y = 1200$ „ = „ „ 2. „
$y - 300 = 600$ „ = jährl. Ausg. des 1. Jahres.
$\frac{11}{12}y - 275 = 550$ „ = „ „ „ 2. „

Nr. 70. Es leiht Jemand eine gewisse Summe zu 8 Procent aus. Nachdem er es zugegeben hatte, dass die Zinsen 12 Jahre lang unbezahlt blieben, schlägt er endlich am Ende des 12. Jahres die angewachsenen Zinsen zum Capital, leiht das Ganze zum nämlichen Zinsfusse aus, und erhält jetzt 384 fl. mehr an Zins jährlich als vorher. Welche Summe wurde ausgeliehen?

Auflösung. x = ursprünglich ausgeliehene Summe in fl.,

$\frac{8}{100}x = \frac{2x}{25}$ = ursprüngl. 8proc. jährl. Zinsen derselben,

$12 \cdot \frac{2x}{25} = \frac{24x}{25}$ = zwölfjährige 8proc. Zinsen derselben,

$x + \frac{24}{25}x = \frac{49}{25}x$ = nachher ausgeliehene Summe in fl.,

$\frac{8}{100} \cdot \frac{49}{25}x = \frac{98x}{625}$ = nachherige 8proc. jährliche Zinsen derselben,

$\frac{98x}{625} - \frac{2x}{25} = \frac{48x}{625}$ = Mehrerlös aus den jetzigen Zinsen.

$\frac{48x}{625} = 384$

$x = 5000$ fl. = ursprüngl. ausgeliehene Summe,

$\frac{49}{25}x = 9800$ „ = nachher ausgeliehene Summe.

Nr. 71. An der Mündung eines Flusses, dessen Strömung allein durch Ebbe und Fluth bedingt ist, fährt ein Schiffer von *A* nach *B* stromabwärts durch Ruderkraft, aber unter Benutzung der Ebbe in der Mitte des Flusses, wo die Strömung am stärksten ist, in $1\frac{1}{2}$ Stunden. Den Rückweg ist er genöthigt gegen die Ebbe zu machen, was mit Anwendung gleicher Ruderkraft, aber in der Nähe des Ufers, wo die Strömung nur $\frac{3}{5}$ der vorigen beträgt, in $2\frac{1}{4}$ Stunden geschieht. Wenn nun *A* und *B* $4\frac{1}{2}$ Meilen von einander entfernt sind, wie stark ist die Strömung des Wassers durch die Ebbe in der Mitte des Flusses?

Auflösung.

x = Ström. der Ebbe in der Mitte d. Fl. in Meil. per Stunde;

$3 - x$ = Werth der Ruderkraft in Meilen per St., da der Schiffer auf der Thalfahrt $\frac{4\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}} = 3$ Meilen per St. zurücklegt;

$\frac{3x}{5}$ = Strömung der Ebbe am Ufer des Fl. in Meil. per St.;

$2 + \frac{3x}{5}$ = Werth der Ruderkraft in Meilen per St., da der Schiffer auf der Bergfahrt $\frac{4\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}} = 2$ Meilen per St. zurücklegt.

$2 + \frac{3x}{5} = 3 - x$

$\frac{8x}{5} = 1$

$x = \frac{5}{8}$ Meilen per Stunde = Strömung in der Mitte,

$\frac{3x}{5} = \frac{3}{8}$ „ „ „ = „ am Ufer.

Anmerkung. Ein anderer Ansatz ergiebt sich auch folgendermassen aus Obigem:

$3 - x - \frac{3x}{5} = 3 - \frac{8x}{5}$ = Anzahl Meilen per Stunde, die der Schiffer auf der Bergfahrt zurücklegt,

$\left(3 - \frac{8x}{5}\right) 2\frac{1}{4}$ = Entfernung AB in Meilen.

$$4\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}\left(3 - \frac{8x}{5}\right)$$
$$x = \frac{5}{8}.$$

Nr. 72. Zum Brodbacken nimmt Jemand Weizenmehl, Roggenmehl und Wasser, im Ganzen 15 Pfd. Das Gewicht des erstern, vermehrt um 5 Pfd., beträgt $\frac{2}{3}$ vom Gewicht des zweiten, und das Gewicht des Wassers ist $\frac{1}{5}$ vom Gewicht des Mehles im Ganzen. Wie viel wurde von jeder Gattung genommen?

Auflösung. x = Gew. des Weizenmehles in Pfd.,

$x + 5 = \frac{2}{3}$ des Gew. des Roggenmehles,

$\frac{3}{2}(x+5)$ = wirkl. Gew. des Roggenm. in Pfd.,

$x + \frac{3}{2}(x+5) = \frac{5}{2}(x+3)$ = ganzes Gew. des Mehles in Pfd.,

$\frac{1}{2}(x+3)$ = Gew. des Wassers in Pfd.,

$\frac{5}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(x+3) = 3(x+3)$ = Gew. d. ganzen Gemenges in Pfd.

$$3(x+3) = 15$$
$$x + 3 = 5$$

x = 2 Pfd. Weizenmehl,

$\frac{3}{2}(x+5)$ = $10\frac{1}{2}$ Pfd. Roggenmehl,

$\frac{1}{2}(x+3)$ = $2\frac{1}{2}$ Pfd. Wasser.

Nr. 73. In einer Batterie befinden sich zwei Kanonen. Die erste hat 36 Schüsse gethan, als die zweite zu schiessen anfängt und schiesst in derselben Zeit achtmal, in welcher die zweite siebenmal schiesst. Wenn nun das Quantum des für jeden Schuss verbrauchten Pulvers bei der ersten Kanone sich zu dem der zweiten verhält wie 3 : 4, wie oft kann die zweite Kanone schiessen, bis beide Kanonen gleich viel Pulver verbraucht haben?

Auflösung.

x = Anzahl Schüsse, welche die zweite Kanone macht,

$\frac{8x}{7}$ = „ „ welche die erste Kanone in derselben Zeit macht,

$\frac{8x}{7}+36 =$ ganze Anzahl Schüsse der ersten Kanone,

$\frac{4x}{3} =$ Werth der x Schüsse der zweiten Kanone in Schüssen der ersten, indem ein Schuss der zweiten $\frac{4}{3}$ des Pulver-Quantums braucht, dessen die erste zu einem Schuss bedarf.

$$\frac{4x}{3} = \frac{8x}{7}+36$$
$$28x = 24x+756$$
$$4x = 756$$
$x = 189$ Schüsse.

Anmerkung. Derselbe Ansatz ergiebt sich auch aus der Betrachtung, dass sich bei gleichem ganzen Pulververbrauch die Anzahlen der Schüsse umgekehrt verhalten müssen wie die zu einem Schuss verwendeten Pulver-Quantitäten, mithin:

$$x : \left(\frac{8x}{7}+36\right) = 3 : 4.$$

Auch auf folgende Weise:

$\frac{8x}{7} - x = \frac{x}{7} =$ Anzahl Schüsse, die die erste Kanone weiters noch mehr macht als die zweite;

$36+\frac{x}{7} =$ Anzahl Schüsse der ersten Kan., welche die zweite durch ihren gröss. Pulververbrauch einbringen m.;

$\frac{x}{3} =$ Mehrverbrauch der zweiten Kanone gegen die erste an Pulver in Schüssen der ersten.

$$36+\frac{x}{7} = \frac{x}{3}.$$

Nr. 74. Die beiden Minutenzeiger auf zwei Taschenuhren stehen heute Mittags 12 Uhr richtig. Da nun aber die eine Uhr in jeder Stunde um 1 Minute nachgeht, wann werden beide Zeiger wieder zu gleicher Zeit auf 12 Uhr stehen?

Auflösung.

$x =$ Anzahl Stunden, nach welchen die Zeiger wieder auf 12 Uhr richtig stehen;

$60x =$ Anzahl Raum-Minuten, die der richtig gehende Minutenzeiger in dieser Zeit durchläuft;

$59x =$ Anzahl Raum-Minuten, die der nachgehende Minutenzeiger in dieser Zeit durchläuft;

$60x - 59x = x$ = Anzahl Raum-Min., um welche der zweite Zeiger gegen den ersten in x Stunden zurückbleibt;

aber auch 60 = „ „ „ „ „ „ „ denn der zweite Zeiger bleibt um die Peripherie der Uhr, also um 60 Raum-Min. zurück.

x = 60 Stunden.

Nr. 75. Ein Tuchhändler kauft ein Stück Tuch um 138 fl., und verkauft davon 22 Ellen. Er findet nachher ein anderes Stück von gleicher Güte, für welches er 42 fl. giebt. Wäre das letztere 2 Ellen länger, so würde es sich in der Länge zu dem Ueberreste des vorigen verhalten wie 2 : 3. Wie lang war jedes Stück, und was war der Preis der Elle?

Auflösung. x = Anzahl Ellen des ersten St. beim Einkauf,

$x - 22$ = Ueberrest des ersten Stücks nach dem Verkauf von 22 Ellen,

$\frac{138}{x}$ = Preis einer Elle beider Tücher in fl.,

$\frac{42}{\frac{138}{x}} = \frac{7x}{23}$ = Anzahl Ellen des zweiten Stücks,

$\frac{7x}{23} + 2$ = vorausgesetzte Länge des zweiten Stücks.

$$\left(\frac{7x}{23} + 2\right) : (x - 22) = 2 : 3$$

$$\frac{21x}{23} + 6 = 2x - 44$$

$$50 = \frac{25x}{23}$$

$x = 46$ Ellen = Länge des ersten Stücks,

$\frac{7x}{23} = 14$ „ = „ „ zweiten „

$\frac{138}{x} = 3$ fl. = Preis einer Elle.

Nr. 76. Ein Obsthändler verkauft eine Anzahl von Birnen und Aepfeln zusammen um 3 fl. 54 krz. Die Zahl der Aepfel war um 360 Stück grösser als die der Birnen. Er verkaufte immer 10 Aepfel um 3 krz., und 30 Birnen um $1\frac{1}{2}$ krz. theurer als 70 Aepfel. Wie viel Stück verkaufte er von jeder Sorte, und wie theuer eine Birne?

Auflösung. x = Anzahl verkaufter Birnen,

$x+360$ = „ „ Aepfel,

$(x+360)\,.\,\frac{3}{10}$ = Preis sämmtlicher Aepfel in krz.,

$70\,.\,\frac{3}{10} = 21$ = „ von 70 Aepfeln in krz.,

$21+1\frac{1}{2} = \frac{45}{2}$ = „ „ 30 Birnen „ „

$\frac{\frac{45}{2}}{30} = \frac{3}{4}$ = „ einer Birne „ „

$\frac{3}{4}x$ = „ sämmtlicher Birnen in krz.,

$\frac{3}{4}x+\frac{3}{10}(x+360) = \frac{21}{20}x+108$ = Preis des gesammten Obstes.

$$\frac{21}{20}x+108 = 234$$
$$\frac{21}{20}x = 126$$

x = 120 Birnen,

$x+360$ = 480 Aepfel.

Der Preis einer Birne ist bereits oben zu $\frac{3}{4}$ krz. gefunden worden.

Nr. 77. Die Zahl 198 soll so in fünf Theile getheilt werden, dass wenn man den ersten Theil um 1, den zweiten um 2 vermehrt, den dritten um 3 vermindert, den vierten mit 4 multiplicirt und den fünften mit 5 dividirt, die Resultate gleich werden. Wie heissen die Theile?

Auflösung. $4x$ = Resultate der angezeigten Rechn.-Oper.,

$4x-1$ = erster Theil,

$4x-2$ = zweiter „

$4x+3$ = dritter „

$\frac{4x}{4} = x$ = vierter „

$5\,.\,4x = 20x$ = fünfter „

$33x$ = Summe aller Theile.

$$33x = 198$$
$$x = 6$$

$4x-1 = 23$ = erster Theil,

$4x-2 = 22$ = zweiter „

$4x+3 = 27$ = dritter „

$x = 6$ = vierter „

$20x = 120$ = fünfter „

Nr. 78. Es hat Jemand vier Gefässe. Füllt er das zweite aus dem ersten, so bleiben im letztern $\frac{4}{7}$ zurück. Füllt er das dritte aus dem zweiten, so bleibt in dem zweiten $\frac{1}{4}$ zurück. Giesst

er das dritte in das vierte, so füllt das dritte nur $\frac{9}{16}$ des letztern. Mit dem ersten endlich kann er das dritte und vierte füllen, und es bleiben noch in jenem 15 Maass zurück. Wie viel hält jedes Gefäss?

Auflösung. $7x$ = Inhalt des ersten Gefässes in Maass;

$4x$ = Rest, der in demselben nach Füllung des zweiten Gefässes übrig bleibt;

$7x - 4x = 3x$ = Inhalt des zweiten Gef. in Maass;

$3x - (\frac{1}{4} . 3x) = \frac{9x}{4}$ = „ „ dritten „ „ „

$\frac{16}{9} . \frac{9x}{4} = 4x$ = „ „ vierten „ „ „ denn da das dritte $\frac{9}{16}$ des vierten füllt, so muss letzteres umgek. $\frac{16}{9}$ von jenem betragen;

$7x - \left(\frac{9x}{4} + 4x\right) = \frac{3x}{4}$ = Rest, der im ersten Gef. nach Füllung des dritten u. vierten übrig bleibt.

$$\frac{3x}{4} = 15$$

$$x = 20$$

$7x$ = 140 Maass = Inhalt des ersten Gef.,

$3x$ = 60 „ = „ „ zweiten „

$\frac{9x}{4}$ = 45 „ = „ „ dritten „

$4x$ = 80 „ = „ „ vierten „

Nr. 79. Ein Packetboot segelt bei günstigem Winde von Dover nach Calais in zwei Stunden. Den Rückweg macht es zuerst bei so ungünstigem Winde, dass es in einer Stunde $1\frac{1}{2}$ Meilen weniger zurücklegt als bei dem Hinwege. Auf der Hälfte des Weges aber dreht sich der Wind günstiger, so dass es in jeder Stunde $\frac{1}{2}$ Meile weiter zurückzulegen vermag, und es kommt dadurch schneller in Dover an, als es sonst angekommen wäre, wenn sich der Wind nicht gedreht hätte, und zwar im Verhältniss von 6 : 7. Wie weit ist Dover von Calais entfernt, und wie schnell segelte das Schiff auf dem Rückwege?

Auflösung. x = Entfernung beider Orte in Meilen,

$\frac{x}{2}$ = Anzahl Meilen, die das Boot auf der Hinfahrt per Stunde zurücklegt;

$\frac{x}{2} - 1\frac{1}{2} = \frac{x-3}{2}$ = Anzahl Meilen, die das Boot in der ersten Hälfte der Rückfahrt per Stunde macht;

$\frac{x-3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x-2}{2}$ = Anzahl Meilen, die das Boot in der zweiten Hälfte der Rückfahrt per Stunde macht;

$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x-3}{2}}=\frac{x}{x-3}$ = Anzahl Stunden, die das Boot zum Zurücklegen der ersten Hälfte der Rückf. braucht;

$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x-2}{2}}=\frac{x}{x-2}$ = Anzahl Stunden, die das Boot zum Zurücklegen der zweiten Hälfte der Rückf. braucht;

$\frac{x}{x-3}+\frac{x}{x-2}=\frac{x(2x-5)}{(x-2)(x-3)}$ = Dauer der ganzen Rückfahrt in Stunden;

$\frac{x}{\frac{x-3}{2}}=\frac{2x}{x-3}$ = vorausgesetzte Dauer der Rückfahrt, wenn sie wie in der ersten Hälfte fortges. w.

$$\frac{x(2x-5)}{(x-2)(x-3)}:\frac{2x}{x-3}=6:7$$

$$(2x-5):(2x-4)=6:7$$

$$14x-35=12x-24$$

$$2x=11$$

$x=5\frac{1}{2}$ Meilen = Entfern. von Dover u. Calais,

$\frac{x-3}{2}=1\frac{1}{4}$ „ = die das Boot anfangs per St. m.

$\frac{x-2}{2}=1\frac{3}{4}$ „ = „ „ „ nachher „ „ „

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Anzahl Meil., die das Boot in der ersten Hälfte der Rückfahrt per Stunde macht;

$y+\frac{1}{2}$ = Anzahl Meil., die es in der zweiten Hälfte per Stunde macht;

$y+1\frac{1}{2}$ = Anzahl Meil., die es auf der Hinfahrt per Stunde macht;

$2(y+1\frac{1}{2})=2y+3$ = Entfern. von Dover und Calais in Meilen;

$\frac{\frac{2y+3}{2}}{y}=\frac{2y+3}{2y}$ = Anzahl Stunden, die das Boot zur ersten Hälfte der Rückfahrt braucht;

$\frac{\frac{2y+3}{2}}{y+\frac{1}{2}}=\frac{2y+3}{2y+1}$ = Anzahl St., die es z. zweiten Hälfte braucht;

$\frac{2y+3}{2y}+\frac{2y+3}{2y+1}=\frac{(2y+3)(4y+1)}{2y(2y+1)}$ = Dauer der ganzen Rückfahrt in Stunden;

$\frac{2y+3}{y}$ = vorausgesetzte Dauer der Rückfahrt.

$$\frac{(2y+3)(4y+1)}{2y(2y+1)} : \frac{2y+3}{y} = 6:7$$

$$(4y+1):(4y+2) = 6:7$$

$y = 1\frac{1}{4}$ Meil., die das B. anfängl. per St. macht,

$y+\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}$ „ „ „ „ nachher „ „ „

$2y+3 = 5\frac{1}{2}$ „ = Entfern. von Dover u. Calais.

Nr. 80. Unter 600 Abstimmenden über eine Frage war zuerst die Majorität für die Verneinung derselben. Nachher wurde jedoch dieselbe Frage noch einmal vorgelegt und in Folge veränderter Umstände durch die Majorität bejaht. Die Zahl der im ersten Falle mit Nein Stimmenden verhielt sich zur Zahl der im zweiten mit Ja Stimmenden wie 7 : 8, und die wirkliche Mehrheit für das Ja war im zweiten Fall doppelt so gross als die Mehrheit für das Nein im ersten. Wie viel hatten im zweiten Fall ihre Ansicht geändert?

Auflösung. x = Anz. der im I. Wahlg. mit Ja,

$600-x$ = „ „ „ „ „ „ Nein,

$\frac{8}{7}(600-x)$ = „ „ „ II. „ „ Ja,

$600-\frac{8}{7}(600-x) = \frac{8}{7}x - \frac{600}{7}$ = „ „ „ „ „ „ Nein Stimmenden;

$$\frac{8}{7}(600-x)-x \text{ oder } 600-x-\left(\frac{8}{7}x-\frac{600}{7}\right) = \frac{4800-15x}{7}$$

= Anzahl derjenigen, die ihre Ansicht änderten;

$600-x-x = 600-2x$ = Majorität für das Nein im I. Wahlg.,

$\frac{8}{7}(600-x)-\left(\frac{8}{7}x-\frac{600}{7}\right) = \frac{9}{7}\cdot 600-\frac{16}{7}x$ = Majorität für das Ja im II. Wahlgang,

aber auch $2(600-2x)$ = Majorität für das Ja im II. Wahlgang.

$$1200-4x = \frac{5400}{7}-\frac{16}{7}x$$

$$8400-28x = 5400-16x$$

$$3000 = 12x$$

$x = 250$ Mann,

$\frac{4800-15x}{7} = 150$ Mann, die ihre Ansicht änderten.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$7y$ = Zahl der im I. Wahlgang mit Nein Stimmenden,

$8y$ = „ „ „ II. „ „ Ja „

$600-7y$ = „ „ „ I. „ „ „ „

$600-8y$ = „ „ „ II. „ „ Nein „

$7y - (600 - 8y)$ oder $8y - (600 - 7y) = 15y - 600$ = Zahl derjenigen, die ihre Ansicht änderten;

$7y - (600 - 7y) = 14y - 600$ = Majorit. für Nein im I. Wahlg.,

$8y - (600 - 8y) = 16y - 600$ = „ „ Ja „ II. „

aber auch $2(14y - 600)$ = „ „ „ „ „ „

$28y - 1200 = 16y - 600$

$y = 50$

$15y - 600 = 150$ M., die ihre Ans. änderten.

Nr. 81. Zur Beleuchtung eines Ladens, der am Sonntage geschlossen bleibt, sollen fünf grössere und drei kleinere Flammen von einer Gas-Compagnie vertragsmässig eingerichtet werden. Da jedoch die Compagnie nur eine grössere Flamme bereit hat, so liefert sie zur Ausgleichung für die rückständigen grössern Flammen noch weitere fünf kleinere. Der Kaufmann will seine Beleuchtung verstärken und vermehrt zu diesem Zweck die frühere Beleuchtung um weitere zwei kleine, und bedingt sich zugleich aus, dass Samstags Nachts die sämmtlic henLichter doppelt so lange als gewöhnlich brennen sollen. Für diese Vermehrung des Lichtstoffes hat er $15\frac{1}{2}$ fl. weiter zu bezahlen. Was hat er im Ganzen zu bezahlen, und was für eine grössere und was für eine kleinere Flamme?

Auflösung. $4x$ = Kosten einer kleinen Flamme bei der ersten 6nächtlichen Beleuchtung in fl.;

$5x$ = Kosten einer grossen Flamme bei derselben Beleuchtung, indem 5 kleine Flammen statt 4 grossen abgegeben w.;

$5x + 8 \cdot 4x = 37x$ = Kosten der ersten Beleuchtung in fl.;

$\frac{7}{6} \cdot 4x = \frac{14}{3}x$ = Kosten einer kleinen Fl. bei der zweiten 7nächtl. Beleuchtung in fl., indem die doppelte Brennzeit des Samstags als 2 Nächte gerechnet werden kann;

$\frac{7}{6} \cdot 5x = \frac{35}{6}x$ = Kosten einer grossen Fl. im zweiten Falle;

$\frac{35}{6}x + 10 \cdot \frac{14}{3}x = \frac{315}{6}x$ = Kosten der zweiten Beleuchtung in fl.;

$\frac{315}{6}x - 37x = \frac{93}{6}x$ = Mehrauslage im zweiten Fall.

$\frac{93}{6}x = 15\frac{1}{2}$

$93x = 93$

$x = 1$

$4x = 4$ fl. = Kosten einer kleinen Fl. im 1. Fall,

$5x = 5$ „ = „ „ grossen „ „ „ „ .

$37x = 37$ fl. = Beleuchtunsgkosten im 1. Fall.

$\frac{315}{6}x = 52\frac{1}{2}$ „ = „ „ 2. „

Nr. 82. *A* und *B* reisen zur nämlichen Zeit von *C* und *D* nach *E*. Der Weg von *C* nach *E* führt durch *D*. *A* legt zuerst in der Stunde $1\frac{3}{4}$ Meilen zurück und würde auf diese Art den *B* $1\frac{1}{4}$ Meilen vor *E* einholen. Aber als er in *D* angekommen, legt er nur noch $1\frac{2}{3}$ Meilen in der Stunde zurück, und kommt dadurch zu gleicher Zeit mit *B* in *E* an. Wenn nun *B* in jeder Stunde $1\frac{1}{4}$ Meile zurücklegt, wie weit sind die Orte *C*, *D*, *E* von einander entfernt?

Auflösung. $5x$ = Entfernung *DE* in Meilen;

$\frac{5x}{1\frac{1}{4}} = 4x$ = Zeit, die *B* zum Zurücklegen von *DE* braucht, in Stunden;

und auch = Zeit, die *A* zum Zurücklegen des Weges *CE* braucht, in Stunden;

$\frac{5x}{1\frac{2}{3}} = 3x$ = Zeit, die *A* zum Weg *DE* braucht,

$4x - 3x = x$ = „ „ „ „ „ *CD* „

$1\frac{3}{4} \cdot x = \frac{7x}{4}$ = Länge des Weges *CD* in Meilen,

$5x + \frac{7x}{4} = \frac{27x}{4}$ = „ „ „ *CE* „ „

$\frac{27x}{4} - 1\frac{1}{4} = \frac{27x - 5}{4}$ = vorausges. Anzahl Meilen, die *A* bis zum Zusammentr. mit *B* zurückl. würde, wenn er in der anfängl. Art fortreisen würde;

$\frac{\frac{27x-5}{4}}{1\frac{3}{4}} = \frac{27x - 5}{7}$ = Zeit, die er hierzu brauchen würde, in St.;

$5x - 1\frac{1}{4} = \frac{20x - 5}{4}$ = vorausges. Anz. Meilen, die *B* bis zum Zusammentreffen mit *A* zurücklegen würde;

$\frac{\frac{20x-5}{4}}{1\frac{1}{4}} = 4x - 1$ = Zeit, die er hierzu brauchen würde, in St.

$$4x - 1 = \frac{27x - 5}{7}$$

$$28x - 7 = 27x - 5$$

$$x = 2$$

$5x = 10$ Meilen = Entfernung *DE*,

$\frac{7x}{4} = 3\frac{1}{2}$ „ = „ *CD*.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$y =$ Anz. St., welche beide Reisende wirklich unterwegs sind, u. zwar B zum Zurückl. von DE u. A zum Zurückl. von CE;

$1\frac{1}{4}y = \frac{5}{4}y =$ Entfernung DE in Meilen;

$\frac{5}{4}y - 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}(y-1) =$ Enfern. von D bis zum Punkt, wo nach der Voraussetzung der Aufgabe A dem B begegnen würde, in Meilen;

$\frac{\frac{5}{4}(y-1)}{1\frac{1}{4}} = y-1 =$ Anzahl Stunden, die B zum Zurücklegen derselben brauchen würde;

$(y-1) \,.\, 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}(y-1) =$ Anz. Meil., die A in dies. Zeit zurückl. würde;

$\frac{7}{4}(y-1) - \frac{5}{4}(y-1) = \frac{1}{2}(y-1) =$ Entfernung CD in Meilen;

$\frac{\frac{1}{2}(y-1)}{1\frac{3}{4}} = \frac{2}{7}(y-1) =$ Anz. Stunden, die A zu CD wirkl. braucht;

$\frac{\frac{5}{4}y}{1\frac{3}{4}} = \frac{5}{7}y =$ „ „ „ „ „ DE „ „

$\frac{5}{7}y + \frac{2}{7}(y-1) =$ „ „ „ „ „ CE „ „

$\frac{5}{7}y + \frac{2}{7}(y-1) = y$

$y = 8$ Stunden,

$\frac{5}{4}y = 10$ Meilen $=$ Entfernung DE,

$\frac{1}{2}(y-1) = 3\frac{1}{2}$ „ $=$ „ CD.

Eine fernere Auflösung wäre folgende:

$z =$ vorausges. Anz. Stunden, nach welcher sich A u. B $1\frac{1}{4}$ Meilen vor E treffen würden;

$1\frac{3}{4} \,.\, z = \frac{7}{4}z =$ Anz. Meil., die A in dieser Zeit zurückl. w.;

$1\frac{1}{4} \,.\, z = \frac{5}{4}z =$ „ „ „ B „ „ „ „ „

$\frac{7}{4}z - \frac{5}{4}z = \frac{1}{2}z =$ Entfernung CD in Meilen;

$\frac{5}{4}z + 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}(z+1) =$ „ DE „ „

$\frac{\frac{z}{2}}{1\frac{3}{4}} = \frac{2}{7}z =$ Anz. Stunden, die A zu CD wirkl. braucht;

$\frac{\frac{5}{4}(z+1)}{1\frac{3}{4}} = \frac{5}{7}(z+1) =$ „ „ „ „ „ DE „ „

$\frac{2}{7}z + \frac{5}{7}(z+1) =$ „ „ die A unterwegs ist;

$\frac{\frac{5}{4}(z+1)}{1\frac{1}{4}} = z+1 =$ „ „ „ B „ „

$\frac{2}{7}z + \frac{5}{7}z + \frac{5}{7} = z+1$

$z = 7$ Stunden,

$\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{2}$ Meilen $=$ Entfernung CD,

$\frac{5}{4}(z+1) = 10$ „ $=$ „ DE.

Nr. 83. Ein Vater möchte seinen zwei Töchtern eine gleiche Summe am Tage ihrer Volljährigkeit nach zurückgelegtem 21sten Lebensjahre hinterlassen, und bestimmt daher in seinem Testamente der ältesten von seinem Tode an die sämmtlichen Interessen von angekauften 4procentigen Staatspapieren, welche beim Course von 88 (statt 100) gekauft wurden, der jüngeren ebenso die Zinsen von 3procentigen Papieren, deren Cours beim Ankauf auf 63 gestanden. Die für die letztern Papiere ausgelegte Summe baaren Geldes betrug 35000 fl. weniger als für die erstern. Wenn nun die Töchter, die bei dem Tode ihres Vaters 17 und 14 Jahre alt waren, wirklich bei ihrer Mündigkeit dadurch gleich viel erhielten, wie gross war die für jede in Staatspapieren angelegte Summe baaren Geldes, und was erhielt jede bei ihrer Mündigkeit?

Auflösung. x = Summe baaren Geldes, die in 4proc. Papieren angelegt wurde, in fl.;

$x - 35000$ = Summe baaren Geldes, die in 3proc. Papieren angelegt wurde, in fl.;

$(21-17)\frac{4}{88}x = \frac{2x}{11}$ = 4jähr. 4proc. Zinsen der ersten Summe, da 88 fl. baar Geld 4 fl. Zinsen tragen;

$(21-14)\cdot\frac{3}{63}(x-35000) = \frac{x-35000}{3}$ = 7jähr. 3proc. Interess. der zweiten Summe in fl.

$$\frac{2x}{11} = \frac{x-35000}{3}$$

$$6x = 11x - 385000$$

$$385000 = 5x$$

$x = 77000$ fl. = Summe baaren Geldes, die für 4proc. Papiere ausgelegt wurde;

$x - 35000 = 42000$ fl. = Summe baaren Geldes, die für 3proc. Papiere ausgelegt wurde;

$\frac{2x}{11}$ oder $\frac{x-35000}{3} = 14000$ fl. = Summe, die jede Tochter bei ihrer Volljährigkeit erhielt.

Nr. 84. Eine Rennbahn durchrennen zwei Personen, *A* und *B*, mit ihren Pferden in 6 Minuten. *A* setzt seinen Weg durch die ganze Bahn hindurch mit gleicher Geschwindigkeit fort, *B* ebenso während der ersten 5 Minuten, und sieht sich dadurch am Ende der vierten Minute um den 440sten Theil der Bahn gegen *A* zurück. In der letzten Minute jedoch beschleunigt er die Geschwin-

digkeit seines Pferdes um 60 Fuss, und kommt dadurch am Ende der sechsten Minute an's Ziel, während A noch 6 Fuss von demselben entfernt ist. Wie lang war die Bahn?

Auflösung. $440x$ = Länge der Bahn in Fussen,

$440x - 6$ = Weg, den A in 6 Min. macht,

$\frac{4}{6} . (440x - 6) = \frac{2}{3}(440x - 6)$ = „ „ „ „ 4 „ „

$\frac{2}{3}(440x - 6) - x = \frac{877}{3}x - 4$ = „ „ B „ 4 „ „

$\frac{877}{12}x - 1$ = „ „ „ „ 1 „ „

$\frac{4385}{12}x - 5$ = „ „ „ „ 5 „ „

$\frac{877}{12}x - 1 + 60 = \frac{877}{12}x + 59$ = „ „ „ „ der letzten Min. macht,

$\frac{4385}{12}x - 5 + \frac{877}{12}x + 59 = \frac{2631}{6}x + 54$ = ganzer von B zurückgelegter Weg.

$$\frac{2631}{6}x + 54 = 440x$$

$$54 = \frac{3}{2}x$$

$$x = 36$$

$440x$ = 15840 Fuss = Länge der Bahn.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Anz. Fuss, die A in der Min. m.,

$6y$ = „ „ „ „ „ 6 „ „

$6y + 6 = 6(y+1)$ = Länge der Rennbahn,

$4y$ = Anz. Fuss, die A in 4 Min. m.,

$4y - \frac{6(y+1)}{440} = 4y - \frac{3(y+1)}{220}$ = „ „ „ B „ „ „ „

$y - \frac{3(y+1)}{880}$ = „ „ „ „ „ 1 „ „

$5y - \frac{3(y+1)}{176}$ = „ „ „ „ „ 5 „ „

$y - \frac{3(y+1)}{880} + 60$ = „ „ „ „ „ der letzten Min. macht,

$5y - \frac{3(y+1)}{176} + y - \frac{3(y+1)}{880} + 60 = 6y - \frac{9(y+1)}{440} + 60$ = ganzer von B zurückgelegter Weg.

$$6y - \frac{9(y+1)}{440} + 60 = 6y + 6$$

$$y + 1 = 2640$$

$6(y+1)$ = 15840 Fuss = Länge der Bahn.

Eine fernere Auflösung ist folgende:

z = Anz. Fuss, die B ursprüngl. in der Min. macht,

$z + 60$ = „ „ „ „ in der letzten Min. macht,

$$5z+z+60 = 6(z+10) = \text{Länge der Rennbahn.}$$

$$4z+\frac{6(z+10)}{440} = 4z+\frac{3(z+10)}{220} = \text{Weg, d. } A \text{ in 4 Min. zurückl.,}$$

$$\frac{6}{4}\left(4z+\frac{3(z+10)}{220}\right) = 6z+\frac{9(z+10)}{440} = \text{„ „ „ „ 6 „ „}$$

$$6z+\frac{9(z+10)}{440}+6 = \text{Länge der Rennbahn.}$$

$$6z+\frac{9(z+10)}{440}+6 = 6z+60$$

$$z+10 = 2640$$

$$6(z+10) = 15840 \text{ Fuss} = \text{Bahnlänge.}$$

Nr. 85. Von zwei feindlichen Lagern werden zwei gleich starke Detachements, A und B, zum Recognosciren ausgeschickt. Beide stossen auf einander und kommen ins Handgemenge, wobei A 50 Todte und Gefangene verliert, während B nur 20 Todte hat. Nachdem sich A mit einer Zahl Soldaten verstärkt hat, welche gleich $\frac{5}{7}$ von den in dem Corps B übrig gebliebenen ist, und ebenso B mit einer Anzahl, welche 46 Mann mehr beträgt als $\frac{3}{5}$ von den dem A übrig gebliebenen, erneuern sie das Gefecht, wodurch A gezwungen wird, sich mit einem Verluste von 30 Mann zurückzuziehen. Da B in dem letztern ebenfalls 20 Mann verloren hat, so bleiben ihm doppelt so viel Mann übrig, als sich im Corps A noch befinden. Wie gross war jedes Detachement ursprünglich?

Auflösung.

x = ursprüngl. Stärke beider Det.,

$x-50$ = Rest der Mannschaft von A nach dem ersten Treffen,

$x-20$ = Rest der Mannschaft von B nach dem ersten Treffen,

$\frac{5}{7}(x-20)$ = Verstärkung, die A erhält,

$46+\frac{3}{5}(x-50) = \frac{3}{5}x+16$ = „ „ B „

$x-50+\frac{5}{7}(x-20) = \frac{12x-450}{7}$ = Stärke von A vor d. 2. Treffen,

$x-20+\frac{3}{5}x+16 = \frac{8x}{5}-4$ = „ „ B „ „ „ „

$\frac{12x-450}{7}-30 = \frac{12(x-55)}{7}$ = Rest der Mannschaft von A nach dem 2. Treffen,

$\frac{8x}{5}-4-20 = \frac{8x}{5}-24$ = Rest der Mannschaft von B nach dem 2. Treffen,

aber auch $\frac{14(x-55)}{7}$ = Rest d. Mannsch. von *B* nach d. 2. Tr.

$$\frac{8x}{5} - 24 = \frac{14}{7}(x-55)$$
$$7x - 105 = 15x - 825$$
$$720 = 8x$$
$$x = 90 \text{ Mann.}$$

Nr. 86. Ein Jäger rechnet die von ihm getödteten Vögel zusammen und findet, dass ihm jedes Jahr noch 50 Stück fehlen, damit die Zahl der getödteten Vögel sich zu den im vergangenen Jahre getödteten wie 3 : 2 verhalte. Die Zahl der im vierten Jahre getödteten beträgt dadurch 170 Stück weniger als das Dreifache von der Zahl der im ersten Jahre getödteten. Wie viel tödtete er jedes Jahr?

Auflösung. x = Zahl getödteter V. des 1. J.,

$\frac{3}{2}x - 50$ = „ „ „ „ 2. „

$\frac{3}{2}(\frac{3}{2}x - 50) - 50 = \frac{9}{4}x - 125$ = „ „ „ „ 3. „

$\frac{3}{2}(\frac{9}{4}x - 125) - 50 = \frac{27x}{8} - \frac{475}{2}$ = „ „ „ „ 4. „

aber auch $3x - 170$ = „ „ „ „ „ „

$$\frac{27x}{8} - \frac{475}{2} = 3x - 170$$
$$27x - 1900 = 24x - 1360$$
$$3x = 540$$

$x = 180$ V., die im 1. J. get. w.

$\frac{3}{2}x - 50 = 220$ „ „ „ 2. „ „ „

$\frac{9}{4}x - 125 = 280$ „ „ „ 3. „ „ „

$\frac{27}{8}x - \frac{475}{2}$ oder $3x - 170 = 370$ „ „ „ 4. „ „ „

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Zahl getödt. V. des 4. J.,

$\frac{2}{3}(y+50)$ = „ „ „ „ 3. „

$\frac{2}{3}(\frac{2}{3}(y+50)+50) = \frac{4}{9}(y+50) + \frac{100}{3}$ = „ „ „ „ 2. „

$\frac{2}{3}(\frac{4}{9}(y+50) + \frac{100}{3} + 50) = \frac{8}{27}(y+50) + \frac{500}{9}$ = Zahl getödteter V. des 1. Jahres,

aber auch $\frac{y+170}{3}$ = Zahl getödteter V. des 1. J.

$$\frac{8}{27}(y+50) + \frac{500}{9} = \frac{y+170}{3}$$

$y = 370$ V., die im 4. J. getödtet w.,

$$\tfrac{2}{3}(y+50) = 280 \text{ V., die im 3. J. getödtet w,}$$
$$\tfrac{4}{9}(y+50)+\tfrac{100}{3} = 220 \text{ „ „ „ 2. „ „ „}$$
$$\tfrac{8}{27}(y+50)+\tfrac{500}{9} \text{ oder } \frac{y+170}{3} = 180 \text{ „ „ „ 1. „ „ „}$$

Nr. 87. Mehrere Artillerie-Abtheilungen hatten eine gewisse Anzahl von Kanonenkugeln so zu theilen, dass die erste 72 Kugeln und $\frac{1}{9}$ des Restes, die zweite 144 und wieder $\frac{1}{9}$ des Restes, die dritte 216 und $\frac{1}{9}$ des Restes, die vierte 288 und $\frac{1}{9}$ des Restes und so fort erhalten sollte. Wenn nun dadurch alle Abtheilungen gleich viel Kugeln erhielten, wie viel waren es Abtheilungen und wie viel Kugeln?

Auflösung. $9x$ = Anzahl der zu vertheil. Kugeln,

$$72+\frac{9x-72}{9} = 64+x = \text{Anzahl Kugeln der ersten Abth.,}$$

$$\frac{9x}{64+x} = \text{Anzahl Abtheilungen,}$$

$$9x-(64+x) = 8x-64 = \text{übrig bleib. Rest, nachdem die erste Abth. ihr. Bedarf genomm.;}$$

$$144+\frac{8x-64-144}{9} = \frac{8x+1088}{9} = \text{Anz. Kug. der zweiten Abth.}$$

$$64+x = \frac{8x+1088}{9}$$

$$576+9x = 8x+1088$$

$$x = 512$$

$$9x = 4608 \text{ Kug., die zu vertheilen waren,}$$

$$\frac{9x}{64+x} = 8 \text{ Abtheilungen.}$$

Anmerkung. Eine fernere Auflösung ergiebt sich durch weitere Ausführung der obigen:

$$9x-\left(64+x+\frac{8x+1088}{9}\right) = \frac{64x-1664}{9} = \text{übrig bleib. Rest,}$$

nachdem die erste und zweite Abth. ihren Theil erhalten;

$$216+\frac{\frac{64x-1664}{9}-216}{9} = \frac{64x-13888}{81} = \text{Anz. Kugeln der dritten Abth.;}$$

und nun lässt sich dieser letzte Ausdruck entweder der Anzahl Kugeln der ersten Abtheilung oder jener der zweiten Abtheilung gleich setzen.

Nr. 88. Es betheiligte sich Jemand mit noch vierzehn andern Freunden zu gleichen Theilen bei einer Actien-Gesellschaft für die Grabung eines Kanals, und sie gewannen zusammen 5950 fl. mehr als das Fünffache von dem Antheil eines Einzelnen. Hierauf betheiligte er sich auch noch mit sieben Personen der obigen Gesellschaft bei dem Unternehmen, den Kanal mit Dampfbooten zu befahren, und jeder machte eine Einlage, welche um 1730 fl. kleiner war, als sein Gewinn bei dem ersten Unternehmen. Durch Unglücksfälle in Folge davon, dass einige Dampfboote in die Luft flogen, erlitt jedoch jeder Einzelne einen Verlust von 4190 fl., denn es ging nicht nur die obige Einlage verloren, sondern es musste noch von jedem Einzelnen so viel nachgezahlt werden, als sein ganzer Gewinn vom ersten Unternehmen betragen hatte, und ausserdem noch von allen acht Personen zusammen 3680 fl. Was hat Jeder ursprünglich bei jedem einzelnen Unternehmen eingelegt?

Auflösung. $x =$ Einlage eines Einzelnen beim ersten Unternehmen,

$5x+5950 =$ ganzer Gew. beim ersten Untern.,

$\frac{5x+5950}{15} = \frac{x+1190}{3} =$ Gew. eines Einz. b. ersten Untern.,

$\frac{x+1190}{3} - 1730 = \frac{x-4000}{3} =$ Einlage eines Einzelnen beim zweiten Unternehmen,

$\frac{x+1190}{3} + \frac{x-4000}{3} + \frac{3680}{8} = \frac{2x-1430}{3} =$ ganzer Verlust eines Einz. b. zweiten Untern.

$$\frac{2x-1430}{3} = 4190$$

$$2x-1430 = 12570$$

$$2x = 14000$$

$x = 7000$ fl. $=$ Einl. beim ersten Untern.,

$\frac{x-4000}{3} = 1000$ fl. $=$ „ „ zweiten „

Nr. 89. Ein Kaufmann will eine gewisse Anzahl von Säcken Jamaika-Pfeffer kaufen; da er die Nachricht erhielt, dass 5 Säcke um 80 fl. zu bekommen seien, und übersendet seinem Commissär die dazu nöthige Geldsumme. Ehe sein Auftrag ankömmt, steigt jedoch der Preis des Pfeffers und er erhält daher für dasselbe Geld 8 Säcke weniger, als er hätte seinem Auftrage gemäss erhalten sollen. Es kommen durch dieses Steigen $5\frac{1}{4}$ Säcke mehr als der

dritte Theil des zu kaufen beabsichtigten Quantums um $103\frac{1}{2}$ fl. höher zu stehen, als es der Fall gewesen wäre, wenn der Preis nicht gestiegen wäre. Wie viel Säcke erhielt er wirklich?

Auflösung. $x =$ ursprüngl. Anzahl Säcke, die der Kaufmann kaufen will;

$\frac{80}{5}x = 16x =$ Summe, die er zu dies. Zweck send., in fl.;

$x - 18 =$ Anzahl Säcke, die der Agent wirkl. kauft;

$\frac{16x}{x-18} =$ Preis eines wirkl. gekauften Sackes in fl.;

$\frac{16x}{x-18} - 16 = \frac{288}{x-18} =$ Mehrausg. im zweiten Fall f. einen Sack;

$\frac{288}{x-18}\cdot\left(\frac{x}{3}+5\frac{1}{4}\right) =$ „ „ „ „ für $5\frac{1}{4}$ Säcke mehr als der dritte Theil des zu kaufen beabsichtigten Quantums.

$$\left(\frac{x}{3}+5\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{288}{x-18} = 103\frac{1}{2}$$

$$(4x+63)\frac{8}{x-18} = \frac{69}{2}$$

$$64x+1008 = 69x-1242$$

$$2250 = 5x$$

$x = 450$ Säcke, die er kaufen will,

$x - 18 = 432$ Säcke, die gekauft wurden.

Anmerkung. Eine im Grunde ganz gleiche Auflösung ergiebt sich, wenn man die wirklich gekaufte Anzahl Säcke als Unbekannte y annimmt; das zu kaufen beabsichtigte Quantum ist dann $= y+18$ und es ergiebt sich analog wie oben der Ansatz:

$$\left(\frac{y}{3}+11\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{288}{y} = 103\frac{1}{2}$$

$$y = 432.$$

Nr. 90. Vier Personen, A, B, C, D, fanden miteinander ein Säckchen Geld, welches lauter Guldenstücke enthielt. Jeder nahm bei der Theilung auf gut Glück eine beliebige Anzahl Geldstücke heraus. Nachher fanden sie, dass A, wenn ihm B von seinem Theile 25 fl. gäbe, ebenso viel hätte als B. Würde C dem B 30 fl. geben, so hätte B das Dreifache von C. Erhielte C 40 fl. von D, so hätte er das Doppelte von D. Wenn endlich D von A 50 fl. bekäme, so hätte er 5 fl. mehr als das Dreifache von A. Wie viel hatte Jeder erhalten?

Auflösung. x = Antheil des A in fl.;

$x+25$ = Antheil des A, nachdem er von B 25 fl. erhalten;

und auch = Antheil des B, nachdem er dem A 25 fl. abgegeben;

$x+25+25 = x+50$ = wirkl. Antheil des B in fl.;

$x+50+30 = x+80$ = Anth. des B, nachd. er von C 30 fl. erh.;

und auch = dreifacher, um 30 fl. verminderter Antheil des C;

$\frac{x+80}{3}$ = Anth. des C, nachd. er an B 30 fl. abg.;

$\frac{x+80}{3}+30 = \frac{x+170}{3}$ = wirkl. Antheil des C in fl.;

$\frac{x+170}{3}+40 = \frac{x+290}{3}$ = Anth. des C, nachd. er von D 40 fl. erh.;

und auch = doppelter, um 40 fl. verminderter Antheil des D;

$\frac{x+290}{6}$ = Anth. des D, nachd. er an C 40 fl. abg.;

$\frac{x+290}{6}+40 = \frac{x+530}{6}$ = wirkl. Antheil des D;

$x-50$ = Anth. des A, nachd. er an D 50 fl. abg.;

$3(x-50)+5$ = Anth. des D, nachd. er von A 50 fl. erh.;

aber auch

$\frac{x+530}{6}+50 = \frac{x+830}{6}$ = „ „ „ „ „ „ „ „ „ „

$$\frac{x+830}{6} = 3(x-50)+5$$

$$x+830 = 18x-900+30$$

$$1700 = 17x$$

x = 100 fl. = Antheil des A,

$x+50$ = 150 „ = „ „ B,

$\frac{x+170}{3}$ = 90 „ = „ „ C,

$\frac{x+530}{6}$ = 105 „ = „ „ D.

Anmerkung. Eine andere analoge Auflösung ist folgende:

y = Antheil des D in fl.;

$y-40$ = Anth. des D. nachd. er an C 40 fl. geg.;

$2(y-40) = 2y-80$ = Anth. des C, nachd. er von D 40 fl. erh.;

$2y - 80 - 40 = 2y - 120$ = wirkl. Antheil des C;
$2y - 120 - 30 = 2y - 150$ = Anth. des C, nachd. er an B 30 fl. geg.;
$3(2y - 150) = 6y - 450$ = Anth. des B, nachd. er von C 30 fl. erh.;
$6y - 450 - 30 = 6y - 480$ = wirkl. Antheil des B;
$6y - 480 - 25 = 6y - 505$ = Anth. des B, nachd. er an A 25 fl. geg.;
und auch = Anth. des A, nachd. er von B 25 fl. erh.;
$6y - 505 - 25 = 6y - 530$ = wirkl. Antheil des A;
$y + 50$ = Anth. des D, nachd. er von A 50 fl. erh.;
$y + 50 - 5 = y + 45$ = dreifacher, um 50 fl. verminderter Antheil des A;
$\frac{y}{3} + 15$ = Anth. des A, nachd. er an D 50 fl. geg.;
$\frac{y}{3} + 15 + 50 = \frac{y}{3} + 65$ = wirkl. Antheil des A.

$$\frac{y}{3} + 65 = 6y - 530$$

y = 105 fl. = Antheil des D,
$2(y - 60)$ = 90 „ = „ „ C,
$6(y - 80)$ = 150 „ = „ „ B,
$\frac{y}{3} + 65$ oder $6y - 530$ = 100 „ = „ „ A.

Nr. 91. Gesetzlich sollen 15 englische Guineen 4 Unzen wiegen. Eine Anzahl zu leichter Guineen wurde gewogen, und dabei gefunden, dass es 9 Stücke mehr seien, als es dem Gewichte nach sein sollten, wobei $10\frac{1}{2}$ Stück mehr als die Hälfte des Ganzen einen Gewichtsverlust von $1\frac{1}{2}$ Unzen zeigten. Wie gross war die Zahl der Guineen?

Auflösung. x = Anzahl zu leichter Guineen,
$x - 9$ = Werth derselben in vollgilt. Guin.,
$\frac{4}{15}(x - 9)$ = „ „ „ Unzen,
$\frac{\frac{4}{15}(x-9)}{x} = \frac{4}{15x}(x - 9)$ = Werth einer zu leicht. Guin. in Unz.,
$\frac{4}{15} - \frac{4}{15x}(x - 9) = \frac{12}{5x}$ = Anzahl Unzen, um welche eine dieser Guin. zu leicht ist;
$\frac{12}{5x}\left(\frac{x}{2} + 10\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5x}(x + 21)$ = Anzahl Unzen, um welche $10\frac{1}{2}$ St. mehr als die Hälfte des Ganzen dieser Guin. zu wenig wogen.

$$\frac{6}{5x}(x+21) = \frac{4}{3}$$

$$9x+189 = 10x$$

$$x = 189 \text{ Guineen.}$$

Nr. 92. Es kauft Jemand eine Quantität Weizen um 2000 fl., und verwendet die Hälfte davon zu seinem Privatgebrauche. Er verkauft hierauf 5 Scheffel mehr als ¾ des Restes mit einem Gewinn von 40 Procent. Da der Preis des Weizens rasch steigt, so verkauft er das Uebrige noch mit einem Gewinn von 160 Procent, und gewinnt dadurch im Ganzen an dem Verkauften 67 Procent. Wie viel Weizen hat er gekauft und wie theuer den Scheffel verkauft?

Auflösung. $2x$ = Anzahl gekaufter Scheffel,

x = „ der zum Privatgebrauch bestimmten Scheffel,

und auch = Anz. der z. Verkauf best. Schfl.,

$5+\frac{3}{4}x$ = „ verk. Schfl. der 1. Partie,

$x-(5+\frac{3}{4}x) = \frac{1}{4}x-5$ = „ „ „ „ 2. „

$\frac{2000}{2x} = \frac{1000}{x}$ = Ankaufspreis eines Schfls. in fl.,

$\left(1+\frac{40}{100}\right)\cdot\frac{1000}{x} = \frac{1400}{x}$ = Verk.-Pr. ein. Schfls. der 1. Partie,

$\left(1+\frac{160}{100}\right)\cdot\frac{1000}{x} = \frac{2600}{x}$ = „ „ „ „ 2. „

$\frac{1400}{x}(5+\frac{3}{4}x) = \frac{7000}{x}+1050$ = Erlös aus d. Verk. der 1. Partie,

$\frac{2600}{x}\left(\frac{x}{4}-5\right) = 650-\frac{13000}{x}$ = „ „ „ „ „ 2. „

$\frac{7000}{x}+1050+650-\frac{13000}{x} = 1700-\frac{6000}{x}$ = ganzer Erlös aus der verkauften Getreidehälfte,

$1700-\frac{6000}{x}-1000 = 700-\frac{6000}{x}$ = Gewinn aus derselben,

aber auch $\frac{67}{100}\cdot 1000 = 670$ = „ „ „

$$700-\frac{6000}{x} = 670$$

$$30 = \frac{6000}{x}$$

$$x = 200$$

$2x = 400$ Schfl., die angekauft wurden,

$5+\frac{3}{4}x = 155$ Schfl., die das erste Mal verkauft wurden,
$\frac{1}{4}x-5 = 45$ „ „ „ zweite „ „ „
$\frac{1400}{x} = 7$ fl. = Verk.-Preis eines Schfls. der 1. Partie,
$\frac{2600}{x} = 13$ „ = „ „ „ „ 2. „

Nr. 93. Es kauft Jemand 50 Eimer Wein zusammen um 2000 fl., hat auf den Eimer 25 fl. Unkosten, und verkauft dieses Quantum wieder, den Eimer zu 100 fl. Für dieselbe Geldsumme kauft er später wieder 50 Eimer, worunter ein Quantum bessern Weines sich befindet, das Uebrige aber geringerer Wein ist. Vom bessern Wein kommen auf den Eimer dieselben Unkosten wie oben, vom geringern aber nur der vierte Theil. Er mischt beide Weine unter einander und verkauft wieder das ganze Quantum zu demselben Preise wie oben. Wenn nun der jetzige Gewinn sich zu dem frühern verhält wie 10 : 7, wie gross ist das Quantum des bessern sowie das des geringern Weines?

Auflösung.

$2000+50\,.\,25 = 3250$ = Gesammt-Auslag. beim 1. Handel in fl.,
$50\,.\,100-3250 = 1750$ = reiner Gewinn „ „ „ „ „
x = Quantum des im 2. Fall gekauften bessern Weines in Eimern,
$50-x$ = Quant. d. im 2. Fall gek. schlechtern W.,
$25x$ = Unkosten vom bessern Wein in fl.,
$\frac{25}{4}(50-x)$ = „ „ schlecht. „ „ „
$2000+25x+\frac{25}{4}(50-x) = \frac{9250+75x}{4}$ = Gesammt-Ausl. beim 2. Handel in fl.,
$50\,.\,100-\frac{9250+75x}{4} = \frac{10750-75x}{4}$ = reiner Gewinn bei demselben in fl.

$$\frac{10750-75x}{4} : 1750 = 10 : 7$$
$$\frac{430-3x}{4} : 10 = 10 : 1$$
$$430-3x = 400$$
$$30 = 3x$$
$x = 10$ Eimer besserer Qualität,
$50-x = 40$ „ schlechterer Qualität.

Nr. 94. Aus einem gewöhnlichen französischen Kartenspiel wurde eine gewisse Anzahl Karten, unter denen sich auch Carreau-Zehn befand, an vier Spieler gleichmässig vertheilt, wobei der Ausgebende die letzte Karte, den Pique-Zehner, aufschlug und für sich behielt. — Hätte der Ausgebende an jeden Spieler die doppelte Anzahl Karten abgegeben, und hätte er den Pique-Zehner wiederum aufgeschlagen und für sich behalten, und wäre der Carreau-Zehner ebenfalls mit ausgegeben worden, so würde sich die Aussicht, dass er selbst diese Karte erhalte, zur entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit wie 3 : 10 verhalten. Wie viel Karten wurden das zweite Mal an jeden Spieler abgegeben?

Auflösung. x = Anz. Karten, die das zweite Mal an jeden Spieler abgegeben wurden;

$4x$ = ganze Anzahl abgegebener Karten;

$\frac{1}{4x}$ = Wahrscheinlichkeit, die eine Karte für sich hat, der Carreau-Zehner zu sein;

$x-1$ = Anzahl Karten des Ausgebenden, unter welchen sich d. Carreau-Zehner bef. kann;

$(x-1)\cdot\frac{1}{4x} = \frac{x-1}{4x}$ = Wahrscheinlichkeit, dass der Ausgebende den Carreau-Zehner erhalte;

$3x$ = Anzahl Karten, welche die andern drei Spieler zusammen haben;

$3x\cdot\frac{1}{4x} = \frac{3}{4}$ = Wahrscheinlichk. der drei Spieler zusammen, den Carreau-Zehner zu bekommen.

$$\frac{x-1}{4x} : \frac{3}{4} = 3 : 10$$

$$(x-1) : 3x = 3 : 10$$

$$10x - 10 = 9x$$

$$x = 10 \text{ Karten.}$$

Anmerkung. Diese Aufgabe fehlt in der Nagel'schen Bearbeitung.

VII. Abschnitt.

Aufgaben, welche auf Gleichungen vom ersten Grad mit zwei unbekannten Grössen führen.

Nr. 1. Ein Tuchhändler kauft zwei Stücke Tuch für $126\frac{1}{2}$ fl., von dem einen die Elle zu 4 fl., von dem andern zu $4\frac{1}{2}$ fl. Er verkauft von jedem die Elle um 1 fl. theurer und gewinnt dadurch im Ganzen 30 fl. Wie lang war jedes Stück?

Auflösung. x = Länge des ersten Stücks in Ellen,
y = „ „ zweiten „ „
$4x$ = Ankaufs-Preis des ersten Stücks in fl.,
$4\frac{1}{2}y$ = „ „ zweiten „ „ „

I. $4x+4\frac{1}{2}y = 126\frac{1}{2}$

$x+y$ = Anzahl verkaufter Ellen,
und auch = Gewinn an diesem Verkauf in fl., da an einer Elle 1 fl. gewonnen wurde.

II. $x+y = 30$

III. $4x+4y = 120$ (aus II.)

$\frac{1}{2}y = 6\frac{1}{2}$ (aus I. und III.)

*IV. $y = 13$ Ellen.

$x = 30-13$ (d. Substit. von IV. in II.)

*V. $= 17$ Ellen.

Nr. 2. Eine Summe von 189 fl. wird mit Vereinsthalern à 3 fl. 30 krz. und Fünffrankenthalern à 2 fl. 20 krz. bezahlt, und zwar ist die doppelte Zahl der Vereinsthaler um 17 grösser als die dreifache Zahl der Fünffrankenthaler. Wie viel von jeder Münzsorte wurden gebraucht?

Auflösung. x = Anzahl Vereinsthaler,
y = „ Fünffrankenthaler,
$3\frac{1}{2}x$ = Werth der Vereinsthaler in fl.,
$2\frac{1}{3}y$ = „ „ Fünffrankenthaler in fl.

I. $3\frac{1}{2}x+2\frac{1}{3}y = 189$

II. $2x = 3y+17$

III. $3x+2y = 162$ (aus I.)

IV. $2x-3y = 17$ (aus II.)

V. $6x+4y = 324$ (aus III.)

VI. $6x - 9y = 51$ (aus IV.)

$13y = 273$ (aus V. und VI.)

*VII. $y = 21$ Fünffrankenthaler.

$2x = 63 + 17 = 80$ (d. Substit. von VII. in IV.)

*VIII. $x = 40$ Vereinsthaler.

Nr. 3. *A* und *B* empfangen zusammen $58\frac{1}{2}$ fl. Lohn. *A* hat 15, *B* 14 Tage gearbeitet, und der viertägige Lohn des *A* ist um $5\frac{1}{2}$ fl. grösser als der dreitägige des *B*. Was hatte jeder an Tagelohn?

Auflösung. x = Tagelohn des *A* in fl.,

y = „ „ *B* „ „

$15x$ = 15tägiger Lohn des *A* in fl.,

$14y$ = 14 „ „ „ *B* „ „

I. $15x + 14y = 58\frac{1}{2}$

$4x$ = 4tägiger Lohn des *A* in fl.

$3y$ = 3 „ „ „ *B* „ „

II. $4x = 3y + 5\frac{1}{2}$

III. $60x + 56y = 234$ (aus I.)

$4x - 3y = 5\frac{1}{2}$ (aus II.)

IV. $60x - 45y = 82\frac{1}{2}$

$101y = 151\frac{1}{2}$ (aus III. u. IV.)

*V. $y = \frac{3}{2} = 1$ fl. 30 krz. = Tagelohn des *B*.

$4x = \frac{9}{2} + 5\frac{1}{2} = 10$ (d. Substit. von V. in II.)

*VI. $x = \frac{5}{2} = 2$ fl. 30 krz. Tagelohn des *A*.

Nr. 4. Es hat Jemand zwei Fässchen und lässt das grössere mit rothem Weine füllen, die Maass zu 36 krz., das kleinere mit weissem, die Maass zu 40 krz. Im Ganzen zahlt er dafür 18 fl. 8 krz. Hätte er umgekehrt das grössere mit weissem, das kleinere mit rothem Weine füllen lassen, so hätten die Kosten 18 fl. 36 krz. betragen. Wie viel Maass hält jedes Fässchen?

Auflösung. x = Inhalt des grössern Fässchens in Maass,

y = „ „ kleinern „ „ „

$\frac{3}{5}x$ = Werth des grössern mit rothem Wein gefüllten Fässchens in fl.

$\frac{2}{3}y$ = Werth des kleinern mit weissem Wein gefüllten Fässchens in fl.

I. $\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}y = 18\frac{2}{15}$

$\frac{2}{3}x$ = Werth des grössern mit weissem Weine gefüllten Fässchens in fl.,

$\frac{3}{5}y$ = Werth des kleinern mit rothem Wein gefüllten Fässchens in fl.

II. $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y = 18\frac{3}{5}$

III. $9x+10y = 272$ (aus I.)

IV. $10x+9y = 279$ (aus II.)

$19x+19y = 551$ (d. Add. von III. u. IV.)

V. $x+y = 29$

VI. $x-y = 7$ (d. Subtr. von III. von IV.)

$2x = 36$ (d. Add. von V. und VI.)

*VII. $x = 18$ Maass, die das grössere Fässchen hält.

$2y = 22$ (d. Subtr. von VI. von V.)

*VIII. $y = 11$ Maass, die das kleinere Fässchen hält.

Nr. 5. Es kauft Jemand eine Anzahl Aepfel und Birnen um 30 krz. und erhält je 4 Aepfel und ebenso je 5 Birnen um 1 krz. Seinem Nachbar tritt er aus Gefälligkeit davon ab die Hälfte der Aepfel und den dritten Theil der Birnen um 13 krz. Wie viel hat er von jeder Sorte gekauft?

Auflösung. $2x$ = Anzahl gekaufter Aepfel,

$3y$ = „ „ Birnen,

$\frac{1}{4} . 2x = \frac{x}{2}$ = Ankaufs-Preis sämmtlicher Aepfel in krz.

$\frac{1}{5} . 3y = \frac{3y}{5}$ = „ „ Birnen „ „

I. $\frac{x}{2}+\frac{3y}{5} = 30$

$\frac{x}{4}$ = Werth der abgetret. Hälfte Aepfel in krz.

$\frac{y}{5}$ = „ des abgetret. Drittels Birnen in krz.

II. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5} = 13$

III. $\frac{x}{2}+\frac{2y}{5} = 26$ (aus II.)

IV. $\frac{y}{5} = 4$ (aus I. und III.)

*V. $3y = 60$ Birnen.

$\frac{x}{4} = 13 - 4 = 9$ (d. Substit. von IV. in II.)

*VI. $2x = 72$ Aepfel.

Nr. 6. A und B spielen mit einander. Nach einer Anzahl von Spielen hat A halb so viel an Geld gewonnen, als er ursprünglich hatte, und er hat daher 15 fl. weniger als das Dreifache von dem, was B übrig geblieben ist. Nachher aber gewinnt B dem A wieder 10 fl. ab, und hat jetzt doppelt so viel als A übrig behält. Wie viel hatte jeder anfangs?

Aufl**ö**sung. $2x$ = ursprüngliches Geld des A in fl.,
y = „ „ „ B „ „
$2x + x = 3x$ = Geld des A nach d. ersten Reihe von Spiel.,
$y - x$ = „ „ B „ „ „ „ „ „

I. $3x = 3(y - x) - 15$

$3x - 10$ = Geld des A nach d. zweiten Reihe v. Spielen.
$y - x + 10$ = „ „ B „ „ „ „ „ „

II. $y - x + 10 = 2(3x - 10)$

$x = y - x - 5$ (aus I.)

III. $y - 2x = 5$

$y - x + 10 = 6x - 20$ (aus II.)

IV. $7x - y = 30$

$5x = 35$ (aus III. und IV.)

*V. $2x = 14$ fl., die A ursprünglich hatte.

$y = 5 + 14$

*VI. $= 19$ fl., die B ursprünglich hatte.

Nr. 7. Ein Capital ist in 8 Monaten durch die Zinsen, welche es abwirft, auf 2976 fl., in 15 Monaten aber bei den nämlichen Procenten auf 3060 fl. angewachsen. Wie gross war das Capital und zu wie viel Procenten war es ausgeliehen?

Auflösung. $100x$ = ausgeliehenes Capital in fl.,
$12y$ = jährl. Proc., zu denen es ausgel. ist,
$8x \cdot y$ = 8monatl. Zinsen des Capitals in fl.

I. $100x + 8xy = 2976$

$15xy$ = 15monatl. Zinsen des Capitals in fl.

II. $100x + 15xy = 3060$

III. $25x + 2xy = 744$ (aus I.)

IV. $20x + 3xy = 612$ (aus II.)

V. $75x + 6xy = 2232$ (aus III.)

VI. $40x + 6xy = 1224$ (aus IV.)

$35x = 1008$ (aus V. und VI.)

VII. $x = \frac{144}{5}$

*VIII. $100x = 2880$ fl. = ausgeliehenes Capital.

$2xy = 744 - 720 = 24$ (d. Substit. von VII. in III.)

$2y = \frac{24}{\frac{144}{5}} = \frac{5}{6}$

*IX. $12y = 5$ Proc., zu denen das Cap. ausgeliehen war.

Anmerkung. Die Lösung gestaltet sich noch einfacher, wenn man das Capital $= x$ und die Procente $= y$ annimmt.

Nr. 8. Ein Landwirth wurde gefragt, wie viel Scheffel Weizen er auf dem Fruchtmarkte habe. Er antwortete: Hätte ich 8 Scheffel mehr verkauft und den Scheffel um $3\frac{1}{2}$ fl. theurer als es geschehen ist, so hätte ich $117\frac{1}{2}$ fl. mehr gelöst; hätte ich aber 7 Scheffel mehr verkauft, und den Scheffel um 4 fl. theurer, so hätte mein Erlös $118\frac{1}{2}$ fl. mehr betragen. Wie viel Scheffel hat er verkauft und wie theuer den Scheffel?

Auflösung. $2x$ = Anzahl wirklich verkaufter Scheffel,

y = wirkl. Preis eines verkauften Schfls. in fl.,

$2xy$ = wirkl. Erlös in fl.,

$2x + 8$ = Anz. verk. Schfl. der ersten Voraussetzung,

$y + 3\frac{1}{2}$ = Preis eines Schfls. der ersten Voraussetz.,

$(2x+8).(y+3\frac{1}{2}) - 2xy = 7x + 8y + 28$ = Mehrerlös bei der ersten Voraussetzung.

I. $7x + 8y + 28 = 117\frac{1}{2}$

$2x + 7$ = Anz. verk. Schfl. der zweiten Voraussetz.,

$y + 4$ = Preis eines Schfls. „ „ „

$(2x+7)(y+4) - 2xy = 8x + 7y + 28$ = Mehrerlös bei der zweiten Voraussetzung.

II. $8x + 7y + 28 = 118\frac{1}{2}$

III. $7x + 8y = 89\frac{1}{2}$ (aus I.)

IV. $8x + 7y = 90\frac{1}{2}$ (aus II.)

$15x + 15y = 180$ (d. Add. von III. und IV.)

V. $x + y = 12$

VI. $x - y = 1$ (d. Subtr. von III. von IV.)

*VII. $2x = 13$ wirklich verkaufte Scheffel.

*VIII. $y = 5\frac{1}{2}$ fl., die ein Scheffel wirklich kostete.

Nr. 9. Man hat eine zweiziffrige Zahl, deren Ziffer an der Stelle der Einer grösser ist als die Ziffer an der Stelle der Zehner.

Wird die Zahl durch die Summe der Ziffern dividirt, so ist der Quotient $= 4$; wird die Folge der Ziffern umgekehrt, und die dadurch entstandene Zahl durch eine Zahl dividirt, welche um 2 grösser ist als die Differenz der Ziffern, so ist der Quotient $= 14$. Wie heisst die Zahl?

Auflösung. $x =$ Ziffer an der Stelle der Einer,

$y =$ „ „ „ „ „ Zehner,

$10y + x =$ gesuchte Zahl,

$x + y =$ Summe der Ziffern.

I. $$\frac{10y+x}{x+y} = 4$$

$10x + y =$ Zahl in umgekehrter Ziffernfolge,

$x - y + 2 =$ Differenz der Ziffern um 2 vermehrt.

II. $$\frac{10x+y}{x-y+2} = 14$$

$10y + x = 4x + 4y$ (aus I.)

$6y = 3x$

III. $2y = x$

$10x + y = 14x - 14y + 28$ (aus II.)

IV. $15y - 4x = 28$

$15y - 8y = 7y = 28$ (d. Substit. von III. in IV.)

*V. $y = 4$

*VI. $x = 8$ (d. Substit. von V. in III.)

*VII. $10y + x = 48 =$ gesuchte Zahl.

Nr. 10. Welcher Bruch erhält den Werth $\frac{2}{3}$, wenn man seinen Zähler verdoppelt und den Nenner um 7 vergrössert, dagegen den Werth $\frac{3}{5}$, wenn man den Nenner verdoppelt und den Zähler um 2 grösser macht?

Auflösung. $x =$ Zähler des Bruches,

$y =$ Nenner des Bruches,

$\frac{x}{y} =$ gesuchter Bruch selbst.

I. $$\frac{2x}{y+7} = \frac{2}{3}$$

II. $$\frac{x+2}{2y} = \frac{3}{5}$$

$3x = y + 7$ (aus I.)

III. $3x - y = 7$

$$5x+10 = 6y \text{ (aus II.)}$$

IV. $5x-6y = -10$

V. $18x-6y = 42$ (aus III.)

$13x = 52$ (aus IV. und V.)

*VI. $x = 4$

$12-y = 7$ (d. Substit. von VI. in III.)

*VII. $y = 5$

*VIII. $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ = gesuchter Bruch.

Nr. 11. Ein Pächter giebt seinen Pacht auf und verkauft an einen andern Pächter 9 Pferde und 7 Kühe zusammen für 3000 fl., an einen dritten bei gleichen Preisen 6 Pferde und 13 Kühe zu derselben Summe. Wie theuer verkaufte er ein Stück?

Auflösung. x = Preis eines Pferdes in fl.,

y = Preis einer Kuh in fl.,

$9x+7y$ = Preis des an d. ersten Pächter verk. Viehs.

I. $9x+7y = 3000$

$6x+13y$ = Preis des an d. zweiten Pächter verk. Viehs.

II. $6x+13y = 3000$

$3x-6y = 0$ (aus I. und II.)

III. $x = 2y$

$18y+7y = 25y = 3000$ (d. Substit. von III. in I.)

*IV. $y = 120$ fl. = Preis einer Kuh,

*V. $x = 240$ „ = „ eines Pferdes.

Nr. 12. Es pachtet Jemand ein Landgut für ein jährliches Pachtgeld von 1225 fl., und zwar den Morgen Ackerlandes um 10 fl., den Morgen Weidelandes um 7 fl. Die Zahl der Morgen Ackerlandes verhält sich zum halben Ueberschuss dieser Morgen über die Zahl der Morgen des Weidelandes wie 28 : 9. Wie viel Morgen von jeder Culturgattung hält das Gut?

Auflösung. x = Anzahl Morgen Ackerlandes,

y = „ „ Weidelandes,

$10x+7y$ = Pachtzins des ganzen Gutes in fl.

I. $10x+7y = 1225$

$\frac{x-y}{2}$ = halber Ueberschuss des Ackerlandes über das Weideland.

II. $x : \frac{x-y}{2} = 28 : 9$

$$9x = 14x - 14y \text{ (aus II.)}$$

III. $14y = 5x$

$28y + 7y = 35y = 1225$ (d. Substit. von III. in I.)

* IV. $y = 35$ Morgen Weidelandes.

$5x = 14 . 35$ (d. Substit. von IV. in III.)

* V. $x = 98$ Morgen Ackerlandes.

Nr. 13. Es ist Jemand zwei Gläubigern eine gewisse Summe schuldig. Er zahlt 503 fl., indem er dem ersten $\frac{4}{11}$ seiner Forderung, dem andern 3 fl. mehr als $\frac{1}{6}$ der seinigen bezahlt. Später zahlt er noch einmal 429 fl., wodurch der erste $\frac{3}{7}$, der zweite $\frac{1}{3}$ dessen erhält, was jeder noch zu fordern hat. Wie gross war die ursprüngliche Schuld?

Auflösung. $11x$ = Forderung des ersten Gläub. in fl.,

$6y$ = „ „ zweiten „ „ „

$4x$ = Summe, die der erste Gläub. das erste Mal erhält,

$y+3$ = Summe, die der zweite Gläub. das erste Mal erhält.

I. $4x + y + 3 = 503$

$11x - 4x = 7x$ = Rest der Forderung des ersten Gläub.

$6y - (y+3) = 5y - 3$ = „ „ „ „ zweiten „

$3x$ = Summe, die der erste Gläub. das zweite Mal erhält,

$\frac{1}{3}(5y-3) = \frac{5y}{3} - 1$ = Summe, die der zweite Gläub. das zweite Mal erhält.

II. $3x + \frac{5y}{3} - 1 = 429$

III. $4x + y = 500$ (aus I.)

IV. $3x + \frac{5y}{3} = 430$ (aus II.)

V. $12x + 3y = 1500$ (aus III.)

VI. $12x + \frac{20y}{3} = 1720$ (aus IV.)

$\frac{11y}{3} = 220$ (aus V. und VI.)

* VII. $y = 60$

$4x + 60 = 500$ (d. Substit. von VII. in III.)

$4x = 440$

*VIII. $x = 110$

$11x = 1210$ fl. = Forderung des ersten Gläub.

$6y = 360$ „ = „ „ zweiten „

Nr. 14. *A* und *B* spielen mit einander eine gewisse Anzahl Spiele und *A* setzt in jedem Spiele 3 fl. gegen 2 fl. Am Ende hat *A* 17 fl. verloren. Hätte *A* von obigen Spielen 3 mehr gewonnen als geschehen ist, so würde sich die Zahl der von *A* gewonnenen Spiele zu den von *B* gewonnenen verhalten wie 5 : 4. Wie viel Spiele haben beide mit einander gespielt und wie viele hat jeder gewonnen?

Auflösung. $x =$ Anzahl der von *A* gewonnenen Spiele,

$y =$ „ „ „ *B* „ „

$x+y =$ ganze Anzahl gespielter Spiele,

$2x =$ Summe, die *A* in seinen x Spiel. gew. in fl.

$3y =$ „ „ *B* „ „ y „ „ „ „

I. $3y-2x = 17$

$x+3 =$ vorausgesetzte von *A* gewonnene Spiele.

$y-3 =$ „ „ *B* „ „

II. $(x+3):(y-3) = 5:4$

$4x+12 = 5y-15$ (aus II.)

III. $5y-4x = 27$

IV. $6y-4x = 34$ (aus I.)

*V. $y = 7$ von *B* gewonnene Spiele (aus III. u. IV.).

$21-2x = 17$ (d. Substit. von V. in I.)

$2x = 4$

*VI. $x = 2$ von *A* gewonnene Spiele,

$x+y = 9$ im Ganzen gespielte Spiele.

Nr. 15. Ein Weinhändler hat zwei Fässchen mit Wein gefüllt. Nachdem er vom erstern 15 Maass, vom zweiten 11 Maass verkauft hat, verhalten sich die Rückstände wie 8 : 3. Nach weiterem Verkaufe wird jedes Fässchen zur Hälfte geleert. Indem er nun in jedes 10 Maass Wasser giesst, verhalten sich die Flüssigkeiten in beiden zu einander wie 9 : 5. Wie viel Maass hält jedes Fässchen?

Auflösung. $2x =$ Inhalt des ersten Fässchens in Maass,

$2y =$ „ „ zweiten „ „ „

$2x-15 =$ „ „ ersten Fässchens an Wein nach der ersten Entleerung,

$2y - 11 =$ Inhalt des zweiten Fässchens an Wein nach der ersten Entleerung.

I. $(2x-15):(2y-11) = 8:3$

$x =$ Inhalt des ersten Fässchens an Wein nach der zweiten Entleerung,

$y =$ Inhalt des zweiten Fässchens an Wein nach der zweiten Entleerung,

$x+10 =$ Inhalt des ersten Fässchens an Wein nach der Wiederanfüllung,

$y+10 =$ Inhalt des zweiten Fässchens an Wein nach der Wiederanfüllung.

II. $(x+10):(y+10) = 9:5$

$6x - 45 = 16y - 88$ (aus I.)

III. $16y - 6x = 43$

$5x + 50 = 9y + 90$ (aus II.)

IV. $5x - 9y = 40$

V. $80y - 30x = 215$ (aus III.)

VI. $30x - 54y = 240$ (aus IV.)

$26y = 455$ (aus V. und VI.)

* VII. $y = \frac{35}{2}$

$5x - \frac{315}{2} = 40$ (d. Substit. von VII. in IV.)

$5x = \frac{395}{2}$

* VIII. $x = \frac{79}{2}$

$2x = 79$ Maass = Inhalt d. ersten Fässchens.

$2y = 35$ „ = „ „ zweiten „

Nr. 16. Wenn jede Seite eines rechtwinkligen Hofes um 12 Fuss länger wäre, so würden sich zwei anliegende Seiten zu einander verhalten wie 5 : 4; wäre aber jede Seite um 12 Fuss kürzer, so wäre das Verhältniss wie 4 : 3. Wie lang sind die Seiten?

Auflösung. $x =$ Länge der längern Seite,

$y =$ „ „ kürzern „

I. $(x+12):(y+12) = 5:4$

II. $(x-12):(y-12) = 4:3$

$4x + 48 = 5y + 60$ (aus I.)

III. $4x - 5y = 12$

$3x - 36 = 4y - 48$ (aus II.)

IV. $4y - 3x = 12$

V. $x - y = 24$ (aus III. und IV.)

VI. $4x - 4y = 96$

*VII. $y = 84$ Fuss = Länge d. kürzern Seite (aus III. u. VI.)

*VIII. $x = 108$ „ = „ „ längern „ (aus IV. u. VI.).

Nr. 17. Bei der Wahl zweier Abgeordneten hatten sich drei Candidaten beworben. Die Stimmen, welche die beiden Gewählten erhielten, verhalten sich zu einander wie 9 : 8. Hätte der erste noch 7 Stimmen mehr erhalten, so würde sich seine Stimmenmehrheit über den zweiten zu der des zweiten über den dritten verhalten wie 12 : 7. Wäre die auf den ersten und dritten gefallene Stimmenzahl um 1 grösser gewesen, und hätte sich dieselbe unter beide gleich vertheilt, so wäre der zweite diesen beiden durch eine Majorität von 7 Stimmen unterlegen. Wie viel Stimmen erhielt jeder?

Auflösung. $9x$ = wirkl. Anzahl Stimmen des ersten Cand.,

$8x$ = „ „ „ „ zweiten „

y = „ „ „ „ dritten „

$9x + 7 - 8x = x + 7$ = vorausges. Stimmenmehrheit des ersten über den zweiten Candidaten,

$8x - y$ = Stimmenmehrheit des zweiten über den dritten Candidaten.

I. $(x+7):(8x-y) = 12:7$

$\frac{9x+y+1}{2}$ = vorausges. Stimmenzahl des ersten sowohl als des dritten Candidaten,

$\frac{9x+y+1}{2} - 8x = \frac{y+1-7x}{2}$ = Stimmenmehrheit eines jeden derselben über den zweiten Cand.

II. $\frac{y+1-7x}{2} = 7$

$7x + 49 = 96x - 12y$ (aus I.)

III. $89x - 12y = 49$

$y + 1 - 7x = 14$ (aus II.)

IV. $y - 7x = 13$

IV. $12y - 84x = 156$

$5x = 205$ (aus III. u. V.)

*VI. $x = 41$

$9x = 369$ Stimmen, die der erste Cand. erhielt.

$8x = 328$ „ „ „ zweite „ „

$y - 287 = 13$ (d. Substit. von VI. in IV.)

*VII. $y = 300$ Stimmen, die der dritte Cand. erhielt.

Nr. 18. Es sollen drei Zahlen von der Art gefunden werden, dass wenn 6 zur ersten und zweiten addirt wird, die Summen sich verhalten wie 2 : 3, wenn 5 zur ersten und dritten addirt wird, das Verhältniss von 7 : 11 entsteht, und wenn 36 von der zweiten und dritten abgezogen wird, die Reste sich wie 6 : 7 verhalten. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. $2x =$ erste Zahl,

$2x+6 =$ $\frac{2}{3}$ der um 6 vermehrt. zweiten Z.,

$\frac{3}{2}(2x+6) = 3x+9 =$ der um 6 vermehrten zweiten Z.,

$3x+9-6 = 3x+3 =$ zweite Zahl,

$y =$ dritte Zahl.

I. $(2x+5):(y+5) = 7:11$

II. $(3x+3-36):(y-36) = 6:7$

$22x+55 = 7y+35$ (aus I.)

III. $7y-22x = 20$

$(x-11):(y-36) = 2:7$ (aus II.)

$7x-77 = 2y-72$

IV. $7x-2y = 5$

V. $14y-44x = 40$ (aus III.)

VI. $49x-14y = 35$ (aus IV.)

$5x = 75$ (aus V. und VI.)

* VII. $x = 15$

$105-2y = 5$ (d. Substit. von VII. in IV.)

$2y = 100$

* VIII. $y = 50 =$ dritte Zahl.

$3x+3 = 48 =$ zweite „

$2x = 30 =$ erste „

Anmerkung. Bequemer ist allerdings der folgende Ansatz, doch enthält er, den Anforderungen des Verfassers zuwider, drei Unbekannte:

$x =$ erste Zahl.

$y =$ zweite „

$z =$ dritte „

$(x+6):(y+6) = 2:3$

$(x+5):(z+5) = 7:11$

$(y-36):(z-36) = 6:7$

aus welchen Gleichungen: $2y-3x = 6$, $7z-11x = 20$, $7y-6z = 36$, und hieraus $x = 30$, $y = 48$ und $z = 50$ folgt.

Nr. 19. Zwei Schäfer, A und B, haben zwei Heerden. Durch die Nachzucht von Lämmern vermehrt sich die Heerde des A um 80 Stück, während die des B durch Krankheiten sich um 20 vermindert. Dadurch verhält sich die Zahl der Schafe in der Heerde des A zu den in der Heerde des B wie 8 : 3. Hätte dagegen die Heerde des A um 20 ab-, und die des B um 90 zugenommen; so wäre in der Zahl der Schafe beider Heerden das Verhältniss 7 : 10 entstanden. Wie viel Schafe hatte ursprünglich jede Heerde?

Auflösung. x = ursprüngliche Anzahl Schafe des A,

y = „ „ „ „ B.

I. $(x+80):(y-20) = 8:3$

II. $(x-20):(y+90) = 7:10$

$3x+240 = 8y-160$ (aus I.)

III. $8y-3x = 400$

$10x-200 = 7y+630$ (aus II.)

IV. $10x-7y = 830$

V. $80y-30x = 4000$ (aus III.)

VI. $30x-21y = 2490$ (aus IV.)

$59y = 6490$ (aus V. und VI.)

*VII. $y = 110$ Schafe des B.

$880-3x = 400$ (d. Substit. von VII. in III.)

$3x = 480$

*VIII. $x = 160$ Schafe des A.

Nr. 20. Eine Arbeit kann von A und B zusammen in 16 Tagen vollendet werden. Als aber beide 4 Tage gemeinschaftlich gearbeitet haben, wird A abgerufen und B vollendet sie für sich allein in noch weitern 36 Tagen. Wie lange hatte jeder für sich allein an der Arbeit zu thun?

Auflösung. x = Anzahl Tage, in denen A allein die Arbeit vollendet,

y = Anzahl Tage, in denen B allein die Arbeit vollendet,

$\frac{1}{x}$ = Theil der Arb., den A allein tägl. fertigt,

$\frac{1}{y}$ = „ „ „ „ B „ „ „

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ = „ „ „ „ A u. B gemeinschaftl. täglich fertigen,

aber auch $\frac{1}{16}$ = Theil der Arbeit, den *A* und *B* gemeinschaftlich täglich fertigen.

I. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{16}$

$(16-4).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{12}{x}+\frac{12}{y}$ = Theil der Arbeit, der noch zu fertigen ist, nachdem sie 4 Tage gemeinschaftlich gearbeitet;

$\frac{36}{y}$ = Theil der Arb., den *B* in 36 Tagen fertigt.

II. $\frac{12}{x}+\frac{12}{y} = \frac{36}{y}$

III. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{3}{y}$ (aus II.)

$\frac{3}{y} = \frac{1}{16}$ (d. Substit. von III. in I.)

*IV. $y = 48$ Tage, in denen *B* allein fertig wird.

$\frac{1}{x} = \frac{2}{y}$ (aus III.)

$x = \frac{y}{2}$

*V. $= 24$ Tage, in denen *A* allein fertig wird.

Nr. 21. Ein Brunnen kann durch drei Röhren gefüllt werden, von denen zwei ganz gleiche Durchmesser haben. Wenn alle drei Röhren laufen, so werden in 4 Stunden $\frac{5}{12}$ des Brunnens gefüllt; ist aber eine von den beiden gleichen Röhren geschlossen, so werden in 10 Stunden und 40 Minuten $\frac{7}{9}$ des Brunnens gefüllt. In wie viel Stunden würde jede Röhre für sich allein den Brunnen füllen?

Auflösung. x = Anzahl Stunden, in welchen jede der beiden gleichen Röhr. für sich allein den Br. füllt;

y = Anzahl Stunden, in welchen die dritte Röhre für sich allein den Br. füllt;

$\frac{1}{x}$ = Theil des Br., den jede der beiden gleichen Röhren für sich allein stündl. füllt;

$\frac{1}{y}$ = Theil des Br., den die dritte Röhre für sich allein stündlich füllt;

$4\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)$ = Theil des Br., der durch die drei Röhren gemeinschaftl. in vier Stund. gefüllt wird.

I. $4\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{5}{12}$

$10\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) =$ Theil des Br., der in $10\frac{2}{3}$ St. gefüllt w., wenn eine der beiden gleichen Röhr. geschlossen ist.

II. $10\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{7}{9}$

III. $\frac{2}{x}+\frac{1}{y} = \frac{5}{48}$ (aus I.)

IV. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{7}{96}$ (aus II.)

V. $\frac{1}{x} = \frac{1}{32}$ (aus III. und IV.)

*VI. $x = 32$ Stunden, in denen jede der gleichen Röhren für sich allein den Brunnen füllt.

$\frac{1}{32}+\frac{1}{y} = \frac{7}{96}$ (d. Substit. von V. in IV.)

$\frac{1}{y} = \frac{1}{24}$

*VII. $y = 24$ Stunden, in denen die dritte Röhre für sich allein den Brunnen füllt.

Nr. 22. Zwei Reisende gehen von A nach B, welche Orte 147 Meilen von einander entfernt sind. Der zweite Reisende braucht 28 Tage weniger zu dem Wege als der erste; die Zeit, welche der erste zu 17 Meilen braucht, vermehrt um die Zeit, in welcher der zweite 56 Meilen zurücklegt, beträgt zusammen $13\frac{2}{3}$ Tage. Wie viel Meilen macht jeder täglich?

Auflösung. $x =$ Anzahl Meil., die der erste R. tägl. macht;

$y =$ „ „ „ „ zweite „ „ „

$\frac{147}{x} =$ Anzahl Tage, die der erste zum Zurücklegen des Weges braucht;

$\frac{147}{y} =$ Anzahl Tage, die der zweite zum Zurücklegen des Weges braucht.

I. $\frac{147}{x}-\frac{147}{y} = 28$

$\frac{17}{x} =$ Anz. Tage, die der erste zu 17 Meil. braucht.

$\frac{56}{y} =$ „ „ „ „ zweite zu 56 „ „

II. $\frac{17}{x}+\frac{56}{y} = 13\frac{2}{3}$

III. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{4}{21}$ (aus I.)

IV. $\frac{17}{x}-\frac{17}{y} = \frac{68}{21}$

$\frac{73}{y} = \frac{73}{7}$ (aus II. und IV.)

*V. $y = 7$ Meilen, die der zweite täglich macht.

$\frac{1}{x}-\frac{1}{7} = \frac{4}{21}$ (d. Substit. von V. in III.)

$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

*VI. $x = 3$ Meilen, die der erste täglich macht.

Nr. 23. Zwei geladene Wägen wurden gewogen, und man fand ihr Gewicht im Verhältniss von 4 : 5. Nachdem von beiden ein Theil der Ladung im Verhältniss von 6 : 7 abgeladen war, stand das übrig bleibende Gewicht der beiden Wägen noch im Verhältniss von 2 : 3, und die ganze Gewichtssumme betrug noch 50 Centner. Wie schwer waren die Wägen anfangs?

Auflösung. $4x =$ ursprüngl. Gew. des ersten W. in Ctr.,

$5x =$ „ „ „ zweiten „ „ „

$6y =$ Gew., welches vom ersten W. abgel. w.,

$7y =$ „ „ „ zweiten „ „ „

$4x - 6y =$ Rest des Gew. des ersten W.,

$5x - 7y =$ „ „ „ „ zweiten „

I. $(4x - 6y) : (5x - 7y) = 2 : 3$

$9x - 13y =$ Rest des Gew. der beiden W. zusammen.

II. $9x - 13y = 50$

III. $(9x - 13y) : (x - y) = 5 : 1$ (aus I. Summe und Differenz)

$50 : (x - y) = 5 : 1$ (d. Substit. von II. in III.)

IV. $x - y = 10$

V. $13x - 13y = 130$

$4x = 80$ (aus II. und V.)

*VI. $x = 20$

$4x = 80$ Ctr. = ursprüngl. Gew. des ersten Wagens.

$5x = 100$ „ = „ „ „ zweiten „

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich aus I. und II. durch die gewöhnliche Bildung der gleichen Produkte. Die Auf-

suchung von y ist unnöthig, da in der Aufgabe nach dem abgeladenen Quantum nicht gefragt wurde. Aus IV. und VI. ergiebt es sich aber leicht $y = 10$, woraus die abgeladenen Quantitäten 60 und 70 Centner sind.

Nr. 24. Es vertheilte Jemand unter 14 Männer und 15 Frauen eine gewisse Geldsumme, so dass alle Männer gleich viel bekamen, und ebenso alle Frauen. Hätte nur die Hälfte der Männer ihren bestimmten Antheil in Empfang genommen, und wäre der Antheil der übrigen Männer unter die Frauen gleich getheilt worden, so hätte man jeder Frau im Ganzen 1 fl. weiter geben können, als einem Manne, und es wären noch 6 fl. übrig geblieben. Hätten aber nur 8 Frauen ihren Antheil erhalten, und hätte man den Theil der übrigen unter sämmtliche Männer gleich vertheilt, so hätte jeder Mann doppelt so viel erhalten als eine Frau. Wie viel wurde vertheilt und wie viel bekam jeder Mann und jede Frau?

Auflösung. x = wirklicher Antheil eines Mannes in fl.,

y = „ „ einer Frau „ „

$14x+15y$ = wirklich vertheilte Summe,

$7x$ = Antheil der Hälfte der Männer,

$14x+15y-7x-6 = 7x+15y-6$ = Summe, die nach der ersten Voraussetz. unter die Fr. verth. w.,

$\frac{7x+15y-6}{15}$ = vorausges. Antheil einer Frau,

aber auch $x+1$ = „ „ „ „

I. $$\frac{7x+15y-6}{15} = x+1$$

$8y$ = Antheil von 8 Frauen,

$14x+15y-8y = 14x+7y$ = Summe, die nach d. zweiten Vorauss. unter die Männer vertheilt wird,

$\frac{14x+7y}{14} = \frac{2x+y}{2}$ = vorausgesetzter Antheil eines Mannes,

aber auch $2y$ = „ „ „ „

II. $$\frac{2x+y}{2} = 2y$$

$$7x+15y-6 = 15x+15 \text{ (aus I.)}$$

III. $$15y-8x = 21$$

$$2x+y = 4y \text{ (aus II.)}$$

IV. $$2x = 3y$$

$$\text{V.} \qquad x = \frac{3y}{2}$$

$$15y - 12y = 3y = 21 \text{ (d. Substit. von IV. in III.)}$$

$$\text{*VI.} \qquad y = 7 \text{ fl., die eine Frau erhält,}$$

$$\text{*VII.} \qquad x = 10\tfrac{1}{2} \text{ fl., die ein Mann erhält,}$$

$$14x + 15y = 252 \text{ fl.} = \text{vertheilte Summe.}$$

Nr. 25. Es bedarf Jemand einer gewissen Anzahl Scheffel Frucht und hat dazu eine bestimmte Summe Geldes festgesetzt. Es wird ihm angeboten Weizen, den Scheffel zu 10 fl., und Roggen, den Scheffel zu 6 fl. Kauft er 7 Scheffel von letzterem und für das übrige Geld Weizen, so fehlen ihm im Ganzen 2 Scheffel zur Befriedigung seines Bedürfnisses. Kauft er aber 6 Scheffel Weizen und befriedigt er sein weiteres Bedürfniss durch Ankauf von Roggen, so bleiben ihm 12 fl. von seinem Gelde übrig. Wie viel hat er Geld zum Einkauf bestimmt? Wie viel Scheffel bedarf er im Ganzen? Und wie viel kann er für die ausgesetzte Summe von jeder Fruchtgattung kaufen, wenn sie vollständig für sein Bedürfniss verwendet werden soll?

Auflösung. x = Anz. Schfl. Weizen } die er zur Befried. seines Bedürfnisses für
y = „ „ Roggen } die ausges. Summe zusammen kaufen kann;

$x+y$ = ganzes nothwend. Getreide-Quant. in Schfl.;

$10x$ = Preis der x Schfl. Weizen in fl.;

$6y$ = „ „ y „ Roggen „ „

$10x+6y$ = ganze f. d. Getr.-Ankauf bestimmte Summe;

$10x+6y-42$ = Geld, das für den Weizenankauf bliebe, nachdem 7 Schfl. Roggen gekauft wären;

$\frac{10x+6y-42}{10}$ = Anzahl Schfl. Weizen, die hiefür gekauft werden können;

$7+\frac{10x+6y-42}{10} = \frac{10x+6y+28}{10}$ = ganze Anz. Schfl. Getreide, die auf diese Weise gekauft werden können;

aber auch $x+y-2$ = „ „ „ „ „ „

$$\text{I.} \qquad \frac{10x+6y+28}{10} = x+y-2$$

$x+y-6$ = Anz. Schfl. Roggen, die nach dem Kauf von 6 Schfl. Weizen noch gek. werden müssten;

$6(x+y-6)$ = Preis derselben in fl.;

$60+6(x+y-6) = 6x+6y+24$ = ganze für das Getr. im zweiten Fall ausgelegte Summe (da 6 Schfl. Weiz. 6 . 10 = 60 fl. kosten);

aber auch $10x+6y-12$ = ganze für das Getr. im zweiten Fall ausgelegte Summe.

II. $10x+6y-12 = 6x+6y+24$

$10x+6y+28 = 10x+10y-20$ (aus I.)

$4y = 48$

* III. $y = 12$ Scheffel Roggen.

$4x = 36$ (aus II.)

* IV. $x = 9$ Scheffel Weizen,

$x+y = 21$ „ = ganzes nothwendiges Getreide-Quantum,

$10x+6y = 162$ fl. = ganze zu dessen Ankauf bestimmte Summe.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

z = ganze Anz. Schfl. Getr., die nothwendig sind;

w = Summe Geldes, die zu deren Ankauf bestimmt ist, in fl.;

$w-42$ = Summe, die zum Weizenankauf übrig bliebe, nachdem 7 Schfl. Roggen gekauft wären;

$\frac{w-42}{10}$ = Anzahl Schfl. Weizen, die hiefür gekauft werden können;

$7+\frac{w-42}{10} = \frac{w+28}{10}$ = ganzes im ersten Fall gek. Getr.-Quantum;

aber auch $z-2$ = „ „ „ „ „ „ „

V. $\frac{w+28}{10} = z-2$

$z-6$ = Anzahl noch zu kaufender Schfl. Roggen, nachdem bereits 6 Schfl. Weizen um den Preis von 6 . 10 = 60 fl. gekauft wären;

$6(z-6) = 6z-36$ = Preis des Roggens in fl.;

$60+6z-36 = 6z+24$ = ausgegebene Summe im zweiten Fall;

aber auch $w-12$ = „ „ „ „ „

VI. $6z+24 = w-12$

$\frac{w}{z}$ = durchschnittl. Preis eines Schfls. Getreide;

$10-\frac{w}{z}$ = Anz. fl., um welche ein Schfl. Weizen zu theuer;

$\frac{w}{z} - 6$ = Anz. fl., um welche ein Schfl. Roggen zu wohlfeil;

$\frac{1}{10 - \frac{w}{z}} = \frac{z}{10z - w}$ = Anz. Schfl. Weizen, welche um 1 fl. zu theuer;

$\frac{1}{\frac{w}{z} - 6} = \frac{z}{w - 6z}$ = „ „ Roggen, „ um 1 fl. zu wohlfeil;

$\frac{z}{10z - w} + \frac{z}{w - 6z} = \frac{4z^2}{(10z - w)(w - 6z)}$ = Anzahl Schfl. Getr., die d. richtigen Durchschn.-Preis haben u. durch Zusammenkaufen obiger beid. Quant. erhalten w.;

$\frac{\frac{z}{10z - w}}{\frac{4z^2}{(10z - w)(w - 6z)}} = \frac{w - 6z}{4z}$ = Anz. Schfl. Weizen, die man kaufen muss um einen Schfl. Mischung des richtigen Durchschn.-Pr. zu erhalten;

$\frac{\frac{z}{w - 6z}}{\frac{4z^2}{(10z - w)(w - 6z)}}$ oder $1 - \frac{w - 6z}{4z} = \frac{10z - w}{4z}$ = Anz. Schfl. Roggen, die man kaufen muss, um einen Schfl. Misch. des richtigen Durchschn.-Pr. zu erh.;

$z \cdot \frac{w - 6z}{4z} = \frac{w - 6z}{4}$ = Anz. Schfl. Weizen, die zur Befriedig. des Bedürfn. bei d. gegebenen Preis nöth. sind;

$z \cdot \frac{10z - w}{4z}$ oder $z - \frac{w - 6z}{4} = \frac{10z - w}{4}$ = Anz. Schfl. Roggen, die zur Befriedig. des Bedürfn. bei d. gegebenen Preis nöthig sind.

Aus den Gleichungen V. und VI. folgen dann die Werthe:

$z = 21$ Schfl. = ganzes nothwendiges Getreide-Quantum;

$w = 162$ fl. = Summe, die für d. Getr.-Ankauf bestimmt ist;

$\frac{w - 6z}{4} = 9$ Schfl. Weizen, }
$\frac{10z - w}{4} = 12$ „ Roggen, } welche zusammen um 162 fl. gekauft werden können.

Es ist einleuchtend, dass sich die beiden letzten Werthe durch Einführung einer dritten Unbekannten, etwa x oder y der ersten Auflösung, viel leichter ergeben, denn dann wäre z. B.

x = Anzahl Schfl. Weizen, die nothwendig sind;

$z - x$ = „ „ Roggen, „ „ „

$10x$ = Preis des Weizens in fl.,

$6(z - x)$ = „ „ Roggens „ „.

$$10x+6(z-x) = 4x+6z = \text{ganze für das Getr. ausgelegte Summe.}$$

$$4x+6z = w$$

$$x = \frac{w-6z}{4} \text{ Scheffel Weizen,}$$

$$z-x = \frac{10z-w}{4} \text{ „ Roggen.}$$

Die Miles Bland'schen Aufgaben sind aber sämmtlich nur mit zwei Unbekannten gelöst und das oben in der zweiten Auflösung befolgte Verfahren mag vielleicht den Schüler anregen, frühere leichtere Aufgaben durch analoge Schlussfolgerungen zu lösen. — Auch wird es ihm leicht möglich werden, weitere Auflösungen aufzufinden, wenn er von den vier hier angenommenen Unbekannten, x, y, z, w, je zwei zur Grundlage seiner Arbeit wählt.

Nr. 26. Ein Marktschiff führt 6 Personen in der Cajüte und eine Anzahl Personen auf dem Verdeck. Von letzteren zahlt jede 3 fl. Fahrgeld. Der vierte Theil des ganzen Fahrgeldes der Verdeck-Passagiere ist grösser als der siebente Theil des Fahrgeldes der Cajüten-Passagiere um $1\frac{1}{2}$ fl. Auf dem Rückwege waren es 3 Verdeck-Passagiere und 2 Cajüten-Passagiere weniger, auch war das Fahrgeld für einen Verdeck-Passagier auf die Hälfte, sowie das Fahrgeld für einen Cajüten-Passagier um 2 fl. heruntergesetzt. Dadurch betrug die Einnahme des Schiffers $41\frac{1}{2}$ fl. weniger als vorher. Wie viel waren es ursprünglich Verdeck-Passagiere, und was wurde für einen Platz in der Cajüte bezahlt?

Auflösung. x = Anzahl Verd.-Pass. auf der Hinfahrt,
y = Fahrgeld eines Caj.-Pass. in fl. bei d. Hinf.;
$3x$ = „ sämmtl. Verd.-Pass. auf d. Hinf.,
$6y$ = „ „ Caj.-Pass. „ „ „
$3x+6y$ = Gesammt-Einnahme auf der Hinfahrt.

I. $$\frac{3x}{4}-\frac{6y}{7} = 1\frac{1}{2}$$

$x-3$ = Anzahl Verd.-Pass. auf der Rückfahrt,
$y-2$ = Fahrgeld eines Caj.-Pass. auf d. Rückf.,
$\frac{3}{2}(x-3)$ = „ sämmtl. Verd.-Pass. „ „ „
$(6-2).(y-2) = 4y-8$ = „ „ Caj.-Pass. „ „ „

$$\tfrac{3}{2}(x-3)+4y-8 = \frac{3x}{2}+4y-\frac{19}{2} = \text{Gesammt-Einnahme auf der Rückfahrt,}$$

aber auch $3x+6y-41\frac{1}{2}$ = „ „ „ „

II. $\frac{3x}{2}+4y-\frac{19}{2} = 3x+6y-\frac{33}{2}$

$\frac{x}{4}-\frac{2y}{7} = \frac{1}{2}$ (aus I.)

III. $7x-8y = 14$

IV. $29 = \frac{3x}{2}+2y$ (aus II.)

V. $6x+8y = 116$

$13x = 130$ (aus III. und V.)

*VI. $x = 10$ Verdecks-Passagiere auf der Hinfahrt.

$15+2y = 29$ (d. Substit. von VI. in IV.)

$2y = 14$

*VII. $y = 7$ fl. = Preis eines Caj.-Platzes auf d. Hinf.,

$y-2 = 5$ „ = Preis desselben auf der Rückfahrt.

Nr. 27. Ein Tuchhändler hat zweierlei Stücke Tuch, zusammen im Werthe von 124 fl., das gröbere Tuch misst 6 Ellen mehr als das feine. Wenn von dem gröbern die Elle 20 krz. mehr kosten würde als sie wirklich kostet, so wären 6 Ellen des gröbern gerade so viel werth als 5 Ellen des feinern. Er verkauft von obigen beiden Stücken 4 Ellen des feinern und 12 Ellen des gröbern um $\frac{20}{31}$ des obigen Preises. Wie viel Ellen hielt jedes Stück und was war der Preis der Elle?

Auflösung. x = ursprüngl. Anzahl Ellen feinen Tuchs,

$x+6$ = „ „ „ groben „

y = Preis einer Elle feinen Tuchs in fl.,

$5y$ = „ von 5 Ellen „ „ „ „

und auch = „ „ 6 „ groben Tuchs, wenn der Preis der letztern um $\frac{1}{3}$ fl. mehr betragen würde;

$\frac{5y}{6}$ = vorausges. Preis einer Elle groben T.,

$\frac{5y}{6}-\frac{1}{3} = \frac{5y-2}{6}$ = wirklicher „ „ „ „ „

xy = Preis sämmtlichen feinen Tuchs,

$\frac{5y-2}{6}.(x+6) = \frac{5}{6}xy-\frac{x}{3}+5y-2$ = Preis sämmtl. groben T.,

$xy+\frac{5}{6}xy-\frac{x}{3}+5y-2 = \frac{11}{6}xy-\frac{x}{3}+5y-2$ = Preis sämmtl. Tuches überhaupt.

I. $\frac{11}{6}xy - \frac{x}{3} + 5y - 2 = 124$

$4y =$ Preis der verk. 4 Ell. feinen T. in fl.,

$12 . \frac{5y-2}{6} = 10y - 4 =$ „ „ „ 12 „ groben „ „ „

$4y + 10y - 4 = 14y - 4 =$ Erlös aus dem verkauften Tuch.

II. $14y - 4 = \frac{20}{31} . 124 = 80$

$14y = 84$ (aus II.)

*III. $y = 6$ fl. = Preis einer Elle feinen T.

$\frac{5y-2}{6} = 4\frac{2}{3}$ „ = „ „ „ groben „

$11x - \frac{x}{3} + 30 - 2 = 124$ (d. Substit. von III. in I.)

$\frac{32x}{3} = 96$

*IV. $x = 9$ Ell. = ursprüngl. Länge des feinen Tuchs.

$x + 6 = 15$ „ = „ „ „ groben „

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$z =$ ursprüngl. Länge des groben Tuchs in Ellen,

$z - 6 =$ „ „ „ feinen „ „ „

$w =$ Preis einer Elle groben Tuchs in fl.,

$w + \frac{1}{3} =$ vorausges. Preis einer Elle groben T. in fl.,

$6(w + \frac{1}{3}) = 6w + 2 =$ „ „ von 6 Ell. „ „ „ „

und auch = wirklicher Preis von 5 Ellen feinen Tuchs,

$\frac{6w+2}{5} =$ Preis einer Elle feinen Tuchs,

$wz =$ Ankaufspreis des groben Tuchs,

$(z - 6) . \frac{6w+2}{5} = \frac{6zw + 2z - 36w - 12}{5} =$ Ankaufspreis des feinen Tuchs,

$wz + \frac{6wz + 2z - 36w - 12}{5} = \frac{11wz + 2z - 36w - 12}{5} =$ Ankaufspreis des gesammten Tuchs.

V. $\frac{11wz + 2z - 36w - 12}{5} = 124$

$12w =$ Verkaufspr. von 12 Ellen groben T.,

$4 . \frac{6w+2}{5} = \frac{24w+8}{5} =$ „ „ 4 „ feinen „

$12w + \frac{24w+8}{5} = \frac{48w+8}{5} =$ Erlös aus dem verkauften Tuch.

VI. $\frac{48w+8}{5} = \frac{20}{31} . 124 = 80.$

Aus den Gleichungen V. und VI. ergeben sich dann die Werthe:

$w = 4\frac{2}{3}$ fl. = Preis einer Elle groben Tuchs,

$\frac{6w+2}{5} = 6$ „ = „ „ „ feinen „

$z = 15$ Ellen = ursprüngl. Länge des groben Tuchs.

$z-6 = 9$ „ = „ „ „ feinen „

Fernere Auflösungen ergeben sich, wenn man, wie bereits in Nr. 25 angedeutet wurde, zwei andere der hier benutzten 4 Unbekannten, x, y, z, w, als Grundlagen seiner Schlüsse und Operationen annimmt.

Nr. 28. Ein Seidenhändler kauft zwei Stücke Seidenzeug von verschiedener Länge zusammen um 200 fl. Der Preis von 2 Ellen des kürzern betrug 1 fl. 20 krz. mehr als von 3 Ellen des längern; beide Stücke waren aber gleich theuer. Nachdem er von jedem Stücke 2 Ellen abgeschnitten, verkauft er das Uebrige zusammen um 214 fl. 24 krz. Hätte er Alles zu diesem Verkaufs-Preis abgegeben, so hätte er an jedem Stück 20 fl. gewonnen. Wie lang war jedes Stück? und wie gross war der Einkaufs- und Verkaufs-Preis der Elle eines jeden?

Auflösung. x = Eink.-Pr. einer Elle des kürzern St. in fl.

y = „ „ „ „ längern „ „ „

$2x$ = „ von 2 Ellen „ kürzern „ „ „

$3y$ = „ „ 3 „ „ längern „ „ „

I. $2x - 3y = 1\frac{1}{3}$

$\frac{100}{x}$ = ursprüngl. Anzahl Ellen des kürzern St.,

$\frac{100}{y}$ = „ „ „ „ längern „

da beide Stücke gleich theuer waren und zusammen 200 fl. kosteten;

$\frac{100}{x} - 2$ = verkaufte Anzahl Ellen des kürzern St.,

$\frac{100}{y} - 2$ = „ „ „ „ längern „

$x + \frac{20}{100}x = \frac{6}{5}x$ = Verkaufs-Preis einer Elle des kürzern St.,

$y + \frac{20}{100}y = \frac{6}{5}y$ = „ „ „ „ längern „

denn wenn man bei unveränderter Ellenzahl von jedem St., also bei 100 fl. einen Gewinn von 20 fl. hätte, so muss der Verkaufs-Preis um $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ grösser sein als der Einkaufs-Preis.

$\frac{6}{5}x\left(\frac{100}{x}-2\right) = 120-\frac{12x}{5}$ = Erlös aus d. Verk. des kürzern St.,

$\frac{6}{5}y\left(\frac{100}{y}-2\right) = 120-\frac{12y}{5}$ = „ „ „ „ „ längern „

$240-\frac{12x}{5}-\frac{12y}{5}$ = ganzer Erlös aus dem verk. Zeug.

II. $240-\frac{12}{5}(x+y) = 214\frac{2}{5}$

$\frac{12}{5}(x+y) = \frac{128}{5}$ (aus II.)

III. $x+y = \frac{32}{3}$

IV. $3x+3y = 32$

$5x = \frac{100}{3}$ (aus I. und IV.)

*V. $x = 6\frac{2}{3}$ fl. = Einkaufs-Pr. einer Elle d. kürzern Stücks.

$\frac{20}{3}+y = \frac{32}{3}$ (d. Substit. von V. in III.)

*VI. $y = 4$ fl. = Einkaufs-Pr. einer Elle d. längern Stücks.

$\frac{100}{x} = 15$ Ellen = ursprüngl. Länge des kürzern Stücks,

$\frac{100}{y} = 25$ „ = „ „ „ längern „

$\frac{6}{5}x = 8$ fl. = Verkaufs-Pr. einer Elle des kürzern Stücks.

$\frac{6}{5}y = 4\frac{4}{5}$ „ = „ „ „ „ längern „

Anmerkung. Eine analoge Lösung ergiebt sich, wenn als Unbekannte die ursprünglichen Längen beider Stücke angenommen werden.

Nr. 29. *A* reist von *C* nach *D* und 3 Tage später *B* von *D* nach *C*, indem letzterer täglich 2 Meilen mehr zurücklegt als *B*. Beim Zusammentreffen verhielt sich der zurückgelegte Weg des *A* zu dem des *B* wie 13 : 15. Wäre aber *A* 5 Tage weniger unterwegs gewesen als dies wirklich der Fall war, und hätte *B* 2 Meilen täglich mehr zurückgelegt als wirklich geschah, so hätten sich die von beiden zurückgelegten Wege wie 2 : 5 verhalten. Wie weit ist *C* von *D* entfernt? wie viel Meilen legte jeder täglich zurück? und nach wie viel Tagen trafen sie zusammen?

Auflösung. x = Anzahl Tage, die *A* unterwegs ist,

$x-3$ = „ „ „ *B* „ „

y = Anzahl Meilen, die *A* täglich macht,

$y+2$ = „ „ „ *B* „ „

xy = Weg, den *A* b. Zusammentr. zurückgel. hat,

$(x-3)(y+2)$ = „ „ *B* „ „ „ „

$xy+(x-3)(y+2)$ = Entfernung *CD*.

$$\text{I.}\quad xy : (x-3)(y+2) = 13 : 15$$

$x-5 \doteq$ vorausges. Anzahl Reisetage des A,

$(x-5)\,y \doteq$ „ Weg des A,

$y+4 \doteq$ „ Anz. Meil., die B tägl. macht,

$(x-3)(y+4) \doteq$ „ Weg des B.

$$\text{II.}\quad (x-5)\,.\,y : (x-3)(y+4) = 2 : 5$$

$$15xy = 13xy - 39y + 26x - 78 \text{ (aus I.)}$$

$$2xy + 39y = 26x - 78$$

$$\text{III.}\quad y = \frac{26(x-3)}{2x+39}$$

$$5xy - 25y = 2xy - 6y + 8x - 24 \text{ (aus II.)}$$

$$\text{IV}\quad 3xy - 19y = 8x - 24$$

$$\frac{(3x-19)\,26(x-3)}{2x+39} = 8(x-3) \text{ (d. Substit. von III. in IV.)}$$

$$13(3x-19) = 4(2x+39)$$

$$39x - 247 = 8x + 156$$

$$31x = 403$$

$*$V. $x = 13$ Tage, die A unterwegs ist.

$x-3 = 10$ „ „ B „ „

$$y = \frac{260}{26+39} \text{ (d. Substit. von V. in III.)}$$

$*$VI. $= 4$ Meilen, die A täglich macht,

$y+2 = 6$ „ „ B „ „

$$xy + (x-3)(y+2) = 112 \text{ Meilen} = \text{Entfernung } CD.$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$$\frac{x}{x-5} : \frac{y+2}{y+4} = \frac{13}{2} : 3 \text{ (aus I. und II.)}$$

$$\text{VII.}\quad x(y+4) : (x-5)(y+2) = 13 : 6$$

$$\text{VIII.}\quad 2xy + 39y - 26x = -78 \text{ (aus I.)}$$

$$\text{IX.}\quad 3xy - 19y - 8x = -24 \text{ (aus II.)}$$

$$\text{X.}\quad 7xy - 65y + 2x = 130 \text{ (aus VII.)}$$

Durch Elimination von xy aus diesen drei Gleichungen ergeben sich dann die beiden Gleichungen

$$2x - 5y = 6$$

$$6x - 13y = 26$$

und hieraus für x und y obige Werthe.

Berechnet man die bei der zweiten Voraussetzung der Aufgabe sich ergebenden Wegstrecken, die A und B bis zu ihrem Zusammentreffen zurückgelegt haben, so zeigt sich, dass ihre Summe

auch der Entfernung *CD* gleich kömmt, so dass man die Aufgabe auch folgendermassen stellen könnte: Hätte *A* 5 Tage weniger auf der Reise zugebracht, und hätte *B* täglich 2 Meilen mehr zurückgelegt, so wären sie auch zusammengetroffen. Dei dieser Stellung der Aufgabe ergiebt sich, dass *A* im Ganzen $5y$ Meilen weniger, *B* hingegen $(x-3)2$ Meilen mehr als in Wirklichkeit zurückgelegt haben müsste, und dass sich diese beiden Quantitäten compensiren müssten, also $5y = 2(x-3)$ ist.

Hieraus ergäbe sich $x-3 = \frac{5y}{2}$ und durch Substit. in I.

$$xy : \frac{5y}{2}(y+2) = 13 : 15$$
$$2x : (y+2) = 13 : 3$$
$$6x = 13y+26.$$

Nr. 30. *A* und *B* übernahmen eine Arbeit gemeinschaftlich mit der Verpflichtung sie in 12 Tagen zu fertigen. Die Zeit, welche *A* allein dazu nöthig hätte, verhält sich zur Zeit, welche *B* nöthig hätte, wie 2 : 3. Nachdem beide einige Tage gearbeitet hatten, fanden sie, dass sie allein nicht fertig würden, und nahmen daher noch eine dritte Person, *C*, zu Hülfe, wodurch sie wirklich in 12 Tagen fertig wurden. Wäre *C* gleich anfangs eingetreten, so wären sie in 9 Tagen fertig geworden. Die Zeit, in welcher *C* mit *A* die ganze Arbeit fertig gemacht hätte, verhält sich zur Zeit, welche *C* im Verein mit *B* dazu gebraucht hätte, wie 7 : 8. Wie lange braucht jeder für sich allein zur ganzen Arbeit? Und nach wie viel Tagen ist *C* eingetreten?

Auflösung. $2x$ = Anz. Tage, die *A* allein zur Arbeit braucht

$3x$ = „ „ „ *B* „ „ „ „

y = „ „ „ *C* „ „ „ „

$\frac{1}{2x}$ = Theil der Arbeit, den *A* allein tägl. fertigt,

$\frac{1}{3x}$ = „ „ „ „ *B* „ „ „

$\frac{1}{y}$ = „ „ „ „ *C* „ „ „

$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{y} = \frac{5}{6x}+\frac{1}{y}$ = „ „ „ den alle drei Arbeiter mit einander täglich machen,

aber auch $\frac{1}{9}$ = demselben, da sie die Arbeit in 9 Tagen vollenden würden.

I. $\frac{5}{6x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}$ = Theil d. Arb., den *A* u. *C* mit einander tägl. m.,

$\frac{1}{\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}}$ = Anzahl Tage, die sie zur Vollendung der Arbeit brauchen würden;

$\frac{1}{3x}+\frac{1}{y}$ = Theil d. Arb., den *B* u. *C* mit einander tägl. m.;

$\frac{1}{\frac{1}{3x}+\frac{1}{y}}$ = Anzahl Tage, die sie zur Vollendung der Arbeit brauchen würden.

II. $\frac{1}{\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}} : \frac{1}{\frac{1}{3x}+\frac{1}{y}} = 7:8$

$12\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}\right) = \frac{10}{x}$ = Theil der Arbeit, den *A* und *B* mit einander in 12 Tagen wirklich fertigen;

$1-\frac{10}{x}$ = Rest der Arbeit, den *C* fertigt;

$\frac{1-\frac{10}{x}}{\frac{1}{y}}$ = Anzahl Tage, die er hierzu braucht;

III. $12-\frac{1-\frac{10}{x}}{\frac{1}{y}}$ = „ „ nach denen *C* eingetreten ist.

$\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{y}\right):\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}\right) = 7:8$ (aus II.)

$$\frac{8}{3x}+\frac{8}{y} = \frac{7}{2x}+\frac{7}{y}$$

IV. $\frac{1}{y} = \frac{5}{6x}$

V. $y = \frac{6x}{5}$

$\frac{5}{6x}+\frac{5}{6x} = \frac{1}{9}$ (d. Substit. von IV. in I.)

$$\frac{5}{3x} = \frac{1}{9}$$

*VI. $x = 15$

$2x = 30$ Tage, die *A* allein zur Arbeit braucht;

$3x = 45$ „ „ *B* „ „ „ „

*VII. $y = \frac{6}{5}x = 18$ „ „ *C* „ „ „ „

$12-\frac{1-\frac{10}{x}}{\frac{1}{y}} = 6$ Tage, nach denen *C* eingetreten ist.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Anz. Tage, die C allein zur Vollend. brauchen würde;

z = Anz. Tage, nach denen er eingetreten ist;

$12-z$ = Anz. Tage, die er mit arbeitet;

$\frac{1}{y}$ = Antheil der Arbeit, den C täglich liefert;

$\frac{12-z}{y}$ = Antheil der Arbeit, den C im Ganzen liefert;

$1-\frac{12-z}{y}$ = Antheil der Arbeit, den A und B mit einander im Ganzen liefern;

$\frac{1}{12}\left(1-\frac{12-z}{y}\right)=\frac{y+z-12}{12y}$ = Antheil der Arbeit, den A u. B mit einander täglich liefern;

$\frac{1}{y}+\frac{y+z-12}{12y}=\frac{y+z}{12y}$ = Antheil d. Arbeit, den A, B u. C mit einander täglich liefern;

aber auch $\frac{1}{9}$ = „ „ „ „

VIII. $$\frac{y+z}{12y}=\frac{1}{9}$$

$\frac{3}{2+3}\cdot\frac{y+z-12}{12y}=\frac{y+z-12}{20y}$ = Antheil der Arbeit, den A allein täglich liefert;

$\frac{2}{2+3}\cdot\frac{y+z-12}{12y}=\frac{y+z-12}{30y}$ = Antheil der Arbeit, den B allein täglich liefert, denn da sich die Zeiten, in denen A und B, jeder allein, fertig würden, wie 2 : 3 verhalten, so müssen sich ihre täglichen Leistungen umgekehrt, also wie 3 : 2 verhalten;

$\frac{1}{\frac{y+z-12}{20y}}=\frac{20y}{y+z-12}$ = Anzahl Tage, in denen A allein fertig würde;

$\frac{1}{\frac{y+z-12}{30y}}=\frac{30y}{y+z-12}$ = Anzahl Tage, in denen B allein fertig würde;

$\frac{1}{y}+\frac{y+z-12}{20y}=\frac{y+z+8}{20y}$ = Antheil der Arbeit, den A u. C mit einander täglich fertigen;

$\frac{1}{y}+\frac{y+z-12}{30y}=\frac{y+z+18}{30y}$ = Antheil der Arbeit, den B u. C mit einander täglich fertigen;

$\frac{1}{\frac{y+z+8}{20y}}=\frac{20y}{y+z+8}$ = Anzahl Tage, die A und C zusammen zur Vollend. brauchen;

$\frac{1}{\frac{y+z+18}{30y}}=\frac{30y}{y+z+18}$ = Anzahl Tage, die B und C zusammen zur Vollend. brauchen.

IX. $$\frac{20y}{y+z+8} : \frac{30y}{y+z+18} = 7:8.$$

Aus den Gleichungen VIII. und IX. ergeben sich dann die Werthe: $z = 6$ Tage, nach denen C eingetreten ist;
$y = 18$ „ in denen C allein die Arbeit vollendet.
$\frac{20y}{y+z-12} = 30$ „ „ „ A „ „ „ „
$\frac{30y}{y+z-12} = 45$ „ „ „ B „ „ „ „

Es wird nun dem Schüler nicht mehr schwer fallen, mit Hülfe der beiden Unbekannten x und z eine dritte Auflösung zu finden.

Nr. 31. Es hat Jemand zweierlei Mischungen von Gold und Silber. Die Quantität des Goldes in der ersten verhält sich zu dem Golde in der zweiten wie 4 : 3, und der Unterschied unter den beiden Quantitäten von Silber beträgt 25 Loth mehr als der Unterschied beider Quantitäten Gold. Wäre in der ersten Mischung dreimal so viel Gold und in der zweiten doppelt so viel als wirklich vorhanden ist, so wären die Quantitäten von Gold proportionirt den wirklich vorhandenen Quantitäten von Silber. Wäre das Gold der ersten Mischung mit dem Silber der zweiten, und ebenso das Gold der zweiten mit dem Silber der ersten Mischung gemischt, so würden sich die Gewichte beider Mischungen verhalten wie 5 : 6. Wie viel Gold und Silber ist in jeder Mischung?

Auflösung. $4x =$ Goldmenge der ersten Misch. in Loth,
$3x =$ „ „ zweiten „ „ „
$3 \cdot 4x : 2 \cdot 3x = 2 : 1 =$ Verhältniss der beiden Silbermengen,
$2y =$ Silbermenge der ersten Misch. in Loth,
$y =$ „ „ zweiten „ „ „
und auch $=$ Unterschied der beiden Silber-Quantit.
$x =$ „ „ „ Gold-Quantit.

I. $y - x = 25$
$4x + y =$ Gew. der Legirung d. Goldes der ersten mit dem Silber der zweiten Mischung,
$3x + 2y =$ Gew. der Legirung d. Goldes der zweiten mit dem Silber der ersten Mischung.

II. $(4x+y) : (3x+2y) = 5 : 6$
$24x + 6y = 15x + 10y$ (aus II.)

$$9x = 4y$$

III. $x = \frac{4}{9}y$

$y - \frac{4}{9}y = \frac{5}{9}y = 25$ (d. Substit. von III. in I.)

*IV. $y = 45$ Loth Silber der zweiten Mischung.

$2y = 90$ „ „ „ ersten „

*V. $x = \frac{4}{9}y = 20$ (d. Substit. von IV. in III.)

$4x = 80$ Loth Gold der ersten Mischung.

$3x = 60$ „ „ „ zweiten „

Nr. 32. In einem Winter, in welchem Holz sehr theuer war, kauften *A* und *B* Steinkohlen und Torf, und zwar zuerst 5 Wägen Kohlen und 7 Wägen Torf. *A* zahlt davon 3 Wägen Kohlen, *B* das Uebrige. Da sie den Torf zu gleichen Theilen verbrennen, von den Kohlen aber *A* doppelt so viel verbraucht als *B*, so hat bei der Abrechnung *A* dem *B* noch 7 fl. 55 krz. zu zahlen. Nachher kaufen sie wieder 6 Wägen Kohlen und ebenso viel Wägen Torf zu gleichen Preisen wie vorher, wovon *B* einen Wagen Kohlen und das Uebrige *A* bezahlt. Sie verbrauchen wieder den Torf zu gleichen Theilen, *B* aber dreimal so viel Kohlen als *A*, und *B* hat daher dem *A* bei der Abrechnung 32½ fl. nachzuzahlen. Wie theuer war der Preis eines Wagens Kohlen und eines Wagens Torf?

Auflösung. x = Preis eines Wagens Kohlen in fl.,

y = „ „ „ Torf „ „

$5x$ = „ von 5 Wägen Kohlen „ „

$7y$ = „ „ 7 „ Torf „ „

$3x$ = Summe, die *A* beim ersten Ankauf zahlt,

$\frac{2}{3} \cdot 5x = \frac{10x}{3}$ = Werth der von *A* das erste Mal verbrannten Kohlen, da er doppelt so viel als *B* verbrennt;

$\frac{7y}{2}$ = Werth des von *A* das erste Mal verbrannten Torfs,

$\frac{10x}{3} + \frac{7y}{2}$ = Werth des ganzen von *A* das erste Mal verbrauchten Brennmaterials,

$\frac{10x}{3} + \frac{7y}{2} - 3x = \frac{7y}{2} + \frac{x}{3}$ = Summe, die er dem *B* hiefür noch schuldet, in fl.

I. $$\frac{7y}{2} + \frac{x}{3} = 7\frac{11}{12}$$

$6x$ = Preis der im zweiten Fall angek. 6 W. Kohlen,
$6y$ = „ „ „ „ „ „ „ „ Torf,
x = Summe, die *B* beim zweiten Ankauf zahlt,
$\frac{3}{4}.6x = \frac{9x}{2}$ = Werth der von *B* das zweite Mal verbrauchten Kohlen, da er dreimal so viel als *A* verbrennt;
$\frac{6y}{2} = 3y$ = Werth des von *B* das zweite Mal verbrauchten Torfs;
$\frac{9x}{2}+3y$ = Werth des ganzen von *B* das zweite Mal verbrauchten Brennmaterials;
$\frac{9x}{2}+3y-x = \frac{7x}{2}+3y$ = Summe, die er dem *A* hiefür schuldet.

II. $\frac{7x}{2}+3y = 32\frac{1}{4}$

III. $21y+2x = \frac{95}{2}$ (aus I.)

IV. $21y+\frac{49}{2}x = \frac{455}{2}$ (aus II.)

$\frac{45}{2}x = \frac{360}{2}$ (aus III. und IV.)

*V. $x = 8$ fl., die ein Wagen Kohlen kostet.

$28+3y = 32\frac{1}{2}$ (d. Substit. von V. in II.)

$3y = 4\frac{1}{2}$

*VI. $y = 1\frac{1}{2}$ fl., die ein Wagen Torf kostet.

Nr. 33. Zwei spanische Maulthiertreiber, *A* und *B*, sassen unter einem Baum, um ihr einfaches Mittagsmahl zu halten, welches aus 5 kleinen Laibchen Brod und einer Bouteille Wein bestand. Drei dieser Laibchen hatte *A* bei sich, die beiden andern nebst dem Wein, *B*. Ein Fremder, welcher dazu kam, wurde eingeladen, Theil zu nehmen, und der obige Vorrath von diesen Dreien zu gleichen Theilen verzehrt. Beim Abgehen gab ihnen der Fremde an spanischen Münzen so viel als nach unserm Gelde 1 fl. 17½ krz. werth ist, mit der Bedingung, diese Summe nach dem Verhältniss dessen zu theilen, was von dem Werthe des Beitrags eines Jeden an ihn abgetreten worden sei. Dadurch erhielt *B* 22½ krz. mehr als *A*. Hätten sie von dem Fremden 10½ krz. mehr erhalten, so hätten sie für die erhaltene Summe in der nächsten Stadt 6 solche Laibchen Brod und 4 Bouteillen Wein kaufen können. Was war der Werth eines jeden Laibchens Brod und der Bouteille Wein?

Auflösung. x = Werth eines Laibchens in krz.,
y = „ der Bout. Wein „ „

$5x+y$ = Werth der ganzen Mahlz. in krz.,

$\frac{5x+y}{3}$ = „ des von einem Einzelnen verzehrten Antheils derselben,

$3x$ = „ des von A zur Mahlzeit beigesteuerten Theils,

$2x+y$ = „ des von B zur Mahlzeit beigesteuerten Theils,

$3x - \frac{5x+y}{3} = \frac{4x-y}{3}$ = Ersatz, den A v. Fremden zu fordern h.,

$2x+y - \frac{5x+y}{3} = \frac{x+2y}{3}$ = „ „ B „ „ „ „ „

$\frac{4x-y}{3} : \frac{x+2y}{3} = (4x-y):(x+2y)$ = Verhältniss, in welchem A u. B die vom Fremden bez. 77½ krz. theilen müssen;

$\frac{4x-y}{4x-y+x+2y} . 77\frac{1}{2} = \frac{4x-y}{5x+y} . 77\frac{1}{2}$ = Antheil des A an der Gabe des Fremden,

$\frac{x+2y}{4x-y+x+2y} . 77\frac{1}{2} = \frac{x+2y}{5x+y} . 77\frac{1}{2}$ = Antheil des B an der Gabe des Fremden,

$\frac{x+2y}{5x+y} . 77\frac{1}{2} - \frac{4x-y}{5x+y} . 77\frac{1}{2} = \frac{3y-3x}{5x+y} . 77\frac{1}{2}$ = Anzahl krz., die B hiedurch mehr als A erhält.

I. $\frac{3y-3x}{5x+y} . 77\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$

$77\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2} = 88$ = vorausgesetzte Gabe des Fremden in krz.,

$6x$ = Werth von 6 Laibchen Brod in krz.

$4y$ = „ „ 4 Bout. Wein „ „

II. $6x+4y = 88$

$\frac{y-x}{5x+y} . 155 = 15$ (aus I.)

$31 . \frac{y-x}{5x+y} = 3$

$31y - 31x = 15x + 3y$

$28y = 46x$

III. $y = \frac{23}{14}x$

IV. $3x+2y = 44$ (aus II.)

$3x + \frac{23}{7}x = \frac{44}{7}x = 44$ (d. Substit. von III. in IV.)

*V. $x = 7$ krz. = Werth eines Laibchens Brod,

*VI. $y = \frac{23}{14}x = 11\frac{1}{2}$ „ = „ der Bouteille Wein.

Nr. 34. Die Steuern eines Staats wurden eines ausgebrochenen Krieges wegen in dem Verhältniss von $2\frac{1}{4}:1$ erhöht, und nachdem die Kosten der Erhebung und die Zinsen der Staatsschuld abgezogen waren, hatte sich die Staatseinnahme selbst in dem Verhältniss von $3\frac{12}{23}:1$ erhöht. — Nun wurde durch Rechnung gefunden, dass wenn die Umstände im Gegentheil eine Verminderung der Steuern im Verhältniss von $1\frac{7}{9}:1$ erlaubt hätten, die nach den oben erwähnten Abzügen übrig bleibende Staats-Einnahme sich in dem Verhältniss von $7\frac{2}{3}:1$ vermindert hätte und in Wirklichkeit nunmehr 4 Millionen fl. betragen würde. — Wie viel betragen die ursprünglichen Steuern und wie viel die Zinsen der Staatsschuld, wenn man annimmt, dass die Kosten der Steuererhebung den Quadrat-Wurzeln der erhobenen Steuern proportional sind?

Auflösung. 4 Mill. = vorausges. reine Einnahme in fl.,

$7\frac{2}{3} \cdot 4$ Mill. $= \frac{92}{3}$ Mill. = ursprüngl. „ „ „ „

$3\frac{12}{23} \cdot \frac{92}{3}$ Mill. = 108 Mill. = nachherige „ „ „ „

x = ursprüngl. Steuersumme in fl.,

$2\frac{1}{4}x = \frac{9x}{4}$ = nachherige „ „ „

$\frac{x}{1\frac{7}{9}} = \frac{9x}{16}$ = vorausges. „ „ „

y = Zinsen der Staatsschuld,

$x - \frac{92}{3}$ Mill. $- y$ = ursprüngl. Steuererh.-Kosten in fl.,

$\frac{9}{4}x - 108$ Mill. $- y$ = nachherige „ „ „

$\frac{9}{16}x - 4$ Mill. $- y$ = vorausges. „ „ „

$\sqrt{x} : \sqrt{\frac{9}{4}x} : \sqrt{\frac{9}{16}x} = 1 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$ = Verhältniss der Erheb.-Kosten.

I. $(x - \frac{92}{3}$ Mill. $- y) : (\frac{9}{4}x - 108$ Mill. $- y) = 1 : \frac{3}{2} = 2 : 3$

II. $(x - \frac{92}{3}$ Mill. $- y) : (\frac{9}{16}x - 4$ Mill. $- y) = 1 : \frac{3}{4} = 4 : 3$

$3x - 92$ Mill. $- 3y = \frac{9}{2}x - 216$ Mill. $- 2y$ (aus I.)

III. $\frac{3}{2}x + y = 124$ Mill.

$3x - 92$ Mill. $- 3y = \frac{9}{4}x - 16$ Mill. $- 4y$ (aus II.)

IV. $\frac{3}{4}x + y = 76$ Mill.

$\frac{3}{4}x = 48$ Mill. (aus III. und IV.)

*V. $x = 64$ Mill = ursprüngl. Steuersumme.

$y = 124$ Mill. $- \frac{3}{2}x$ (aus III.)

*VI. $= 124$ Mill. $- 96$ Mill. $= 28$ Mill. = Zinsen der Staatsschuld.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist in der Nagel'schen Sammlung weggeblieben.

VIII. Abschnitt.

Aufgaben, welche auf reine quadratische Gleichungen, oder auf solche Gleichungen von höheren Graden führen, die ohne Ergänzung des Quadrats gelöst werden können.

Nr. 1. Zwei Zahlen sind zu finden, die sich verhalten wie 8 : 5 und deren Produkt 360 ist.

Auflösung. $8x$ = erste Zahl,

$5x$ = zweite Zahl,

$8x . 5x = 40x^2$ = Produkt beider Zahlen.

$$40x^2 = 360$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$

$8x = \pm 24$ = erste Zahl,

$5x = \pm 15$ = zweite Zahl.

Nr. 2. Zwei Zahlen sind zu finden, deren Summe sich zu ihrer Differenz verhält wie 8 : 1 und von denen die Differenz der Quadrate 128 ist.

Auflösung. $8x$ = Summe der Zahlen,

x = Differenz,

$\frac{8x + x}{2} = \frac{9x}{2}$ = grössere der beiden Zahlen,

$\frac{8x - x}{2} = \frac{7x}{2}$ = kleinere der beiden Zahlen,

$8x . x = 8x^2$ = Differenz der Quadrate der beiden Zahlen, weil sie dem Produkt aus Summe und Differenz der Zahlen gleich ist.

$$8x^2 = 128$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

$\frac{9x}{2} = \pm 18$ = grössere Zahl,

$\frac{7x}{2} = \pm 14$ = kleinere Zahl.

Nr. 3. In einem Hofe sind zwei quadratische Grasplätze, deren Flächen sich zu einander verhalten wie 25 : 9; die Seite des grössern ist um 10 Fuss länger als die des andern. Wie gross ist die Länge einer jeden Seite?

Auflösung. x = Länge der grössern Seite in Fussen,
$x - 10$ = „ „ kleinern „ „ „
x^2 = Fläche d. grössern Platzes in Qu.-Fussen.
$(x - 10)^2$ = „ „ kleinern „ „ „

$$x^2 : (x-10)^2 = 25 : 9$$
$$x : (x-10) = 5 : 3$$
$$5x - 50 = 3x$$
$$2x = 50$$

$x = 25$ Fuss = Seite des grössern Quadrats.
$x - 10 = 15$ „ = „ „ kleinern „

Anmerkung. Streng genommen ergiebt sich eigentlich bei der Radicirung der Glieder der Proportion: $x : (x-10) = \pm 5 : \pm 3$, woraus ausser $5x - 50 = 3x$ auch ferner noch $5x - 50 = -3x$ folgt. Der sich hieraus ergebende Werth $x = \frac{25}{4}$ passt zwar für die Gleichung aber nicht für die Aufgabe, indem die kürzere Quadratseite dann negativ würde.

Nr. 4. Es kauft Jemand zwei Stücke Leinwand, welche zusammen 36 Ellen messen. Von jedem kostet die Elle so viele Kreuzer als das Stück Ellen misst, und der Preis des einen Stücks verhält sich zum Preis des andern wie 4 : 1. Wie lang ist jedes Stück?

Auflösung. x = Länge des ersten Stücks in Ellen,
und auch = Preis einer Elle desselben in krz.,
$36 - x$ = Länge des zweiten Stücks in Ellen,
und auch = Preis einer Elle desselben in krz.,
$x \cdot x = x^2$ = Preis des ganzen ersten Stücks in krz.,
$(36 - x)(36 - x) = (36 - x)^2$ = Preis des ganzen zweiten Stücks.

$$x^2 : (36-x)^2 = 4 : 1$$
$$x : (36-x) = 2 : 1$$
$$x = 72 - 2x$$
$$3x = 72$$

$x = 24$ Ellen = Länge des ersten Stücks.
$36 - x = 12$ „ = „ „ zweiten „

Anmerkung. Die bei der vorigen Aufgabe gemachte Bemerkung findet auch hier ihre Anwendung.

Nr. 5. Die Summe zweier Zahlen verhält sich zur kleinen wie 5 : 2, und ihre Differenz multiplizirt mit der Differenz ihrer Quadrate ist = 135. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. $5x$ = Summe beider Zahlen,

$2x$ = kleinere Zahl,

$5x - 2x = 3x$ = grössere Zahl,

$3x - 2x = x$ = Differenz beider Zahlen,

$(3x)^2 - (2x)^2$ oder $5x \cdot x = 5x^2$ = Differ. der Quadr. beider Zahlen,

$x \cdot 5x^2 = 5x^3$ = Produkt aus der Differenz der Zahlen und der Differenz ihrer Quadrate.

$$5x^3 = 135$$
$$x^3 = 27$$
$$x = 3$$

$3x = 9$ = grössere Zahl,

$2x = 6$ = kleinere Zahl.

Nr. 6. Zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 2 und die Differenz ihrer vierten Potenzen zur Summe ihrer dritten Potenzen wie 26 : 7. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. $3x$ = erste Zahl,

$2x$ = zweite Zahl,

$81x^4 - 16x^4 = 65x^4$ = Differenz ihrer 4ten Potenzen,

$27x^3 + 8x^3 = 35x^3$ = Summe ihrer 3ten Potenzen.

$$65x^4 : 35x^3 = 26 : 7$$
$$x : 1 = 2 : 1$$
$$x = 2.$$

$3x = 6$ = erste Zahl,

$2x = 4$ = zweite Zahl.

Nr. 7. Von einem rechtwinkligen Felde verhalten sich beide Seiten zu einander wie 6 : 5. Nachdem $\frac{1}{6}$ des Ganzen verkauft worden war, blieben noch 5625 Qu.-Fuss übrig. Wie gross sind die Seiten des Rechtecks?

Auflösung. $6x$ = Länge der grössern Seite in Fussen,

$5x$ = „ „ kleinern „ „ „

$6x \cdot 5x = 30x^2$ = Fläche des Rechtecks in Qu.-Fussen,

$\frac{5}{6} \cdot 30x^2 = 25x^2$ = übrig bleibende Fläche, nachdem $\frac{1}{6}$ des Rechtecks verkauft worden ist.

$$25x^2 = 5625$$

$$x^2 = 225$$
$$x = \pm 15$$
$$6x = 90 \text{ Fuss} = \text{längere Seite des Rechtecks.}$$
$$5x = 75 \text{ „} = \text{kürzere „ „ „}$$

Nr. 8. Eine Anzahl Reisender bestieg den Montblanc, jeder von ihnen hatte so viele Führer bei sich, als es Reisende waren, und hatte an Kosten viermal so viel Gulden zu bezahlen, als die Zahl sämmtlicher Führer betrug. Zusammen bezahlten sie 864 fl. Wie viel waren es Reisende?

Auflösung. x = Anzahl Reisender,
und auch = Anzahl Führer jedes Reisenden,
$x \cdot x = x^2$ = ganze Anzahl Führer,
$4x^2$ = Antheil jedes Reisenden an d. Bezahlung.
$4x^2 \cdot x = 4x^3$ = Gesammt-Auslagen der Partie.

$$4x^3 = 864$$
$$x^3 = 216$$
$$x = 6 \text{ Reisende.}$$

Nr. 9. Die Summe zweier Zahlen ist 49. Wenn man die grössere durch die kleinere, und umgekehrt die kleinere durch die grössere dividirt, so verhält sich der erste Quotient zum zweiten wie 16 : 9. Wie heissen beide Zahlen?

Auflösung. x = grössere der beiden Zahlen,
$49 - x$ = kleinere „ „ „
$\frac{x}{49-x}$ = erster Quotient,
$\frac{49-x}{x}$ = zweiter Quotient.

$$\frac{x}{49-x} : \frac{49-x}{x} = 16 : 9$$
$$x^2 : (49-x)^2 = 16 : 9$$
$$x : (49-x) = \pm 4 : \pm 3$$
$$\pm 3x = 196 - 4x$$
$$7x \text{ oder } x = 196$$
$$x = 28 \text{ oder } = 196 = \text{grössere Zahl.}$$
$$49 - x = 21 \text{ oder } = -147 = \text{kleinere Zahl.}$$

Nr. 10. Als von einem Regiment Soldaten ein Detachement abgeschickt wurde, wurden zunächst von jeder Compagnie viermal

so viel Mann dazu beordert, als das Regiment Compagnien hatte. Als dies ungenügend erschien, gab jede Compagnie 3 Mann weiter ab. Dadurch verhält sich die neue Anzahl der beorderten Soldaten zur vorigen wie 17 : 16. Wie viel Compagnien hatte das Regiment?

Auflösung. x = Anzahl Compagnien des Regiments,
$4x$ = Mannsch., die jede Comp. ursprüngl. abgiebt,
$x.4x = 4x^2$ = ursprüngl. Stärke des Detachements,
$4x+3$ = Mannsch., die jede Comp. nach der Verstärkung abgegeben hatte,
$x(4x+3)$ = nachherige Stärke des Detachements.

$$x(4x+3):4x^2 = 17:16$$
$$(4x+3):4x = 17:16$$
$$3:4x = 1:16$$
$$3:x = 1:4$$
$$x = 12 \text{ Compagnien.}$$

Nr. 11. Es vertheilt Jemand eine gewisse Summe unter einige arme Männer und Weiber. Die Zahl der Männer verhält sich zu jener der Weiber wie 4 : 5. Die Zahl der Kreuzer, welche jeder Mann erhält, beträgt den dritten Theil von der ganzen Anzahl der Armen, und die Zahl der Kreuzer, welche jedes Weib erhält, das Doppelte von dem Unterschiede der Weiber und Männer. Im Ganzen erhalten die Männer 18 krz. zusammen mehr als die Weiber. Wie viel sind es Männer und Weiber?

Auflösung. $4x$ = Anzahl Männer,
$5x$ = „ Weiber,
$\frac{4x+5x}{3} = 3x$ = Anzahl Kreuzer, die ein Mann erhält,
$2(5x-4x) = 2x$ = „ „ „ „ Weib „
$4x.3x = 12x^2$ = Almosen aller Männer zusammen,
$5x.2x = 10x^2$ = „ „ Weiber „
$12x^2-10x^2 = 2x^2$ = Mehrempfang der Männer an Kreuzern.

$$2x^2 = 18$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$
$$4x = 12 \text{ Männer,}$$
$$5x = 15 \text{ Weiber.}$$

Nr. 12. Es hat Jemand eine Anzahl Pferde, von denen er einen Theil in Miethställen, einen andern zu Hause hält. Die Zahl

der erstern verhält sich zur Zahl der letztern wie 3 : 7, und 5 von den letztern kosten ihm gerade so viel als 4 von den erstern; zugleich verhält sich die Zahl der Gulden, welche ihm jedes von den letztern Pferden wöchentlich kostet, zu der Zahl der im Hause befindlichen Pferde wie 3 : 14. Wenn er nun für die Miethpferde zusammen $22\frac{1}{2}$ fl. wöchentlich zu bezahlen hat, wie viel hat er Pferde?

Auflösung. $6x =$ Anzahl Miethpferde,

$14x =$ „ Pferde, die zu Hause stehen,

$3x =$ wöchentl. Kosten eines zu Hause stehenden Pferdes in fl.,

$\frac{5}{4} \cdot 3x = \frac{15x}{4} =$ wöchentl. Kosten eines Miethpferdes in fl.,

$6x \cdot \frac{15x}{4} = \frac{45x^2}{2} =$ Gesammt-Auslagen für die Miethpferde.

$$\frac{45x^2}{2} = 22\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$6x = 6$ Miethpferde,

$14x = 14$ zu Hause stehende Pferde.

Nr. 13. Bei einem grossen Gastmahle war die Zahl der Herren gleich dem Quadrate von der Zahl der Köche, und die Zahl der Frauen um 1 grösser als die Summe von der Zahl der Herren und der doppelten Zahl der Köche. Die Zahl der Aufwärter betrug das Doppelte von der Quadrat-Wurzel aus der Zahl der Frauen. Jeder Herr und jede Frau hatten an den Kosten des Gastmahls gleich viel zu bezahlen, nämlich halb so viel Gulden als die Zahl der Köche betrug; ausserdem aber bekam jeder Koch ebenso viel und jeder Aufwärter halb so viel an Trinkgeld als die Kosten des Gastmahls für jeden einzelnen Gast betrugen. Die ganze Auslage stieg dadurch auf 361 fl. weniger als den Kubus von der Hälfte der Zahl der Aufwärter. Wie viel waren es Herren, Frauen, Köche und Aufwärter?

Auflösung. $x =$ Anzahl Köche,

$x^2 =$ „ Herren,

$x^2+2x+1 = (x+1)^2 =$ „ Frauen,

$2\sqrt{x^2+2x+1} = 2(x+1) =$ „ Aufwärter,

$\frac{x}{2}$ = Kosten des Gastmahls für jeden Gast in fl.,
und auch = Trinkgeld eines einzelnen Kochs,

$\frac{x}{2}(x^2+x^2+2x+1) = \frac{x}{2}(2x^2+2x+1)$ = Kosten des eigentlichen Mahles in fl.,

$x.\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$ = Trinkg. für sämmtliche Köche in fl.,

$\frac{1}{2}.\frac{x}{2} = \frac{x}{4}$ = „ eines einzelnen Aufw. „ „

$\frac{x}{4}.2(x+1) = \frac{x}{2}(x+1)$ = „ für sämmtliche Aufw. „ „

$\frac{x}{2}(2x^2+2x+1)+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}(x+1) = x^3+2x^2+x$ = Gesammt-Auslagen für das ganze Fest in fl.

$\left(\frac{2(x+1)}{2}\right)^3 = x^3+3x^2+3x+1$ = Kubus der Hälfte der Aufw.,

also auch $x^3+3x^2+3x+1-361$ = Gesammt-Auslagen für das ganze Fest in fl.

$$x^3+2x^2+x = x^3+3x^2+3x+1-361$$
$$361 = x^2+2x+1$$
$$x+1 = \pm 19$$
$$x = 18 \text{ Köche,}$$
$$x^2 = 324 \text{ Herren,}$$
$$(x+1)^2 = 361 \text{ Frauen,}$$
$$2(x+1) = 38 \text{ Aufwärter.}$$

Nr. 14. Von zwei Orten, C und D, gehen zu gleicher Zeit zwei Reisende aus, A von C gegen D; B von D gegen C. Als sie einander begegnen, hat B 7 Meilen mehr als $\frac{4}{5}$ von dem Wege des A zurückgelegt, und wird, wenn er auf gleiche Art fortreist, den Ort C in 30 Stunden nach der Begegnung erreichen, während A nach D in 20 Stunden und 50 Minuten kommen wird. Wie weit ist C von D entfernt?

Auflösung. x = Anz. Meil., die A bei der Begegnung bereits zurückgelegt hat;
und auch = Anz. Meil., die B nach der Begegnung in 30 Stunden zurückzulegen hat;
$\frac{4}{5}x+7$ = Anz. Meil., die B bei der Begegnung bereits zurückgelegt hat;
und auch = Anz. Meil., die A nach der Begegnung in $20\frac{5}{6}$ Stunden noch zurückzulegen hat;

$x+\frac{3}{5}x+7 = \frac{8}{5}x+7$ = Entfernung der Orte C und D in Meilen;

$\frac{x}{30}$ = Anz. Meil., die B in einer Stunde macht;

$\frac{\frac{3}{5}x+7}{20\frac{5}{6}}$ = „ „ „ A „ „ „ „

$\frac{x}{\frac{\frac{3}{5}x+7}{20\frac{5}{6}}} = \frac{\frac{125}{6}x}{\frac{3}{5}x+7}$ = Anz. Stund., die A zu dem bereits zurückgelegten Wege gebraucht hat;

$\frac{\frac{3}{5}x+7}{\frac{x}{30}} = \frac{30(\frac{3}{5}x+7)}{x}$ = Anz. Stund., die B zu dem bereits zurückgelegten Wege gebraucht hat.

$$\frac{\frac{125}{6}x}{\frac{3}{5}x+7} = \frac{30(\frac{3}{5}x+7)}{x}$$
$$25x^2 = 36(\tfrac{3}{5}x+7)^2$$
$$\pm 5x = 6(\tfrac{3}{5}x+7)$$
$$5x = \tfrac{18}{5}x+42$$
$$\tfrac{7}{5}x = 42$$
$$x = 30$$
$$\tfrac{8}{5}x+7 = 55 \text{ Meilen} = \text{Entfernung } CD.$$

Anmerkung. Man wird sich leicht überzeugen, dass der aus der Gleichung $-5x = 6(\frac{3}{5}x+7)$ hervorgehende Werth von x keine praktische Bedeutung hat.

Nr. 15. Ein Landwirth hat zwei Heerden, von denen die erste 18 Schafe weniger enthält als die zweite. Aus der Wolle der ersten Heerde löst er so viele Gulden, als die zweite Stück Schafe hat, und ebenso aus der Wolle der zweiten Heerde so viele Gulden, als die Zahl der Schafe in der ersten Heerde beträgt. Dadurch verhält sich der Erlös aus 6 Stück Schafen der ersten Heerde zum Erlös aus 7 Stück Schafen der zweiten wie 7 : 6. Wie gross ist die Zahl der Schafe in jeder Heerde?

Auflösung. x = Anzahl Schafe der ersten Heerde,
und auch = Erlös aus d. Wolle der zweiten Heerde in fl.,
$x+18$ = Anzahl Schafe der zweiten Heerde,
und auch = Erlös aus d. Wolle der ersten Heerde in fl.,

$\frac{x+18}{x}$ = „ „ einem Schaf der ersten Heerde,

$\frac{x}{x+18}$ = „ „ „ „ „ zweiten „

$$6 \cdot \frac{x+18}{x} : 7 \cdot \frac{x}{x+18} = 7:6$$

$$36\frac{x+18}{x} = 49\frac{x}{x+18}$$

$$36(x+18)^2 = 49x^2$$

$$6(x+18) = \pm 7x$$

$$6x+108 = 7x$$

$x = 108$ Schafe der ersten Heerde.

$x+18 = 126$ „ „ zweiten „

Anmerkung. Die Bemerkung der vorigen Aufgabe hat auch hier Geltung.

Nr. 16. Ein Geflügelhändler kaufte eine Anzahl von wälschen Hühnern und eine um 8 grössere Anzahl von Enten. Für jede Ente gab er so viel Gulden als der achte Theil der Anzahl von Hühnern betrug, und ebenso für jedes Huhn an Gulden den achten Theil der Anzahl von Enten. Später kaufte er wieder wälsche Hühner und zwar 4 weniger als vorher, und gab für jedes so viel Gulden als der vierte Theil der Anzahl dieser Hühner betrug. Wenn nun die für den ersten Ankauf ausgegebene Summe 4 fl. weniger betrug als das Vierfache der zweiten Ausgabe, wie viel Hühner und Enten hatte er bei dem ersten Kaufe erhalten?

Auflösung. x = Anz. Hühner, die das erste Mal gek. w.,

$x+8$ = „ Enten „ „ „ „ „ „

$\frac{x+8}{8}$ = Preis eines Huhns beim ersten Ank. in fl.,

$\frac{x}{8}$ = „ einer Ente „ „ „ „ „

$x \cdot \frac{x+8}{8}$ = Ank.-Preis sowohl der Hühner als auch der Enten im ersten Falle in fl.,

$2 \cdot x \cdot \frac{x+8}{8} = x \cdot \frac{x+8}{4}$ = Gesammt-Ausgabe im ersten Fall,

$x-4$ = Anz. Hühner, die das zweite Mal gek. w.,

$\frac{x-4}{4}$ = Preis eines Huhnes in fl.,

$(x-4) \cdot \frac{x-4}{4} = \frac{(x-4)^2}{4}$ = Gesammt-Ausl. im zweiten Fall in fl.

$$x \cdot \frac{x+8}{4} + 4 = 4\frac{(x-4)^2}{4}$$

$$x^2+8x+16 = 4(x-4)^2$$

$$1(x+4) = 2(x-4)$$
$$x+4 = 2x-8$$
$$x = 12 \text{ Hühner, die das erste Mal gek. wurden.}$$
$$x+8 = 20 \text{ Enten, „ „ „ „ „ „}$$

Anmerkung. Die Bemerkung der beiden vorigen Aufgaben findet auch hier Anwendung.

Nr. 17. *A* und *B* vereinigen sich zu einem Geschäfte mit Capitalien, die sich zu einander verhalten wie 9 : 8. Sie gewinnen jedes Jahr $\frac{1}{3}$ ihrer Einlage, und nachdem sie so viele Jahre das Geschäft betrieben als $\frac{3}{40}$ von der Zahl der von *B* eingelegten Gulden betragen, haben sie in dieser Zeit im Ganzen 16660 fl. gewonnen. Wie viel hat jeder eingelegt, und wie viele Jahre haben beide das Geschäft mit einander betrieben?

Auflösung. $9x =$ Einlage des *A* in fl.,

$8x =$ „ „ *B* „ „

$17x =$ Gesammt-Einlage beider Kaufleute,

$\frac{17x}{3} =$ jährlicher Gewinn derselben,

$\frac{3}{40} \cdot 8x = \frac{3x}{5} =$ Anzahl Jahre, während welcher das Geschäft getrieben wurde,

$\frac{17x}{3} \cdot \frac{3x}{5} = \frac{17x^2}{5} =$ ganzer Gewinn in diesem Zeitraum.

$$\frac{17x^2}{5} = 16660$$
$$x^2 = 4900$$
$$x = \pm 70$$

$9x = 630$ fl. $=$ Einlage des *A*,

$8x = 560$ „ $=$ „ „ *B*,

$\frac{3x}{5} = 42$ Jahre $=$ Dauer des Geschäfts.

Nr. 18. Zwei Stücke Feld, von denen das eine die Form eines rechtwinkligen Dreiecks, das andere die Form eines Rechtecks hat, verhalten sich dem Flächeninhalte nach zu einander wie 5 : 8. Die kleinere Seite des Rechtecks, sowie auch die kleinere Kathete des rechtwinkligen Dreiecks haben jede eine Länge von 180 Fuss; die grössere Kathete des rechtwinkligen Dreiecks aber ist gleich der Diagonale des Rechtecks. Wie gross sind die Flächeninhalte beider Grundstücke?

Auflösung. $5x$ = Fläche des Dreiecks in Qu.-Fussen,

$8x$ = „ „ Rechtecks „ „

$2.\frac{5x}{180}=\frac{x}{18}$ = Länge d. grössern Seite d. Dreiecks in F.,

$\frac{8x}{180}=\frac{2x}{45}$ = „ „ andern Seite d. Rechtecks „ „

$\sqrt{180^2+\left(\frac{2x}{45}\right)^2}$ = „ „ Diagonale „ „ „ „

$$\frac{x}{18}=\sqrt{180^2+\left(\frac{2x}{45}\right)^2}$$

$$\frac{x^2}{324}=180^2+\frac{4x^2}{2025}$$

$$\frac{729x^2}{324.2025}=180^2$$

$$x^2=\frac{180^2.18^2.45^2}{27^2}$$

$$x=\pm\frac{180.18.45}{27}$$

$$=\pm 5400$$

$5x$ = 27000 Qu.-Fuss = Fläche des Dreiecks,

$8x$ = 43200 „ = „ „ Rechtecks.

Nr. 19. Ein Kaufmann gewinnt mit seinem Capitale im ersten Jahre 690 fl. Er schlägt diesen Gewinn zum Capitale, gewinnt im zweiten Jahre ebenso viele Procente wie im ersten, macht es am Ende des Jahres mit dem erhaltenen Gewinn wieder so wie vorher, und da er auf dieselbe Weise auch im dritten und vierten Jahre verfährt, so findet er, nachdem er am Ende des vierten Jahres den Gewinn wieder zum Capitale geschlagen hat, dass sich jetzt das auf diese Art angewachsene Capital zum ursprünglichen verhalte wie 81 : 16. Wie gross war das ursprüngliche Capital?

Auflösung. x = ursprüngl. angelegtes Cap. in fl.,

$\frac{690}{x}$ = Gewinn von 1 fl. im ersten Jahre in fl.,

$1+\frac{690}{x}$ = Werth eines Guldens Cap. sammt seinen einjährigen Zinsen in fl.,

$x+690$ = Cap., welches am Anfang des zweiten Jahres angelegt wird,

$$(x+690)\left(1+\frac{690}{x}\right)=\frac{(x+690)^2}{x}$$ = Werth d. Cap. sammt Zins.-Zinsen am Ende des 2ten u. Anfang des 3ten Jahres,

$$\frac{(x+690)^2}{x}\cdot\left(1+\frac{690}{x}\right)=\frac{(x+690)^3}{x^2}$$ = Werth d. Cap. sammt Zins.-Zinsen am Ende des 3ten u. Anfang des 4ten Jahres,

$$\frac{(x+690)^3}{x^2}\cdot\left(1+\frac{690}{x}\right)=\frac{(x+690)^4}{x^3}$$ = Werth d. Cap. sammt Zins.-Zinsen am Ende des 4. J.

$$\frac{(x+690)^4}{x^3}:x = 81:16$$
$$(x+690)^4:x^4 = 81:16$$
$$(x+690):x = 3:2$$
$$2x+1380 = 3x$$
$$x = 1380 \text{ fl.}$$

Anmerkung. Eine rigorosere Lösung, welche aber hier drei, für den praktischen Zweck untaugliche Resultate liefert, wäre folgende:

$$16(x+690)^4 = 81x^4$$
$$4(x+690)^2 = \pm 9x^2$$
$$2(x+690) = \pm\sqrt{9x^2} \text{ oder } = \pm\sqrt{-9x^2}$$
$$2x+1380 = \pm 3x \text{ oder } = \pm 3x\sqrt{-1}$$
$$1380 = x \text{ oder } = -5x \text{ oder } = x(-2\pm 3\sqrt{-1})$$
$$x = 1380 \text{ oder } = -276 \text{ oder}$$
$$= \frac{1380}{-2\pm 3\sqrt{-1}} = \frac{1380}{7}(-2\mp 3\sqrt{-1}).$$

Nr. 20. Wenn man eine zweiziffrige Zahl mit der in der Stelle der Zehner stehenden Ziffer multiplicirt, so ist das Produkt 46; wenn man aber mit der nämlichen Ziffer nur die Ziffern-Summe dieser Zahl multiplicirt, so ist das Produkt auch nur 10. Wie heisst die Zahl?

Auflösung. x = Ziffer an der Stelle der Zehner,

$$\frac{10}{x} = \text{Ziffern-Summe,}$$

$$\frac{10}{x}-x = \frac{10-x^2}{x} = \text{Ziffer an der Stelle der Einer,}$$

$$10x+\frac{10-x^2}{x} = \frac{9x^2+10}{x} = \text{Zahl selbst,}$$

$\frac{9x^2+10}{x} \cdot x = 9x^2+10 =$ Produkt der Zahl in die an der Stelle der Zehner stehende Ziffer.

$$9x^2+10 = 46$$
$$9x^2 = 36$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$
$$\frac{9x^2+10}{x} = 23.$$

Anmerkung. Leichter ist die Auflösung mit zwei Unbekannten:

$x =$ Ziffer an der Stelle der Zehner,
$y =$ „ „ „ „ „ Einer,
$10x+y =$ Zahl selbst,
$x+y =$ Ziffern-Summe.

I. $\quad x(10x+y) = 46$
II. $\quad x(x+y) = 10,$

deren Auflösung sich durch Subtraction von II. von I. ergiebt.

Will man den Werth $x = -2$ auf die Angabe anwenden, dann muss man nicht übersehen, dass $-23 = -2 \cdot 10 - 3$, die Ziffern-Summe also in diesem Fall $-2-3 = -5$ ist.

Nr. 21. Von zwei Städten, C und D, welche 132 Meilen von einander entfernt sind, gehen zwei Personen, A und B, zu gleicher Zeit aus, um einander entgegen zu reisen. Sie treffen zusammen, nachdem sie dreimal so viele Tage zur Reise gebraucht haben, als der Unterschied der täglich von A und B zurückgelegten Meilen beträgt. Wenn nun A beim Zusammentreffen 72, also B 60 Meilen zurückgelegt hat, wie viele Meilen machte jeder täglich?

Auflösung. $x =$ Anzahl Meilen, die A täglich macht;

$\frac{10}{12}x = \frac{5}{6}x =$ „ „ „ B „ „ denn bei gleichen Zeiträumen müssen die Geschwindigkeiten den zurückgelegten Wegen proportional sein;

$3(x - \frac{5}{6}x) = \frac{1}{2}x =$ Anzahl Tage, die sie unterwegs sind;

$x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} =$ Anz. Meil., die A in dieser Zeit zurücklegt;

$\frac{5}{6}x \cdot \frac{x}{2} = \frac{5x^2}{12} =$ „ „ „ B „ „ „ „

$\frac{x^2}{2} + \frac{5x^2}{12} = \frac{11x^2}{12} =$ Entfernung der Orte C und D.

$$\frac{11x^2}{12} = 182$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \pm 12$$
$x = 12$ Meilen, die A täglich macht.
$\frac{5x}{6} = 10$ „ „ B „ „

Anmerkung. Dieselben Werthe ergeben sich auch aus den zwei weitern, selbstverständlichen Gleichungen:

$$\frac{x^2}{2} = 72 \text{ und } \frac{5x^2}{12} = 60.$$

Eine weitere Auflösung ist folgende:

x = Anzahl Meilen, die A täglich macht,
y = „ „ „ B „ „
$\frac{72}{x}$ = Anz. Tage, die A bis z. Zusammentr. unterwegs ist.
$\frac{60}{y}$ = „ „ „ B „ „ „ „ „

I. $\frac{72}{x} = \frac{60}{y}$

$x - y$ = Unterschied der tägl. von A u. B zurückgel. Meil.,
$3(x-y)$ = Anzahl Tage, die zur Reise gebraucht wurden.

II. $\frac{72}{x}$ oder $\frac{60}{y} = 3(x-y)$,

woraus sich das Uebrige von selbst ergiebt, wenn man aus I. einen Werth für x oder y in II. einsetzt.

Nr. 22. Welche zwei Zahlen haben die Eigenschaft, dass sich ihre Summe zur grössern verhält wie 40 zur kleinern, und ebenso ihre Summe zur kleinern wie 90 zur grössern?

Auflösung. x = grössere Zahl,
y = kleinere Zahl.

I. $(x+y) : x = 40 : y$
II. $(x+y) : y = 90 : x$
III. $y(x+y) = 40x$ (aus I.)
IV. $x(x+y) = 90y$ (aus II.)

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{9} \cdot \frac{x}{y} \text{ (aus III. und IV.)}$$
$$y^2 = \tfrac{4}{9}x^2$$

V. $y = \pm \tfrac{2}{3}x$

$\pm\frac{2}{3}x(x\pm\frac{2}{3}x) = 40x$ $\qquad$ $x(x\pm\frac{2}{3}x) = \pm 60x$

(d. Substit. von V. in III. oder in IV.)

$$x\pm\frac{2}{3}x = \pm 60$$

$\frac{5}{3}x = 60$ $\qquad$ $\frac{1}{3}x = -60$

* VI. $\quad x = 36$ $\qquad$ $x = -180$

* VII. $\quad y = \frac{2}{3}x = 24$ $\qquad$ $y = -\frac{2}{3}x = 120$

(d. Substit. von VI. in V.).

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$yx(x+y)^2 = 3600xy$ (aus III. und IV.)

$$(x+y)^2 = 3600$$

$$x+y = \pm 60$$

VIII. $\quad y = \pm 60 - x$

woraus das Uebrige durch Substitution von VIII. in III. oder in IV. folgt.

Die gleichzeitige Verbindung beider Operationen, also der Gleichungen $y = \pm\frac{2}{3}x$ und $x+y = \pm 60$ würde für jede Unbekannte zwei weitere Werthe ergeben, die den Stamm-Gleichungen aber nicht genügen. Von den hier gefundenen entsprechen die beiden letzten ($x = -180$ und $y = 120$) wohl den Gleichungen aber nicht der Aufgabe, indem -180 kleiner als $+120$ ist.

Nr. 23. Welche zwei Zahlen haben die Eigenschaft, dass das Produkt aus der grössern und dem Kubus der kleinern sich zum Produkte aus der kleinern und dem Kubus der grössern verhält wie 4 : 9, und dass die Summe beider Kuben = 35 ist?

Auflösung. x = grössere Zahl,

y = kleinere Zahl.

I. $\quad xy^3 : x^3y = 4:9$

II. $\quad x^3+y^3 = 35$

$y^2 : x^2 = 4:9$ (aus I.)

$$y:x = \pm 2 : \pm 3$$

III. $\quad y = \pm\frac{2}{3}x$

$x^3 \pm \frac{8}{27}x^3 = 35$ (d. Substit. von III. in II.)

$$\frac{35}{27}x^3 \text{ oder } \frac{19}{27}x^3 = 35$$

$$\frac{x^3}{27} = 1 \text{ oder } \frac{35}{19}$$

$$\frac{x}{3} = 1 \text{ oder } = \sqrt[3]{\frac{35}{19}}$$

*IV. $x = 3$ oder $= 3\sqrt[3]{\frac{15}{19}}$
*V. $y = \frac{2}{3}x = 2$ oder $= -\frac{2}{3}x = -2\sqrt[3]{\frac{15}{19}}$.

Nr. 24. Es hat Jemand zwei Höfe in der Form von Quadraten, deren Seiten zusammen 123 Fuss betragen, und lässt dieselben mit Steinplatten belegen. Jedesmal 9 Qu.-Fuss eines jeden Hofes kosten so viele Gulden, als der 48ste Theil einer Seite des andern Hofes beträgt, und beide Höfe zusammen 1025 fl. Wie gross ist die Seite eines jeden Hofes?

Auflösung. x = Seite des einen Quadrats in Fussen,
y = „ „ andern „ „ „
x^2 = Fläche des einen Quadrats in Qu.-Fussen,
y^2 = „ „ andern „ „ „
$\frac{y}{48.9}$ = Preis eines Qu.-F. des ersten Hofes in fl.
$\frac{x}{48.9}$ = „ „ „ „ zweiten „ „ „
$\frac{x^2y}{48.9}$ = Pflasterungskosten des ersten Hofes in fl.
$\frac{xy^2}{48.9}$ = „ „ zweiten „ „ „

I. $x+y = 123$
II. $\frac{x^2y}{48.9}+\frac{xy^2}{48.9} = 1025$
III. $x^2y+xy^2 = 48.9.1025$ (aus II.)
IV. $xy = 3600$ (aus III. und I.)
V. $4xy = 14400$
VI. $x^2+2xy+y^2 = 15129$ (aus I.)
VII. $x^2-2xy+y^2 = 729$ (aus V. und VI.)
$x-y = \pm 27$
$2x = 150$ oder $= 96$ } (aus I. und VII.)
$2y = 96$ oder $= 150$ }
*VIII. $x = 75$ od. $= 48$ Fuss = Länge der einen Qu.-Seite.
*IX. $y = 48$ od. $= 75$ „ = „ „ andern „

Nr. 25. Es kauft Jemand Aepfel und Birnen, zusammen 80 Stück, und bezahlt für die Aepfel doppelt so viel als für die Birnen. Hätte er so viele Aepfel gekauft als er wirklich Birnen kaufte, und so viele Birnen, als er wirklich Aepfel kaufte, so hätte er für

die Aepfel 10 krz. und für die Birnen 45 krz. bezahlen müssen. Wie viel Aepfel und Birnen hat er gekauft?

Auflösung. x = Anzahl wirklich gekaufter Aepfel,
und auch = vorausges. Anzahl gekaufter Birnen,
$80 - x$ = Anzahl wirklich gekaufter Birnen,
und auch = vorausges. Anzahl gekaufter Aepfel,
$\frac{10}{80 - x}$ = wirklicher Preis eines Apfels in krz.,
$\frac{45}{x}$ = „ „ einer Birne „ „
$\frac{10x}{80 - x}$ = Preis der wirklich gekauften Aepfel,
$\frac{45}{x}(80 - x)$ = „ „ „ „ Birnen.

$$\frac{10x}{80 - x} = 2 . \frac{45}{x}(80 - x)$$

$$\frac{10x^2}{(80 - x)^2} = 90$$

$$\left(\frac{x}{80 - x}\right)^2 = 9$$

$$\frac{x}{80 - x} = \pm 3$$

$$\frac{x}{80} = \frac{3}{4} \text{ oder } = -\frac{3}{2}$$

$$x = 60 \text{ oder } = -120$$

$x = 60$ wirklich gekaufte Aepfel,
$80 - x = 20$ „ „ Birnen.

Nr. 26. Es vertauscht Jemand eine Anzahl Eimer bessern Weins gegen eine andere Anzahl schlechtern, und erhält noch 675 fl. zur Ausgleichung. Der Eimer einer jeden Weinsorte kostet dreimal so viel Gulden, als die Zahl der Eimer dieser Sorte beträgt. Wäre jedoch die geringere Sorte ebenso theuer als die bessere, so würde der Werth beider Weine zusammen 3375 fl. betragen. Wie viel Eimer betrug jede Sorte?

Auflösung. x = Anzahl Eimer bessern Weins,
y = „ „ geringern „
$3x$ = Preis eines Eimers der bessern Sorte in fl.
$3y$ = „ „ „ „ geringern „ „ „
$x . 3x = 3x^2$ = Werth des bessern Weines in fl.,

$y \cdot 3y = 3y^2 =$ Werth des geringern Weins in fl.

I. $3x^2 = 3y^2 + 675$

$3xy =$ Werth des geringern Weins nach der Voraussetzung der Aufgabe.

II. $3x^2 + 3xy = 3375$

III. $x^2 - y^2 = 225$ (aus I.)

IV. $x^2 + xy = 1125$ (aus II.)

V. $2x^2 + 2xy = 2250$

$x^2 + 2xy + y^2 = 2025$ (aus III. und V.)

VI. $x + y = \pm 45$

*VII. $x = \pm 25$ (aus IV. und VI.)

$x = 25$ Eimer der bessern Sorte.

$\pm 25 + y = \pm 45$ (d. Substit. von VII. in VI.)

*VIII. $y = \pm 20$

$y = 20$ Eimer der geringern Sorte.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ergiebt sich folgendermassen:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} = \frac{x - y}{x} = \tfrac{1}{5} \text{ (aus III. und IV.)}$$

$$5x - 5y = x$$

$$4x = 5y$$

IX. $$x = \frac{5y}{4},$$

woraus das Uebrige durch Substitution von IX. in III. folgt.

Auch lässt sich aus III. und IV. die Gleichung $y^2 + xy = 900$ entwickeln und unter Berücksichtigung, dass $y^2 + xy = y(x + y)$ ist, mit den andern Gleichungen verbinden.

Nr. 27. Von zwei Gefässen, deren jedes die Form eines Parallelepipedons hat, hält das grössere 20 Kubikfuss mehr als das kleinere. Ihre Kubikinhalte verhalten sich wie 4 : 5, die Grundflächen beider sind Quadrate, und die Höhe eines jeden gleich einer Seite von der Grundfläche des andern. Wie hoch ist jedes Gefäss?

Auflösung.

$x =$ Höhe des ersten Gefässes in Fussen,

und auch = Seite der Grundfläche d. zweiten Gefässes in Fussen,

$y =$ Höhe des zweiten Gefässes in Fussen,

und auch = Seite der Grundfläche des ersten Gefässes in Fussen,

$y^2 =$ Grundfläche des ersten Gefässes in Qu.-Fussen,

$x^2 =$ Grundfläche d. zweiten Gefässes in Qu.-Fuss.,
$xy^2 =$ Kubikinhalt des ersten Gefässes in Kub.-Fussen.
$x^2y =$ „ „ zweiten „ „ „

I. $xy^2 : x^2y = 4:5$
II. $x^2y - xy^2 = 20$
$y : x = 4:5$ (aus I.)
$5y = 4x$
III. $y = \frac{4}{5}x$
$\frac{4}{5}x^3 - \frac{16}{25}x^3 = \frac{4}{25}x^3 = 20$. (d. Substit. von III. in II.)
$x^3 = 125$
* IV. $x = 5$ Fuss = Höhe des ersten Gefässes.
* V. $y = \frac{4}{5}x = 4$ „ = „ „ zweiten „

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:
$5xy^2 = 4x^2y$ (aus I.)

VI. $$xy^2 = \frac{4x^2y}{5}$$

$$x^2y - \frac{4x^2y}{5} = \frac{x^2y}{5} = 20$$ (d. Substit. von VI. in II.)

VII. $x^2y = 100$
VIII. $xy^2 = 80$ (d. Substit. von VII. in VI.)
$x^3y^3 = 8000$ (aus VII. und VIII.)
IX. $xy = 20$
X. $x = 5$ (aus VII. und IX.)
XI. $y = 4$ (aus VIII. und IX.).

Oder auch:

XII. $$\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$ (aus VII. und VIII.)

$x^3 = 125$ (aus VII. und XII.)
XIII. $x = 5$
$y^3 = 64$ (aus VIII. und XII.)
XIV. $y = 4$.

Nr. 28. Es kauft Jemand zwei kostbare Teppiche in der Form von Quadraten und zahlt für jeden derselben für den Qu.-Fuss halb so viel Gulden als die Länge der Seite desselben Fuss beträgt. Zusammen kosten beide Teppiche $620\frac{1}{2}$ fl. Hätte er jedoch für den Qu.-Fuss eines jeden Teppichs halb so viel Gulden bezahlt, als die Länge der Seite des andern Teppichs Fuss beträgt, so hätte seine Ausgabe $8\frac{1}{2}$ fl. weniger betragen. Wie lang ist jeder Teppich?

Auflösung. x = Länge des ersten Teppichs in Fussen,
y = „ „ zweiten „ „ „
x^2 = Fläche d. ersten Teppichs in Qu.-Fussen,
y^2 = „ „ zweiten „ „ „
$\frac{x}{2}$ = Preis eines Qu.-F. d. ersten Tepp. in fl.,
und auch = vorausges. Preis eines Qu.-F. des zweiten Teppichs in fl.,
$\frac{y}{2}$ = Preis eines Qu.-F. d. zweiten Tepp. in fl.,
und auch = vorausges. Preis eines Qu.-F. des ersten Teppichs in fl.,
$x^2 . \frac{x}{2} = \frac{x^3}{2}$ = wirklicher Preis des ersten Tepp. in fl.
$y^2 . \frac{y}{2} = \frac{y^3}{2}$ = „ „ „ zweiten „ „ „

I. $\frac{x^3}{2} + \frac{y^3}{2} = 620\frac{1}{2}$

$x^2 . \frac{y}{2}$ = vorausges. Preis des ersten Tepp. in fl.
$y^2 . \frac{x}{2}$ = „ „ „ zweiten „ „ „

II. $\frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} = 620\frac{1}{2} - 8\frac{1}{2} = 612$

III. $x^3 + y^3 = 1241$ (aus I.)

IV. $x^2y + xy^2 = 1224$ (aus II.)

V. $3x^2y + 3xy^2 = 3672$

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 4913$ (aus III. und V.)

VI. $x + y = 17$

$xy = 72$ (aus IV. und VI.)

VII. $4xy = 288$

VIII. $x^2 + 2xy + y^2 = 289$ (aus VI.)

$x^2 - 2xy + y^2 = 1$ (aus VII. und VIII.)

IX. $x - y = \pm 1$

$2x = 18$ oder $= 16$ } (aus VI. und IX.)
$2y = 16$ oder $= 18$ }

*X. $x = 9$ oder $= 8$ Fuss = Länge des ersten Teppichs.

*XI. $y = 8$ oder $= 9$ „ = „ „ zweiten „

Anmerkung. Eine andere Auflösung, deren Operationen sich auch theilweise mit denen der obigen Auflösung verbinden lassen, ist folgende:

XII. $\frac{x^3+y^3}{x^2y+xy^2} = \frac{x^2-xy+y^2}{xy} = \frac{73}{72}$ (aus III. und IV.)

XIII. $\frac{x^2-2xy+y^2}{xy} = \frac{1}{72}$ (aus XII. d. Subtr. von 1)

XIV. $\frac{x^2+2xy+y^2}{xy} = \frac{289}{72}$ (aus XII. d. Add. von 3)

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2} = 289 \text{ (aus XIII. und XIV.)}$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \pm 17$$

$$\frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} = \tfrac{18}{16} \text{ oder } = \tfrac{16}{18}$$

XV. $x = \frac{9}{8}y$ oder $= \frac{8}{9}y$,

woraus das Uebrige durch Substitution von XV. in III. folgt.

Nr. 29. Von zwei Truppen-Abtheilungen ist jede in ebenso viel Gliedern aufgestellt, als in jedem Gliede der Abtheilung Soldaten stehen; die Zahl der Glieder beider Abtheilungen zusammen beträgt 84. Später stellen sich beide Abtheilungen so auf, dass jede in einem Glied so viele Soldaten hat, als bei der ersten Aufstellung die andere hatte, wodurch die Anzahl der Glieder auf 91 wächst. Wie stark ist jede Truppen-Abtheilung?

Auflösung.

x = Anzahl Soldaten der ersten Abtheilung,
y = „ „ „ zweiten „
$\sqrt{x}$ = „ Glieder der ersten Abth. bei d. ersten Aufst.,
und auch = „ Sold. eines Gliedes der ersten Abth. bei der ersten Aufstellung,
und auch = derselben der zweiten Abth. bei der zweiten Aufst.,
$\sqrt{y}$ = Anz. Glieder der zweiten Abth. bei d. ersten Aufst.,
und auch = „ Sold. eines Gliedes der zweiten Abth. bei der ersten Aufst.,
und auch = derselben der ersten Abth. bei der zweiten Aufst.

I. $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 84$

$\frac{x}{\sqrt{y}}$ = Anz. Glieder der ersten Abth. bei d. zweiten Aufst.

$\frac{y}{\sqrt{x}}$ = „ „ „ zweiten „ „ „ „ „

II. $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}} = 91$



$$\sqrt{\frac{x}{y}} - 1 + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{13}{12} \text{ (aus I. und II. d. Division)}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{25}{12}$$

III. $x + y = \frac{25}{12}\sqrt{xy}$

IV. $x + 2\sqrt{xy} + y = 7056$ (aus I.)

$2\sqrt{xy} = 7056 - \frac{25}{12}\sqrt{xy}$ (aus III. und IV.)

$\frac{49}{12}\sqrt{xy} = 7056$

$\sqrt{xy} = 1728$

V. $4\sqrt{xy} = 6912$

$x - 2\sqrt{xy} + y = 144$ (aus IV. und V.)

VI. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \pm 12$

$\sqrt{x} = 48$ oder $= 36$, $\sqrt{y} = 36$ oder $= 48$ (aus I. und VI.)

*VII. $x = 2304$ oder $= 1296$ Soldaten der ersten Abth.

*VIII. $y = 1296$ oder $= 2304$ „ „ zweiten „

Anmerkung. Eine andere Auflösung, deren Rechnungs-Operationen auch auf die obige Anwendung finden, ist folgende:

z = Anz. Glieder der ersten Abth. bei d. ersten Aufst.,

und auch = „ Sold. eines Gliedes derselben,

z^2 = ganze Stärke der ersten Abth.,

v = Anz. Glieder der zweiten Abth. bei d. zweiten Aufst.,

und auch = „ Sold. eines Gliedes derselben,

v^2 = ganze Stärke der zweiten Abth.

IX. $z + v = 84$

v = Anz. Sold. eines Gliedes der ersten Abth. bei der zweiten Aufst.,

$\frac{z^2}{v}$ = Anz. Glieder derselben,

z = Anz. Sold. eines Gliedes der zweiten Abth. bei der zweiten Aufst.,

$\frac{v^2}{z}$ = Anz. Glieder derselben.

X. $\frac{z^2}{v} + \frac{v^2}{z} = 91$

XI. $z^3 + 3z^2v + 3zv^2 + v^3 = 84^3$ (aus IX.)

XII. $z^3 + v^3 = 91zv$ (aus X.)

$3z^2v + 3zv^2 = 84^3 - 91zv$ (aus XI. und XII.)

XIII. $3zv(z + v) = 84^3 - 91zv$

$$252zv = 84^3 - 91zv \quad \text{(d. Substit. von IX. in XIII.)}$$

$$343zv = 7^3.zv = 84^3$$

$$zv = 12^3 = 1728$$

$$\text{XIV.} \quad 4zv = 6912$$

$$\text{XV.} \quad z^2 + 2zv + v^2 = 7056 \quad \text{(aus IX.)}$$

$$z^2 - 2zv + v^2 = 144 \quad \text{(aus XIV. und XV.)}$$

$$\text{XVI.} \quad z - v = \pm 12$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{XVII.} & z = 48 \text{ oder } = 36 \\ \text{XVIII.} & v = 36 \text{ oder } = 48 \end{array}\right\} \text{(aus IX. und XVI.)}$$

$$z^2 = 2304 \text{ oder } = 1296 \text{ Mann der ersten Abth.}$$

$$v^2 = 1296 \text{ oder } = 2304 \quad \text{„ „ zweiten „}$$

Nr. 30. Es hat Jemand ein rechtwinkliges Feld, dessen Seiten in der Grösse sich so verhalten, dass das Quadrat der Diagonale des Rechtecks grösser ist als $\frac{8}{9}$ des Quadrats der kleinen Seite um das Quadrat der Differenz beider Seiten. Das Feld wird zur Anlage einer Baumschule benutzt und die jungen Bäumchen werden so gesetzt, dass auf je einen Qu.-Fuss ein Bäumchen kömmt. Je 10 Bäumchen kosten dabei so viel Kreuzer als der dritte Theil der Länge der Diagonale des Rechtecks in Fussen beträgt. Hätte er die Bäumchen so erhalten können, dass je 25 Stück so viel Kreuzer kosteten, als die kürzere Seite des Rechtecks Fuss hat, so hätte seine Ausgabe 74 fl. 40 krz. weniger betragen. Wie gross ist jede Seite des Feldes?

Auflösung. x = längere Seite des Rechtecks in Fussen,

y = kürzere „ „ „ „ „

x^2+y^2 = Quadrat der Diagonale des Rechtecks,

aber auch $\frac{8}{9}y^2+(x-y)^2$ = „ „ „ „ „

$$\text{I.} \quad x^2+y^2 = \tfrac{8}{9}y^2+(x-y)^2$$

xy = Anzahl Qu.-Fuss des Rechtecks,

und auch = „ Bäumchen, die gesetzt werden,

$\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ = wirkl. Preis von 10 Bäumchen in krz.,

$\frac{xy}{30}\sqrt{x^2+y^2}$ = „ „ sämmtl. „ „ „

y = vorausg. Preis von 25 „ „ „

$xy \cdot \frac{y}{25} = \frac{xy^2}{25}$ = „ „ sämmtl. „ „ „

$\frac{xy}{30}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy^2}{25}$ = Anz. Kreuz., um welche die vorausges. Auslage geringer wäre als die wirkliche.

$$\text{II.}\quad \frac{xy}{30}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy^2}{25} = 4480$$

$$x^2+y^2 = \tfrac{5}{3}y^2 + x^2 - 2xy + y^2 \text{ (aus I.)}$$

$$2xy = \tfrac{8}{3}y^2$$

$$\text{III.}\quad x = \tfrac{4}{3}y$$

$$\tfrac{4}{90}y^2\sqrt{\tfrac{16}{9}y^2+y^2} - \frac{4y^3}{75} = 4480$$

$$\frac{y^2}{90}\sqrt{\tfrac{25}{9}y^2} - \frac{y^3}{75} = 1120$$

$$\frac{y^3}{54} - \frac{y^3}{75} = \frac{7y^3}{1350} = 1120$$

$$y^3 = 216000$$

*IV. $y = 60$ Fuss = kürzere Seite d. Rechtecks.

*V. $x = \tfrac{4}{3}y = 80$ „ = längere „ „ „

Nr. 31. Drei Städte, *A*, *B*, *C*, liegen an den Winkelspitzen eines rechtwinkligen Dreiecks, *B* an der Spitze des rechten Winkels, und sind durch gerade Strassen sowie durch Eisenbahnen verbunden, von denen die von *A* nach *B* führende die kürzeste ist. Eine Kutsche fährt zuerst von *A* nach *B*, hierauf von *B* nach *C*, und dann von *C* nach *A* mit gleicher Geschwindigkeit, und braucht von *A* über *B* nach *C* 2 Stunden und 40 Minuten länger als von *C* nach *A*. Ein Dampfwagen, welcher dreimal so schnell fährt, als die Kutsche, fährt 4 Stunden später von *A* ab, und holt die Kutsche ein, nachdem sie $2\frac{2}{3}$ Meilen über *B* hinausgekommen ist. Nachdem dieser Dampfwagen auf seiner Rundfahrt von *A* über *B* und *C* wieder nach *A* zurückgekommen ist, fährt er 6 Stunden und 40 Minuten später wieder ab, um die nämliche Rundfahrt zu machen, und kommt wieder nach *A* zurück zu derselben Zeit, in welcher auch die Kutsche dort ankömmt, welche letztere sich jedoch in *C* 4 Stunden aufgehalten hatte. Wie weit sind die drei genannten Orte von einander entfernt, und wie schnell fahren die Kutsche und der Dampfwagen?

Auflösung. x = Entfernung der Orte *A* u. *B* in Meilen,
y = „ „ „ *B* „ *C* „ „
$\sqrt{x^2+y^2}$ = „ „ „ *A* „ *C* „ „

$x+2\frac{2}{3}$ = Weg, den die Kutsche gemacht hat, als sie das erste Mal vom Dampfwagen eingeholt wird;

$\frac{x+2\frac{2}{3}}{6}$ = Anzahl Meilen, die die Kutsche in einer Stunde macht, denn da der Dampfwagen 4 Stunden später abfährt als die Kutsche und dreimal schneller fährt als dieselbe, so müssen 4 Stunden $\frac{2}{3}$ der Zeit betragen, die die Kutsche zu dem Wege braucht; sie ist also $\frac{3}{2}.4 = 6$ Stunden unterwegs, bis sie vom Dampfwagen eingeholt wird;

$3.\frac{x+2\frac{2}{3}}{6} = \frac{x+2\frac{2}{3}}{2}$ = Anz. Meilen, die d. Dampfw. in 1 St. macht;

$\frac{x+y}{\frac{x+2\frac{2}{3}}{6}} = \frac{6(x+y)}{x+2\frac{2}{3}}$ = Anz. Stunden, die die Kutsche braucht, um von A über B nach C zu fahren;

$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{x+2\frac{2}{3}}{6}} = \frac{6\sqrt{x^2+y^2}}{x+2\frac{2}{3}}$ = Anz. Stunden, die die Kutsche braucht, um von C nach A zu fahren;

$\frac{6(x+y)}{x+2\frac{2}{3}} - \frac{6\sqrt{x^2+y^2}}{x+2\frac{2}{3}} = \frac{6(x+y-\sqrt{x^2+y^2})}{x+2\frac{2}{3}}$ = Anz. Stunden, um welche die Fahrt von C nach A weniger braucht, als jene von A über B nach C.

$$\text{I.}\qquad \frac{6(x+y-\sqrt{x^2+y^2})}{x+2\frac{2}{3}} = 2\frac{2}{3}$$

$\frac{6(x+y)}{x+2\frac{2}{3}} + \frac{6\sqrt{x^2+y^2}}{x+2\frac{2}{3}} + 4 = \frac{6(x+y+\sqrt{x^2+y^2})}{x+2\frac{2}{3}} + 4$ = Zeit, welche die Kutsche zu ihrer ganzen Rundfahrt braucht, den vierstündigen Aufenthalt in C eingerechnet;

$2.\frac{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{x+2\frac{2}{3}}{2}} + 6\frac{2}{3} = \frac{4(x+y+\sqrt{x^2+y^2})}{x+2\frac{2}{3}} + 6\frac{2}{3}$ = Zeit, welche d. Dampfw. zu seinen beiden Rundfahrten braucht, die $6\frac{2}{3}$stünd. Ruhepause in A eingerechnet;

$$\frac{6(x+y+\sqrt{x^2+y^2})}{x+2\frac{2}{3}} + 4 - \left[\frac{4(x+y+\sqrt{x^2+y^2})}{x+2\frac{2}{3}} + 6\frac{2}{3}\right] =$$

$= \frac{2(x+y+\sqrt{x^2+y^2})}{x+2\frac{2}{3}} - 2\frac{2}{3}$ = Anz. Stunden, um welche der Dampfw. zu seinen beiden Rundfahrten weniger braucht als die Kutsche zu der ihrigen, um welche also auch der Dampfwagen ursprünglich von A später abging als die Kutsche.

$$\text{II.}\quad \frac{2(x+y+\sqrt{x^2+y^2})}{x+2\frac{2}{3}} - 2\tfrac{2}{3} = 4$$

$$\text{III.}\quad x+y-\sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{4}{9}(x+2\tfrac{2}{3}) \text{ (aus I.)}$$

$$\frac{2(x+y+\sqrt{x^2+y^2})}{x+2\frac{2}{3}} = 6\tfrac{2}{3} \text{ (aus II.)}$$

$$\text{IV.}\quad x+y+\sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{10}{3}(x+2\tfrac{2}{3})$$

$$2(x+y) = \tfrac{34}{9}(x+\tfrac{8}{3}) \text{ (aus III. und IV.)}$$

$$\text{V.}\quad x+y = \tfrac{17}{9}(x+\tfrac{8}{3})$$

$$\text{VI.}\quad x^2+2xy+y^2 = \tfrac{289}{9}(x+\tfrac{8}{3})^2$$

$$(x+y)^2-(x^2+y^2) = \tfrac{40}{27}(x+\tfrac{8}{3})^2 \text{ (aus III. u. IV. d. Mult.)}$$

$$2xy = \tfrac{40}{27}(x+\tfrac{8}{3})^2$$

$$\text{VII.}\quad 4xy = \tfrac{80}{27}(x+\tfrac{8}{3})^2$$

$$x^2-2xy+y^2 = \tfrac{49}{81}(x+\tfrac{8}{3})^2 \text{ (aus VI. und VII.)}$$

$$\text{VIII.}\quad x-y = \pm\tfrac{7}{9}(x+\tfrac{8}{3})$$

$$2x = \tfrac{8}{3}(x+\tfrac{8}{3}) \text{ oder } = \tfrac{10}{9}(x+\tfrac{8}{3})$$
$$2y = \tfrac{10}{9}(x+\tfrac{8}{3}) \text{ oder } = \tfrac{8}{3}(x+\tfrac{8}{3}) \quad \text{(aus V. und VIII.)}$$

$$\text{IX.}\quad x = \tfrac{4}{3}(x+\tfrac{8}{3}) \text{ oder } = \tfrac{5}{9}(x+\tfrac{8}{3})$$

$$\text{X.}\quad y = \tfrac{5}{9}(x+\tfrac{8}{3}) \text{ oder } = \tfrac{4}{3}(x+\tfrac{8}{3})$$

$$-\tfrac{1}{3}x = \tfrac{32}{9} \text{ (aus IX.)} \qquad \tfrac{4}{9}x = \tfrac{40}{27}$$

$${}^*\text{XI.}\quad x = -\tfrac{32}{3} \qquad x = \tfrac{10}{3} \text{ Meilen} = \text{Entfernung } AB.$$

$$y = \tfrac{5}{9}(x+\tfrac{8}{3}) \qquad y = \tfrac{4}{3}(x+\tfrac{8}{3}) \text{ (d. Substit. von IX. in X.)}$$

$${}^*\text{XII.}\quad = -\tfrac{40}{9} \qquad = 8 \text{ Meilen} = \text{Entfernung } BC.$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\tfrac{100}{9}+64} = \tfrac{26}{3} \text{ Meilen} = \text{Entfernung } AC,$$

$$\frac{x+2\frac{2}{3}}{6} = 1 \text{ Meile, die die Kutsche per Stunde macht,}$$

$$\frac{x+2\frac{2}{3}}{2} = 3 \text{ Meilen, die der Dampfw. per Stunde macht.}$$

Anmerkung. Wem die Aufsuchung der beiden Werthe für die Geschwindigkeit der Kutsche und des Dampfwagens nicht klar genug, nehme eine dritte Uebekannte zu Hülfe, nämlich:

z = Anz. Meilen, die die Kutsche in einer St. macht;

$3z$ = „ „ „ der Dampfw. „ „ „ „

$\frac{x+2\frac{2}{3}}{z}$ = „ St., die die Kutsche unterwegs ist, bis sie vom Dampfw. das erste Mal eingeholt wird;

$\frac{x+2\frac{2}{3}}{3z}$ = „ St., die der Dampfw. unterwegs ist, bis er die Kutsche das erste Mal einholt.

$$\frac{x+2\frac{2}{3}}{z} - \frac{x+2\frac{2}{3}}{3z} = 4$$

$$z = \frac{x+2\frac{2}{3}}{6}.$$

Zur Auffindung von y kann man auch den Werth von x von XI. in V. oder in VIII. substituiren.

Nr. 32. Zwei Städte, A und B, liegen an den Ufern eines mit einer Geschwindigkeit von 4 Meilen per Stunde fliessenden Flusses. Ein Schiffer rudert von A nach B und zurück, und findet, dass er hiezu um 39 Minuten länger gebraucht habe, als wenn das Wasser keine Strömung hätte. Am nächsten Tage wiederholt er seine Reise in Begleitung eines andern Schiffers, mit dessen Hülfe er um die Hälfte schneller fährt als Tags zuvor, und er findet nun, dass er um 8 Minuten länger brauche, als wenn das Wasser keine Strömung hätte. Wie schnell rudert der Schiffer in stehendem Wasser?

Auflösung. x = Anz. Meil. des Schiffers per Stunde,

$x+\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ = „ „ die er mit Hülfe des Freundes in einer Stunde macht,

$x+4$ = Schnelligkeit bei der Thalfahrt in Meil. per Stunde am ersten Tage,

$x-4$ = Schnelligkeit bei der Bergfahrt in Meil. per Stunde am ersten Tage,

$\frac{3}{2}x+4$ = Schnelligkeit bei der Thalfahrt in Meil. per Stunde am zweiten Tage,

$\frac{3}{2}x-4$ = Schnelligkeit bei der Bergfahrt in Meil. per Stunde am zweiten Tage,

y = Entfernung AB in Meilen,

$\frac{y}{x+4}+\frac{y}{x-4} = \frac{2xy}{x^2-16}$ = gebrauchte Zeit bei der ersten Fahrt,

$\frac{y}{\frac{3}{2}x+4}+\frac{y}{\frac{3}{2}x-4} = \frac{12xy}{9x^2-64}$ = „ „ „ „ zweiten „

$\frac{2y}{x}$ = Zeit, die im ersten Fall zur Fahrt auf ruhigem Wasser nothwendig ist,

$\frac{2y}{\frac{3}{2}x} = \frac{4y}{3x}$ = derselben im zweiten Fall.

$$\text{I.} \quad \frac{2xy}{x^2-16}-\frac{2y}{x} = \frac{39}{60} = \frac{13}{20}$$

$$\text{II.} \quad \frac{12xy}{9x^2-64}-\frac{4y}{3x} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 2x^2y - 2x^2y + 32y & = & \frac{13}{20}x(x^2 - 16) \text{ (aus I.)} \\
\text{III.} & 32y & = & \frac{13}{20}x(x^2 - 16) \\
 & 36x^2y - 36x^2y + 256y & = & \frac{2}{5}x(9x^2 - 64) \text{ (aus II.)} \\
 & 256y & = & \frac{2}{5}x(9x^2 - 64) \\
\text{IV.} & 32y & = & \frac{1}{20}x(9x^2 - 64) \\
 & \frac{13}{20}x(x^2 - 16) & = & \frac{1}{20}x(9x^2 - 64) \text{ (aus III. und IV.)} \\
 & 13x^2 - 208 & = & 9x^2 - 64 \\
 & 4x^2 & = & 144 \\
 & x^2 & = & 36 \\
{}^*\text{V.} & x & = & 6 \text{ Meilen, die der Schiffer per Stunde auf ruhigem Wasser zurücklegt.} \\
 & y & = & \frac{13}{640}(x^2 - 16)x \text{ (aus III.)} \\
{}^*\text{VI.} & & = & \frac{39}{16} = 2\frac{7}{16} \text{ Meilen} = \text{Entfernung } AB.
\end{array}
$$

Anmerkung. Diese Aufgabe fehlt in der Nagel'schen Sammlung.

IX. Abschnitt.

Aufgaben, welche auf unreine quadratische Gleichungen führen.

Nr. 1. Die Summe zweier Zahlen ist = 19. Das Produkt aus der Differenz beider Zahlen und der grössern von beiden ist = 60. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung.

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & \text{grössere Zahl,} \\
19 - x & = & \text{kleinere } ,, \\
x - (19 - x) = 2x - 19 & = & \text{Differenz beider Zahlen.} \\
x(2x - 19) & = & 60 \\
2x^2 - 19x & = & 60 \\
x^2 - \frac{19}{2}x & = & 30 \\
x^2 - \frac{19}{2}x + (\frac{19}{4})^2 & = & 30 + \frac{361}{16} = \frac{841}{16} \\
x - \frac{19}{4} & = & \pm\frac{29}{4} \\
x & = & \frac{19 \pm 29}{4} \\
 & = & 12 \text{ oder } = -\frac{5}{2} \\
x & = & 12 = \text{grössere Zahl,} \\
19 - x & = & 7 = \text{kleinere Zahl.}
\end{array}
$$

Anmerkung. Der Werth $x = -\frac{5}{2}$ und der daraus sich ergebende $19 - x = \frac{43}{2}$ entsprechen zwar der Gleichung, aber nicht der Aufgabe, indem $-\frac{5}{2}$ kleiner als $\frac{43}{2}$ ist.

Nr. 2. Wenn man das Quadrat einer gewissen Zahl von 40 abzieht, aus der erhaltenen Differenz die Qu.-Wurzel auszieht, dazu 10 addirt, die gefundene Summe mit 2 multiplicirt und das Produkt mit der ursprünglichen Zahl dividirt, so ist der gefundene Quotient $= 4$. Wie heisst die Zahl?

Auflösung. x = gesuchte Zahl.

$$\frac{(\sqrt{40-x^2}+10)2}{x} = 4 \text{ (aus den gegebenen Bedingungen)}$$

$$\sqrt{40-x^2}+10 = 2x$$

$$\sqrt{40-x^2} = 2x-10$$

$$40-x^2 = 4x^2-40x+100$$

$$5x^2-40x = -60$$

$$x^2-8x = -12$$

$$x^2-8x+(4)^2 = 16-12 = 4$$

$$x-4 = \pm 2$$

$$x = 6 \text{ oder } = 2.$$

Anmerkung. Der zweite Werth $x = 2$ entspricht der Gleichung $\frac{2(10-\sqrt{40-x^2})}{x} = 4$ oder es muss die Wurzelgrösse der Stammgleichung als $\sqrt{40-x^2} = \sqrt{40-4} = \sqrt{36} = -6$ angenommen werden.

Nr. 3. Von einem Rechtecke, dessen Flächeninhalt 960 Qu.-Fuss beträgt, ist die Länge um 16 Fuss grösser als die Breite. Wie gross ist jede Seite des Rechtecks?

Auflösung. x = Länge des Rechtecks in Fussen,

$x-16$ = Breite „ „ „ „

$x(x-16)$ = Fläche „ „ „ Qu.-Fussen.

$$x^2-16x = 960$$

$$x^2-16x+(8)^2 = 960+64 = 1024$$

$$x-8 = \pm 32$$

$$x = 40 \text{ oder } = -24$$

$x = 40$ Fuss = Länge des Rechtecks,

$x-16 = 24$ „ = Breite des Rechtecks.

Anmerkung. Diese Aufgabe lässt sich mit Hülfe zweier Unbekannten auf rein quadratischem Wege lösen, nämlich:

$$x = \text{Länge des Rechtecks in Fussen,}$$
$$y = \text{Breite ,, ,, ,, ,,}$$

I. $x - y = 16$

II. $xy = 960$

III. $x^2 - 2xy + y^2 = 256$ (aus I.)

IV. $4xy = 3840$ (aus II.)

$x^2 + 2xy + y^2 = 4096$ (aus III. und IV.)

V. $x + y = \pm 64$

VI. $x = 40$ oder $= -24$ (aus I. und V.)

VII. $y = 24$ oder $= -40$ (aus I. und V.)

Nr. 4. Auf die Frage, wie alt er sei, antwortete Jemand: Wenn man zu der Qu.-Wurzel meines Alters die Hälfte desselben addirt, und von der Summe 12 abzieht, so bleibt Nichts übrig. Wie alt ist er?

Auflösung. $x =$ gesuchtes Alter in Jahren.

$$\sqrt{x} + \tfrac{1}{2}x - 12 = 0 \text{ (aus den gegebenen Bedingungen)}$$
$$\tfrac{1}{2}x + \sqrt{x} = 12$$
$$x + 2\sqrt{x} = 24$$
$$x + 2\sqrt{x} + 1 = 25$$
$$\sqrt{x} + 1 = \pm 5$$
$$\sqrt{x} = 4 \text{ oder } = -6$$
$$x = 16 \text{ Jahre.}$$

Anmerkung. Der Werth $\sqrt{x} = -6$, aus welchem $x = 36$ folgt, entspricht zwar der Gleichung, aber nicht der Aufgabe in ihrer Stellung.

Nr. 5. Es kauft Jemand zwei Fässchen Bier zusammen um 5 fl. 48 krz. Das eine Fässchen hält 10 Maass mehr als das andere, und der Preis jeder Maass ist 2 krz. weniger als der dritte Theil der Anzahl Maasse im kleinen Fässchen beträgt. Wie viel Maass hält jedes Fässchen und was kostet die Maass?

Auflösung. $x =$ Inhalt des ersten Fässchens in Maass,

$$x + 10 = \text{Inhalt des zweiten Fässchens in Maass,}$$
$$2x + 10 = \text{Inhalt beider Fässchen zusammen,}$$
$$\tfrac{1}{3}x - 2 = \text{Preis einer Maass in krz.,}$$
$$(\tfrac{1}{3}x - 2) \cdot (2x + 10) = \text{Preis des gesammten Bieres in krz.}$$

$$\frac{2x^2}{3} - 4x + \frac{10x}{3} - 20 = 348$$

$$\frac{2x^2}{3} - \frac{2x}{3} = 368$$

$$x^2 - x = 552$$

$$x^2 - x + (\tfrac{1}{2})^2 = 552 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{2209}{4}$$

$$x - \tfrac{1}{2} = \pm \tfrac{47}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 47}{2}$$

$$= 24 \text{ oder } = -23$$

$x = 24$ Maass = Inhalt des ersten Fässchens.
$x + 10 = 34$ „ = „ „ zweiten „

Nr. 6. Von zwei Orten, welche 80 Meilen von einander entfernt sind, reisen zwei Personen, *A* und *B*, einander entgegen. *A* macht täglich 2 Meilen mehr als *B*, und die Zahl der Tage, welche sie sich auf der Reise befinden, bis sie zusammentreffen, ist doppelt so gross als die Zahl der Meilen, welche *B* täglich zurücklegt. Wie lange sind beide auf der Reise, wie viele Meilen macht jeder täglich, und wie viele im Ganzen?

Auflösung. $x+2$ = Anz. Meilen, die *A* täglich macht,
x = „ „ „ *B* „ „
$2x$ = „ Tage, die *A* und *B* unterw. sind,
$2x(x+2)$ = „ Meilen, die *A* im Ganzen macht,
$x.2x = 2x^2$ = „ „ „ *B* „ „ „
$2x(x+2)+2x^2$ = Entfernung beider Orte in Meilen.

$$2x^2 + 4x + 2x^2 = 80$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 80 + 1 = 81$$

$$2x + 1 = \pm 9$$

$$2x = 8 \text{ oder } = -10$$

$$x = 4 \text{ oder } = -5$$

$x = 4$ Meilen, die *B* täglich macht,
$x+2 = 6$ „ „ *A* „ „
$2x^2 = 32$ „ „ *B* im Ganzen macht.
$2x(x+2) = 48$ „ „ *A* „ „ „

Nr. 7. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypothenuse grösser als die eine Kathete um 6 Fuss und grösser als die andere um 3 Fuss. Wie lang sind die drei Seiten?

Auflösung. x = Länge der Hypothenuse in Fussen,
$x-6$ = „ „ einen Kathete „ „
$x-3$ = „ „ andern „ „ „
x^2 = Quadrat der Hypothenuse,
$(x-6)^2+(x-3)^2$ = Summe der Quadrate d. beiden Katheten.

$$x^2-12x+36+x^2-6x+9 = x^2$$
$$x^2-18x = -45$$
$$x^2-18x+(9)^2 = 81-45 = 36$$
$$x-9 = \pm 6$$
$$x = 15 \text{ oder } = 3$$

x = 15 Fuss = Länge der Hypothenuse,
$x-6$ = 9 „ = „ „ einen Kathete.
$x-3$ = 12 „ = „ „ andern „

Nr. 8. In einem Geldbeutel befinden sich zusammen 40 Stück von zweierlei Münzen; jedes Stück der grössern ist so viel Kreuzer werth, als Stücke der kleinern vorhanden sind, und ebenso jedes Stück der kleinern Münze so viel Kreuzer als Stücke der grössern in dem Geldbeutel sich befinden. Der Werth aller Münzen beträgt 10 fl. Wie viel Stück von jeder Sorte befinden sich in dem Beutel?

Auflösung. x = Anzahl grosser Münzen,
und = Werth einer kleinen Münze in krz.,
$40-x$ = Anzahl kleiner Münzen,
und = Werth einer grossen Münze in krz.,
$x(40-x)$ = Werth einer jeden Münzgattung in krz.

$$2x(40-x) = 600$$
$$40x-x^2 = 300$$
$$x^2-40x+(20)^2 = 400-300 = 100$$
$$x-20 = \pm 10$$
$$x = 30 \text{ oder } = 10 \text{ grosse Münzen,}$$
$$40-x = 10 \text{ oder } = 30 \text{ kleine Münzen.}$$

Anmerkung. Auch diese Aufgabe lässt sich mit Hülfe zweier Unbekannten auf rein quadratischem Wege lösen:

x = Anzahl grosser Münzen,
und = Werth einer kleinen Münze in krz.,
y = Anzahl kleiner Münzen,
und = Werth einer grossen Münze in krz.

I. $x+y = 40$

xy = Werth jeder Münzgattung in krz.

II. $2xy = 600$

wonach das Weitere auf die schon öfters gezeigte Art (siehe z. B. Nr. 3) von selbst folgt.

Nr. 9. Ein Landwirth erhielt 144 fl. für eine gewisse Quantität Weizen, und dieselbe Summe für eine um 16 Scheffel grössere Quantität Gerste, da der Preis eines Scheffels Gerste um $1\frac{1}{2}$ fl. niedriger stand als der Preis eines Scheffels Weizen. Wie viel Scheffel von jeder Fruchtgattung verkaufte er und wie theuer jede Sorte?

Auflösung. x = Anzahl Scheffel Weizen,

$x+16$ = „ „ Gerste,

$\frac{144}{x}$ = Preis eines Schfls. Weizen in fl.

$\frac{144}{x+16}$ = „ „ „ Gerste „ „

$\frac{144}{x} - \frac{144}{x+16}$ = Anz. Gulden, um welche ein Schfl. Gerste niedriger im Preis stand als ein Schfl. Weizen.

$$\frac{144}{x} - \frac{144}{x+16} = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{96}{x} - \frac{96}{x+16} = 1$$

$$96x + 1536 - 96x = x^2 + 16x$$

$$x^2 + 16x + (8)^2 = 1536 + 64 = 1600$$

$$x + 8 = \pm 40$$

$x = 32$ Scheffel Weizen,

$x + 16 = 48$ „ Gerste,

$\frac{144}{x} = 4\frac{1}{2}$ fl. = Preis eines Schfls. Weizen,

$\frac{144}{x+16} = 3$ „ = „ „ „ Gerste.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Preis eines Schfls. Weizen in fl.,

$y - 1\frac{1}{2}$ = „ „ „ Gerste „ „

$\frac{144}{y}$ = Anzahl gekaufter Schfl. Weizen,

$\frac{144}{y-1\frac{1}{2}} = \frac{288}{2y-3}$ = „ „ „ Gerste,

$\frac{288}{2y-3} - \frac{144}{y}$ = Anzahl Schfl., um welche mehr Gerste als Weizen gekauft wurden.

$$\frac{288}{2y-3}-\frac{144}{y} = 16$$

$$y^2-\tfrac{3}{2}y = \tfrac{27}{2}$$

$$y = \frac{3\pm15}{4}$$

$y = 4\tfrac{1}{2}$ fl. = Preis eines Schfls. Weizen,

$y-1\tfrac{1}{2} = 3$ „ = „ „ „ Gerste,

$\frac{144}{y} = 32$ Schfl. Weizen,

$\frac{144}{y-1\tfrac{1}{2}} = 48$ Schfl. Gerste.

Ebenso könnte man den Preis eines Scheffels Gerste oder die Anzahl Scheffel Gerste als Haupt-Unbekannte ansehen.

Nr. 10. Zwei Boten wurden zu gleicher Zeit nach dem 90 Meilen entfernten Orte *B* geschickt. Da der erste Bote täglich eine Meile mehr zurücklegte als der zweite, so kam er einen Tag früher in *B* an als der letztere. Wie viel Meilen legte jeder Bote täglich zurück?

Auflösung. x = Anz. Meil., die der erste Bote tägl. macht,

$x-1$ = „ „ „ „ zweite „ „ „

$\frac{90}{x}$ = „ Tage, die der erste Bote braucht,

$\frac{90}{x-1}$ = „ „ „ „ zweite „ „

$\frac{90}{x-1}-\frac{90}{x}$ = „ „ um welche der erste Bote weniger braucht als der zweite.

$$\frac{90}{x-1}-\frac{90}{x} = 1$$

$$90x-90x+90 = x^2-x$$

$$x^2-x+(\tfrac{1}{2})^2 = 90+\tfrac{1}{4} = \tfrac{361}{4}$$

$$x-\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{19}{2}$$

$$x = \frac{1\pm19}{2}$$

$x = 10$ Meil., die der erste Bote tägl. zurücklegt.

$x-1 = 9$ „ „ „ zweite „ „ „

Anmerkung. Man könnte auch, analog wie in der vorigen Aufgabe, die Anzahl Tage, die der eine oder andere der beiden Boten braucht, als Haupt-Unbekannte annehmen. Auch lässt sich

die Aufgabe mit Hülfe zweier Unbekannten auf rein quadratischem Wege lösen.

x = Anz. Meil., die der erste Bote tägl. macht,
$x-1$ = „ „ „ „ zweite „ „ „
y = „ Tage, die der erste Bote braucht,
$y+1$ = „ „ „ „ zweite „ „
xy = ganzer Weg des ersten Boten in Meilen,
$(x-1)(y+1)$ = „ „ „ zweiten „ „ „

I. $xy = 90$

II. $(x-1)(y+1) = 90$

III. $xy+x-y-1 = 90$ (aus I.)

$x-y-1 = 0$ (aus I. und III.)

IV. $x-y = 1$

woraus nun das Weitere wie in Nr. 3 folgt (durch Verbindung von I. und IV.).

Nr. 11. Es schickt Jemand eine Anzahl Bücher, worunter 14 Foliobände und 32 Octavbände, das Uebrige aber Quartbände sind, zu einem Buchbinder, um sie binden zu lassen. Da er den Foliobänden einen besonders schönen Einband geben lässt, so kosten obige 14 Bände zusammen dreimal so viel als sämmtliche Quartbände; ein Quartband aber kostet doppelt so viel Kreuzer als die Zahl der Quartbände beträgt, und jeder Octavband den vierten Theil eines Quartbandes. Im Ganzen hat er 64 fl. 24 krz. zu bezahlen.. Wie viel waren es Quartbände und was betrugen die Kosten des Bindens für einen Band von jedem Formate?

Auflösung. x = Anzahl Quartbände,
$2x$ = Kosten d. Bind. eines Quartbandes in krz.
$\frac{1}{2}x$ = „ „ „ „ Octavbandes „ „
$x \cdot 2x = 2x^2$ = „ „ „ sämmtl. Quartbde. „ „
$3 \cdot 2x^2 = 6x^2$ = „ „ „ „ Foliobde. „ „
$32 \cdot \frac{1}{2}x = 16x$ = „ „ „ „ Octavbde. „ „
$\frac{6x^2}{14} = \frac{3x^2}{7}$ = „ „ „ eines Foliobandes „ „

$$2x^2+6x^2+16x = 3864$$
$$x^2+2x = 483$$
$$x^2+2x+1 = 483+1 = 484$$
$$x+1 = \pm 22$$
$$x = 21 \text{ oder } = -23$$

$x = 21$ Quartbände,
$2x = 42$ krz., die das Binden eines Quartbandes kostet,
$\frac{1}{2}x = 10\frac{1}{2}$ „ „ „ „ „ Octavbandes „
$\frac{3}{7}x^2 = 189$ „ $= 3$ fl. 9 krz., die das Binden eines Foliobandes kostet.

Nr. 12. Es reist Jemand 105 Meilen weit und findet, dass er zu dieser Reise 6 Tage länger gebraucht haben würde, als er wirklich gebraucht hat, wenn er täglich 2 Meilen weniger zurückgelegt hätte. Wie viele Meilen machte er täglich?

Auflösung. $x =$ wirkliche Anz. Meilen, die er tägl. macht,
$x-2 =$ vorausges. „ „ „ „ „ „
$\frac{105}{x} =$ wirkliche Anz. Tage, die er z. Reise braucht.
$\frac{105}{x-2} =$ vorausges. „ „ „ „ „ „ „

$$\frac{105}{x-2} - \frac{105}{x} = 6$$
$$\frac{35}{x-2} - \frac{35}{x} = 2$$
$$35x - 35x + 70 = 2x^2 - 4x$$
$$x^2 - 2x = 35$$
$$x^2 - 2x + 1 = 35 + 1 = 36$$
$$x - 1 = \pm 6$$
$$x = 7 \text{ oder } = -5$$

$x = 7$ Meilen, die er wirklich täglich macht.

Anmerkung. Die Bemerkung der Aufgaben Nr. 9 und 10 findet auch hier ihre Anwendung.

Nr. 13. Es kauft Jemand zwei Heerden von Schafen zusammen um $656\frac{1}{2}$ fl. Die eine Heerde enthält 5 Stücke mehr als die andere, und ein Stück jeder Heerde kostet halb so viel Gulden als die Heerde Stück enthält. Wie stark ist jede Heerde?

Auflösung. $x =$ Anzahl Schafe der ersten Heerde,
$x+5 =$ „ „ „ zweiten „
$\frac{1}{2}x =$ Preis eines Stücks der ersten Heerde in fl.,
$\frac{x+5}{2} =$ „ „ „ „ zweiten „ „ „
$x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{2} =$ Preis der ganzen ersten Heerde in fl.,

$$(x+5).\frac{x+5}{2} = \frac{(x+5)^2}{2} = \text{Preis der ganzen zweiten Heerde in fl.}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(x+5)^2}{2} = 656\tfrac{1}{2}$$

$$x^2+x^2+10x+25 = 1313$$

$$2x^2+10x = 1288$$

$$x^2+5x = 644$$

$$x^2+5x+(\tfrac{5}{2})^2 = 644+\tfrac{25}{4} = \tfrac{2601}{4}$$

$$x+\tfrac{5}{2} = \pm\tfrac{51}{2}$$

$$x = \frac{-5\pm 51}{2}$$

$$x = 23 \text{ oder } = -28$$

$x = 23$ Stücke der ersten Heerde.

$x+5 = 28$ „ „ zweiten „

Anmerkung. Diese Aufgabe lässt sich auch mit Hülfe zweier Unbekannten auf rein quadratischem Wege lösen, nämlich:

$x =$ Anzahl Schafe der ersten Heerde,

$y =$ „ „ „ zweiten „ .

I. $y-x = 5$

$\tfrac{1}{2}x =$ Preis eines Schafes der ersten Heerde in fl.

$\tfrac{1}{2}y =$ „ „ „ „ zweiten „ „ „

$x.\tfrac{1}{2}x = \frac{x^2}{2} =$ „ der ganzen ersten Heerde in fl.

$y.\tfrac{1}{2}y = \frac{y^2}{2} =$ „ „ „ zweiten „ „ „

II. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} = 656\tfrac{1}{2}$

$y^2+x^2 = 1313$ (aus II.)

III. $2y^2+2x^2 = 2626$

IV. $y^2-2xy+x^2 = 25$ (aus I.)

$y^2+2xy+x^2 = 2601$ (aus III. und IV.)

V. $y+x = \pm 51$

VI. $y = 28$ oder $= -23$ (aus I. und V.)

VII. $x = 23$ oder $= -28$ (aus I. und V.)

Nr. 14. Von zwei Zahlen ist die eine um 4 grösser als die andere, und die Summe ihrer Quadrate ist 1066. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. $x =$ erste Zahl,

$x+4 =$ zweite „

$$x^2+(x+4)^2 = 1066$$
$$x^2+x^2+8x+16 = 1066$$
$$2x^2+8x = 1050$$
$$x^2+4x = 525$$
$$x^2+4x+(2)^2 = 525+4 = 529$$
$$x+2 = \pm 23$$
$$x = 21 \text{ oder } = -25 = \text{erste Zahl,}$$
$$x+4 = 25 \text{ oder } = -21 = \text{zweite Zahl.}$$

Anmerkung. Die Bemerkung der Aufgabe Nr. 13 und das darin angedeutete Verfahren, um die Lösung der Aufgabe ohne Ergänzung des Quadrats zu bewerkstelligen, finden auch hier ihre Anwendung, wenn man die beiden gesuchten Zahlen als Unbekannte, x und y, annimmt.

Nr. 15. Wenn man zu einer Zahl 24 addirt, und aus der Summe die Quadrat-Wurzel auszieht, so erhält man 18 weniger als die ursprüngliche Zahl. Wie heisst sie?

Auflösung. x = gesuchte Zahl.

$$\sqrt{x+24} = x-18 \text{ (aus d. gegebenen Bedingungen)}$$
$$x-\sqrt{x+24} = 18$$
$$x+24-\sqrt{x+24}+(\tfrac{1}{2})^2 = 18+24+\tfrac{1}{4} = \tfrac{169}{4}$$
$$\sqrt{x+24}-\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{13}{2}$$
$$\sqrt{x+24} = \frac{1\pm 13}{2}$$
$$= 7 \text{ oder } = -6$$
$$x+24 = 49 \text{ oder } = 36$$
$$x = 25 \text{ oder } = 12.$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$$\sqrt{x+24} = x-18$$
$$x+24 = x^2-36x+324$$
$$x^2-37x = -300$$
$$x = \frac{37\pm 13}{2}$$
$$= 25 \text{ oder } = 12.$$

Nr. 16. Ein Schneider kauft ein Stück Tuch für 147 fl., schneidet davon 12 Ellen zu eigenem Gebrauche ab, und verkauft das Uebrige für 120 fl. 15 krz., wodurch er an jeder Elle 15 krz. gewinnt. Wie viel Ellen hat er gekauft, und wie theuer die Elle?

Auflösung. x = Anzahl gekaufter Ellen,

$x-12$ = „ verkaufter „

$\frac{147}{x}$ = Ankaufs-Preis einer Elle in fl.,

$\frac{120\frac{1}{4}}{x-12}$ = Verkaufs-Preis „ „ „ „

$\frac{120\frac{1}{4}}{x-12}-\frac{147}{x}$ = Gewinn an einer Elle in fl.

$$\frac{120\frac{1}{4}}{x-12}-\frac{147}{x}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{481}{x-12}-\frac{588}{x}=1$$

$$481x-588x+7056=x^2-12x$$

$$x^2+95x=7056$$

$$x^2+95x+(\tfrac{95}{2})^2=7056+\tfrac{9025}{4}=\tfrac{37249}{4}$$

$$x+\tfrac{95}{2}=\pm\tfrac{193}{2}$$

$$x=\frac{-95\pm193}{2}$$

$$=49 \text{ oder } =-144$$

$x = 49$ gekaufte Ellen,

$\frac{147}{x} = 3$ fl. = Einkaufs-Preis einer Elle.

Anmerkung. Man könnte auch, wie bereits in Nr. 9 und andern Aufgaben angedeutet wurde, den Einkaufs-Preis einer Elle oder auch ihren Verkaufs-Preis, oder endlich die Anzahl verkaufter Ellen als Haupt-Unbekannte annehmen.

Nr. 17. Ein Regiment wurde beordert, zum Wachtdienste 216 Mann abzugeben, und zwar von jeder Compagnie gleich viel Soldaten. Da jedoch 3 vollständige Compagnien des Regiments zu anderer Bestimmung abmarschirt waren, so musste von den zurückgebliebenen jede einzelne Compagnie zur Vervollständigung obiger 216 Soldaten 12 Mann weiter abgeben, als sonst nöthig gewesen wäre. Wie viel Compagnien hatte das Regiment?

Auflösung. x = ursprüngliche Anzahl Compagnien,

$x-3$ = nachherige „ „

$\frac{216}{x}$ = ursprüngl. Anzahl Mann, die jede Comp. abgab,

$$\frac{216}{x-3} = \text{nachherige Anzahl Mann, die jede Comp. abgab,}$$

$$\frac{216}{x-3} - \frac{216}{x} = \text{Anz. Mann, die jede Comp. nachträgl. abgiebt.}$$

$$\frac{216}{x-3} - \frac{216}{x} = 12$$

$$\frac{18}{x-3} - \frac{18}{x} = 1$$

$$18x - 18x + 54 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x + (\tfrac{3}{2})^2 = 54 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{225}{4}$$

$$x - \tfrac{3}{2} = \pm \tfrac{15}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 15}{2}$$

$$= 9 \text{ oder } = -6$$

$$x = 9 \text{ Compagnien, die das Regiment hatte.}$$

Anmerkung. Die Anmerkung der obigen Aufgabe gilt auch hier.

Nr. 18. Ein Geflügelhändler kauft 15 Enten und 12 wälsche Hühner um 26 fl. 15 krz. Er bekommt 4 Enten mehr um 9 fl. als er Hühner um 10 fl. erhält. Was kostete eine Ente und was ein Huhn?

Auflösung. x = Preis einer Ente in fl.,

$$\frac{9}{x} = \text{Anzahl Enten, die man um 9 fl. erhält,}$$

$$\frac{9}{x} - 4 = \text{„ Hühner, „ „ „ 10 „ „}$$

$$\frac{10}{\frac{9}{x} - 4} = \frac{10x}{9-4x} = \text{Preis eines Huhnes in fl.,}$$

$$15x = \text{„ von 15 Enten in fl.,}$$

$$12 \cdot \frac{10x}{9-4x} = \frac{120x}{9-4x} = \text{„ „ 12 Hühnern in fl.}$$

$$15x + \frac{120x}{9-4x} = 26\tfrac{1}{4} = \tfrac{105}{4}$$

$$x + \frac{8x}{9-4x} = \frac{7}{4}$$

$$36x - 16x^2 + 32x = 63 - 28x$$

$$16x^2 - 96x = -63$$

$$16x^2 - 96x + (12)^2 = 144 - 63 = 81$$

$$4x - 12 = \pm 9$$

$$4x = 21 \text{ oder } = 3$$

$$x = \tfrac{21}{4} \text{ oder } = \tfrac{3}{4}$$

$$\frac{10x}{9-4x} = -\tfrac{35}{8} \text{ oder } = \tfrac{5}{4}$$

$$\frac{10x}{9-4x} = \tfrac{5}{4} \text{ fl.} = \text{Preis eines Huhns,}$$

$$x = \tfrac{3}{4} \text{ „} = \text{ „ einer Ente.}$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$$y = \text{Preis eines Huhnes in fl.,}$$

$$\frac{10}{y} = \text{Anzahl Hühner, die man um 10 fl. erhält,}$$

$$\frac{10}{y}+4 = \text{ „ Enten, „ „ „ 9 „ „}$$

$$\frac{9}{\frac{10}{y}+4} = \frac{9y}{10+4y} = \text{Preis einer Ente in fl.,}$$

$$12y = \text{ „ von 12 Hühnern in fl.}$$

$$15 \cdot \frac{9y}{10+4y} = \frac{135y}{10+4y} = \text{ „ „ 15 Enten „ „}$$

$$12y + \frac{135y}{10+4y} = \frac{105}{4}$$

$$y^2 + \tfrac{25}{8}y = \tfrac{175}{32}$$

$$y = \frac{-25 \pm 45}{16}$$

$$y = \tfrac{5}{4} \text{ fl.} = \text{Preis eines Huhnes,}$$

$$\frac{9y}{10+4y} = \tfrac{3}{4} \text{ „} = \text{ „ einer Ente.}$$

Nr. 19. *A* und *B* legten zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen Geld zusammen, *B* 150 fl. mehr als *A*; 4 Monate später nahmen sie auch *C* in die Gesellschaft auf, welcher 500 fl. einlegte. 12 Monate nach dem Eintritte des *C* löste sich die Gesellschaft auf, nachdem sie 1590 fl. gewonnen hatte. *A* erhielt dabei an Einlage und Gewinn 880 fl. zurück. Wie viel haben *A* und *B* ursprünglich eingelegt?

Auflösung. x = Einlage des *A* in fl.,

$x+150$ = „ „ *B* „ „

$880-x$ = Gewinn des *A* von x fl. in 16 Monaten,

$\frac{880-x}{16x}$ = einmonatlicher Gewinn von einem Gulden für jeden der drei Theilnehmer,

$$16 \cdot \frac{(x+150)(880-x)}{16x} = \frac{(x+150)(880-x)}{x} = \text{Gewinn des } B$$

(ergiebt sich auch, weil sich die Gewinne bei gleichem Verhältniss und gleicher Dauer wie die Einlagen verhalten müssen);

$$12 \cdot 500 \cdot \frac{880-x}{16x} = \frac{375(880-x)}{x} = \text{Gewinn des } C \text{ von seinen 500 fl. in 12 Monaten,}$$

$$880 - x + \frac{(x+150)(880-x)}{x} + \frac{375(880-x)}{x}$$

$$= \frac{(2x+525)(880-x)}{x} = \text{Gewinn der ganzen Gesellschaft in fl.}$$

$$\frac{1760x - 2x^2 + 462000 - 525x}{x} = 1590$$

$$1235x - 2x^2 + 462000 = 1590x$$

$$2x^2 + 355x = 462000$$

$$x^2 + \tfrac{355}{2}x = 231000$$

$$x^2 + \tfrac{355}{2}x + (\tfrac{355}{4})^2 = 231000 + \tfrac{126025}{16} = \tfrac{3822025}{16}$$

$$x + \tfrac{355}{4} = \mp \tfrac{1955}{4}$$

$$x = \frac{-355 \pm 1955}{4}$$

$$= 400 \text{ oder } = -\tfrac{1155}{2}$$

$$x = 400 \text{ fl.} = \text{Einlage des } A,$$

$$x+150 = 550 \text{ „} = \text{ „ „ } B.$$

Nr. 20. Ein rechtwinkliger Hof ist ringsum durch eine Bretterwand von überall gleicher Höhe umgeben. Die Länge des Hofes ist um 4 Fuss kleiner als die achtfache Höhe der Wand, und die Breite um 10 Fuss kleiner als die sechsfache Höhe der Wand; dagegen die Oberfläche des Hofes um 712 Qu.-Fuss grösser als die ganze Oberfläche der Wand. Wie gross ist jede Seite des Hofes und die Höhe der Wand?

Auflösung. x = Höhe der Wand in Fussen,

$8x-4$ = Länge des Hofes „ „

$6x-10$ = Breite „ „ „ „

$(8x-4)(6x-10)$ = Oberfläche des Hofes in Qu.-Fussen,

$2x(8x-4)+2x(6x-10) = 28x(x-1)$ = Oberfläche der ganzen Wand in Qu.-Fussen (da sie aus zwei Paar gleichen Rechtecken besteht, die als Höhe die Höhe der Wand, als Grundlinien die beiden Seiten des Hofes haben).

$$
\begin{aligned}
(8x-4)(6x-10)-28x(x-1) &= 712 \\
(2x-1)(6x-10)-7x(x-1) &= 178 \\
12x^2-6x-20x+10-7x^2+7x &= 178 \\
5x^2-19x &= 168 \\
x^2-\tfrac{19}{5}x &= \tfrac{168}{5} \\
x^2-\tfrac{19}{5}x+\left(\tfrac{19}{10}\right)^2 &= \tfrac{168}{5}+\tfrac{361}{100} = \tfrac{3721}{100} \\
x-\tfrac{19}{10} &= \pm\tfrac{61}{10} \\
x &= \frac{19\pm 61}{10} \\
&= 8 \text{ oder } = -\tfrac{21}{5}
\end{aligned}
$$

$x = 8$ Fuss = Höhe der Wand,
$8x-4 = 60$ „ = Länge des Hofes,
$6x-10 = 38$ „ = Breite des Hofes.

Nr. 21. Ein Schiff, welches 74 Matrosen und eine gewisse Anzahl gemeiner Seesoldaten nebst den dazu gehörigen Offizieren enthielt, nahm eine Prise. Jeder Matrose erhielt $3\frac{1}{3}$mal so viel Gulden an Prisengeld, als die Anzahl der gemeinen Seesoldaten betrug; jeder gemeine Seesoldat 30 fl. weniger, und der Antheil der Offiziere betrug 7680 fl. Hätten die Offiziere ihren Antheil unter die Matrosen und Seesoldaten getheilt, und wäre das sämmtliche Prisengeld in Folge davon unter die Matrosen und Seesoldaten zu ganz gleichen Theilen getheilt worden, so hätte jeder 5mal so viel Gulden erhalten, als die Zahl der Seesoldaten betrug. Wie viel waren es Seesoldaten und wie viel bekam jeder Matrose und jeder Seesoldat?

Auflösung. x = Anzahl Seesoldaten,
$3\frac{1}{3}x$ = wirklicher Antheil eines Matrosen in fl.,
$3\frac{1}{3}x-30$ = Antheil eines Seesoldaten in fl.,
$74 \cdot 3\frac{1}{3}x = \frac{740}{3}x$ = Antheil sämmtlicher Matrosen in fl.,
$x(3\frac{1}{3}x-30) = \frac{10}{3}x(x-9)$ = Antheil sämmtl. Seesoldaten in fl.,
$\frac{740x}{3}+\frac{10x}{3}(x-9)+7680 = \frac{10x^2+650x+23040}{3}$ = Werth der ganzen Prise in fl.,
$x+74$ = Anzahl Seesoldaten und Matrosen,
$\frac{10x^2+650x+23040}{3(x+74)}$ = vorausgesetzter Antheil eines Mannes,
aber auch $5x$ = „ „ „ „

$$\frac{10x^2+650x+23040}{3(x+74)} = 5x$$

$$\frac{2x^2+130x+4608}{3(x+74)} = x$$

$$2x^2+130x+4608 = 3x^2+222x$$

$$x^2+92x = 4608$$

$$x^2+92x+(46)^2 = 2116+4608 = 6724$$

$$x+46 = \pm 82$$

$$x = 36 \text{ oder } = -128$$

$x = 36$ Seesoldaten,

$3\frac{1}{3}x = 120$ fl. = Antheil jedes Matrosen,

$3\frac{1}{3}x - 30 = 90$ „ = Antheil jedes Seesoldaten.

Nr. 22. Es ist Jemand vier Gläubigern zusammen 1938 fl. schuldig. Der zweite Schuldposten beträgt um 6 fl. mehr, als das Dreifache der Quadrat-Wurzel aus dem doppelten ersten Schuldposten. Der dritte Schuldposten ist das Dreifache von der Summe des ersten und zweiten, und der vierte ist um 6 fl. grösser als die Quadratzahl vom dritten Theil des dritten Postens. Wie viel ist er jedem Gläubiger schuldig?

Auflösung. x = erster Schuldposten in fl.,

$3\sqrt{2x}+6$ = zweiter „ „ „

$3(x+6+3\sqrt{2x})$ = dritter „ „ „

$6+(x+6+3\sqrt{2x})^2$ = vierter „ „ „

$6+4(x+6+3\sqrt{2x})+(x+6+3\sqrt{2x})^2$ = Summe aller vier Schuldposten in fl.

$$(x+6+3\sqrt{2x})^2+4(x+6+3\sqrt{2x})+6 = 1938$$

$$(x+6+3\sqrt{2x})^2+4(x+6+3\sqrt{2x})+4 = 1938-2 = 1936$$

$$x+6+3\sqrt{2x}+2 = x+3\sqrt{2x}+8 = \pm 44$$

$$x+3\sqrt{2x} = 36 \text{ oder } = -52$$

$$2x+6\sqrt{2x} = 72 \text{ oder } = -104$$

$$2x+6\sqrt{2x}+(3)^2 = 72+9 = 81 \text{ oder } = 9-104 = -95$$

$$\sqrt{2x}+3 = \pm 9 \text{ oder } = \pm\sqrt{-95}$$

$$\sqrt{2x} = 6 \text{ oder } = -12 \text{ oder } = -3\pm\sqrt{-95}$$

$$2x = 36 \text{ oder } = 144 \text{ oder } = -86\mp 6\sqrt{-95}$$

$$x = 18 \text{ oder } = 72 \text{ oder } = -43\mp 3\sqrt{-95}$$

x = 18 fl. = erster Schuldposten,

$3\sqrt{2x}+6$ = 24 „ = zweiter „

$3(x+6+3\sqrt{2x})$ = 126 „ = dritter „

$6+(x+6+3\sqrt{2x})^2$ = 1770 „ = vierter „

Anmerkung. Der Werth $x = 72$ kann hier keine Berücksichtigung finden, da der Werth $\sqrt{2x} = -12$, aus dem er hervorgegangen, als zweiten Schuldposten — 30 bedingen würde, was gegen die Bedingungen der Aufgabe ist, indem dann nur drei Gläubiger mit Forderungen von 72, 126 und 1770 fl. und ein Schuldner mit einer Schuld von 30 fl. da wäre.

Nr. 23. Eine Arbeit wird von zwei Personen, *A* und *B*, zu einer bestimmten Zahl von Gulden in Accord genommen, und sollte in 4 Tagen fertig werden. Nachdem sie einige Zeit gearbeitet, fanden sie, dass sie in der bestimmten Zeit nicht fertig werden konnten, und nahmen daher noch eine dritte Person *C* zu Hülfe, deren Antheil an der Accordsumme gleich der Quadrat-Wurzel aus der ganzen Summe wurde, da jede einzelne Person täglich gleich viel arbeitete, also auch gleich viel verdiente. Wären *A* und *B* genöthigt gewesen, den *C* noch $1\frac{1}{8}$ Tag früher zur Beihülfe zu nehmen, so hätte *C* um $\frac{3}{8}$ mehr bekommen. Wie lange arbeitete *C* und was erhielt er an Lohn?

Auflösung. x = Antheil d. *C* an der Acc.-Summe in fl.,

x^2 = Accordsumme selbst,

$x^2 - x$ = Antheil d. *A* u. *B* an der Acc.-Summe,

$\frac{x^2-x}{2}$ = „ „ „ allein „ „ „

$$\frac{\frac{x^2-x}{2}}{4} = \frac{x^2-x}{8} = \text{täglicher Lohn eines Jeden,}$$

$$\frac{x}{\frac{x^2-x}{8}} = \frac{8}{x-1} = \text{Anzahl Arbeitstage des } C,$$

$$\frac{8}{x-1} + 1\tfrac{1}{8} = \frac{62+10x}{9(x-1)} = \text{vorausges. Anzahl Arbeitstage des } C,$$

$$x + \tfrac{3}{8}x = \tfrac{11}{8}x = \text{vorausges. Lohn des } C,$$

$$\frac{\frac{11}{8}x}{\frac{62+10x}{9(x-1)}} = \frac{63x(x-1)}{5(62+10x)} = \text{täglicher vorausges. Lohn eines Jeden,}$$

$$8 \cdot \frac{63x(x-1)}{5(62+10x)} = \frac{252x(x-1)}{5(31+5x)} = \text{vorausges. Lohn des } A \text{ und } B,$$

$$\tfrac{11}{8}x + \frac{252x(x-1)}{5(31+5x)} = \text{ganze Accord-Summe.}$$

$$\tfrac{11}{8}x + \frac{252x(x-1)}{5(31+5x)} = x^2$$

$$\frac{7}{5}+\frac{252(x-1)}{5(31+5x)} = x$$
$$217+35x+252x-252 = 155x+25x^2$$
$$25x^2-132x = -35$$
$$x^2-\tfrac{132}{25}x = -\tfrac{7}{5}$$
$$x^2-\tfrac{132}{25}x+(\tfrac{66}{25})^2 = \tfrac{4356}{625}-\tfrac{7}{5} = \tfrac{3481}{625}$$
$$x-\tfrac{66}{25} = \pm\tfrac{59}{25}$$
$$x = \frac{66\pm 59}{25}$$
$$= 5 \text{ oder } = \tfrac{7}{25}$$
$$\frac{8}{x-1} = 2 \text{ oder } = -\tfrac{100}{9}$$

C arbeitete also 2 Tage und erhielt 5 fl. Lohn.

Anmerkung. Die Nagel'sche Angabe enthält statt der Worte „um $\frac{1}{9}$ mehr“ jene „2 fl. weiter“ und dies führt auf eine Gleichung dritten Grades. Man erhält nämlich:

x = Antheil des *C* an der Accord-Summe,
x^2 = ganze Accord-Summe,
y = Anzahl Arbeitstage des *C*,
$y+8$ = ganze Anzahl Arbeitstage,
$\frac{x^2}{y+8}$ = Antheil eines Jeden an d. Acc.-Summe pro Tag,
$\frac{yx^2}{y+8}$ = Antheil des *C* an der Acc.-Summe,

I. $$\frac{yx^2}{y+8} = x$$

$y+8+1\frac{1}{9} = y+9\frac{1}{9}$ = vorausgesetzte ganze Anzahl Arbeitstage,
$y+1\frac{1}{9}$ = „ Anzahl Arbeitstage des *C*,
$\frac{x^2}{y+9\frac{1}{9}}$ = „ täglicher Lohn eines Jeden,
$\frac{(y+1\frac{1}{9})x^2}{y+9\frac{1}{9}}$ = vorausges. Anth. des *C* an d. Acc.-Summe.
aber auch $x+2$ = „ „ „ „ „ „ „

II. $$\frac{(y+1\frac{1}{9})x^2}{x+9\frac{1}{9}} = x+2.$$

Die Substituirung des Werthes $x = \frac{y+8}{y}$ aus I. in II. führt nach gehöriger Reduction auf die Gleichung:

$$9y^3+82y^2-40y = 320$$

$$9y^3+100y^2+160y = 18y^2+200y+320 \text{ (d. Add. v. } 18y^2+200y)$$
$$y(9y^2+100y+160) = 2(9y^2+100y+160)$$
$$\text{III.} \quad y = 2 \text{ Tage,}$$
$$\text{IV.} \quad x = \frac{y+8}{y} = 5 \text{ fl.}$$

Die Substituirung des Werthes $y = \frac{8}{x-1}$ aus I. in II. führt hingegen nach gehöriger Reduction auf:

V. $10x^3-20x^2-154x = -20$ und diese entweder auf

$$10x^3+30x^2-4x = 50x^2+150x-20$$
$$x(10x^2+30x-4) = 5(10x^2+30x-4)$$
$$x = 5$$

oder, wenn man Gleichung V. ordnet, auf:

$$x^3-2x^2-\tfrac{77}{5}x+2 = 0$$

und durch Multiplikation mit $x+2$ auf:

$$x^4-\tfrac{97}{5}x^2-\tfrac{144}{5}x+4 = 0$$
$$x^4-\tfrac{52}{5}x^2+\tfrac{676}{25} = 9x^2+\tfrac{144}{5}x+\tfrac{576}{25} \text{ (d. Versetzung),}$$
$$x^2-\tfrac{26}{5} = \pm(3x+\tfrac{24}{5})$$

$$x^2-\tfrac{26}{5} = 3x+\tfrac{24}{5} \qquad x^2-\tfrac{26}{5} = -3x-\tfrac{24}{5}$$
$$x^2-3x = 10 \qquad x^2+3x = \tfrac{2}{5}$$
$$x^2-3x+(\tfrac{3}{2})^2 = 10+\tfrac{9}{4} = \tfrac{49}{4}; \quad x^2+3x+(\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{2}{5}+\tfrac{9}{4} = \tfrac{53}{20}$$
$$x-\tfrac{3}{2} = \pm\tfrac{7}{2} \qquad x+\tfrac{3}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{53}{5}}$$
$$x = 5 \text{ oder } = -2, \qquad x = \frac{-3\pm\sqrt{\frac{53}{5}}}{2}$$

$$x = 5 \text{ fl.} = \text{Lohn des } C,$$
$$y = \frac{8}{x-1} = 2 \text{ Tage.}$$

Nr. 24. Es hat Jemand zwei Gefässe, von denen jedes 20 Maass hält. Aus dem ersten, mit Branntwein gefüllten Gefässe giesst er ein bestimmtes Quantum in das zweite, und füllt dann das zweite vollends mit Wasser auf. Nachher füllt er das erste Gefäss wieder auf mittelst der im zweiten enthaltenen Mischung, und findet nun, dass wenn er jetzt von der im ersten Gefäss enthaltenen Mischung $6\frac{2}{3}$ Maass in das zweite Gefäss giesst, in beiden Gefässen gleich viel von dem ursprünglichen Branntwein sich befindet. Wie viel Branntwein wurde anfangs aus dem ersten in das zweite Gefäss zugegossen?

Auflösung. x = Anzahl Maass reinen Branntw., die das erste Mal vom ersten in d. zweite Gef. gegossen w.;

und auch = Anzahl Maass Mischung, die das zweite Mal vom zweiten in das erste Gefäss gegossen wurden;

$20-x$ = Rest des reinen Branntweins im ersten Gefäss nach dem ersten Uebergiessen;

$\frac{x}{20}$ = Anzahl Maass reinen Branntweins, die in einer Maass Mischung des zweiten Gefässes enthalten sind, nachdem die in letzteres eingegossenen x Maass Branntwein mit Wasser aufgefüllt wurden;

$\frac{x}{20}\cdot x=\frac{x^2}{20}$ = Anzahl Maass reinen Branntweins, die in den x Maass Mischung enthalten sind, die das zweite Mal vom zweiten in das erste Gefäss gegossen wurden;

$x-\frac{x^2}{20}$ = Anzahl Maass reinen Branntweins, die dann im zweiten Gefäss bleiben;

$20-x+\frac{x^2}{20}$ = nunmehrige Quantität reinen Branntw. im ersten Gef.;

$\frac{20-x+\frac{x^2}{20}}{20}$ = Quantität reinen Branntweins, die sich nun in einer Maass Mischung des ersten Gefässes befindet;

$6\tfrac{2}{3}\cdot\frac{20-x+\frac{x^2}{20}}{20}=\frac{20-x+\frac{x^2}{20}}{3}$ = Quantität reinen Branntw., die sich in den $6\tfrac{2}{3}$ Maass Mischung befindet, welche zuletzt vom ersten in das zweite Gefäss gegossen wurden;

$(20-6\tfrac{2}{3})\cdot\frac{20-x+\frac{x^2}{20}}{20}=\tfrac{2}{3}\left(20-x+\frac{x^2}{20}\right)$ = Quantität reinen Branntweins, die dann im ersten Gefäss bleibt;

$x-\frac{x^2}{20}+\frac{20-x+\frac{x^2}{20}}{3}$ = Quantität reinen Branntweins, die sich dann im zweiten Gefäss befindet.

$$\tfrac{2}{3}\left(20-x+\frac{x^2}{20}\right)=x-\frac{x^2}{20}+\frac{20-x+\frac{x^2}{20}}{3}$$

$$\tfrac{1}{3}\left(20-x+\frac{x^2}{20}\right)=x-\frac{x^2}{20}$$

$$\tfrac{20}{3}=\tfrac{4}{3}\left(x-\frac{x^2}{20}\right)$$

$$5=x-\frac{x^2}{20}$$

$$x^2-20x+100=0$$

$$9y^3+100y^2+160y = 18y^2+200y+320 \text{ (d. Add. v. } 18y^2+200y)$$
$$y(9y^2+100y+160) = 2(9y^2+100y+160)$$
$$\text{III.} \qquad y = 2 \text{ Tage,}$$
$$\text{IV.} \qquad x = \frac{y+8}{y} = 5 \text{ fl.}$$

Die Substituirung des Werthes $y = \frac{8}{x-1}$ aus I. in II. führt hingegen nach gehöriger Reduction auf:

V. $10x^3-20x^2-154x = -20$ und diese entweder auf
$$10x^3+30x^2-4x = 50x^2+150x-20$$
$$x(10x^2+30x-4) = 5(10x^2+30x-4)$$
$$x = 5$$
oder, wenn man Gleichung V. ordnet, auf:
$$x^3-2x^2-\tfrac{77}{5}x+2 = 0$$
und durch Multiplikation mit $x+2$ auf:
$$x^4-\tfrac{97}{5}x^2-\tfrac{144}{5}x+4 = 0$$
$$x^4-\tfrac{52}{5}x^2+\tfrac{676}{25} = 9x^2+\tfrac{144}{5}x+\tfrac{576}{25} \text{ (d. Versetzung),}$$
$$x^2-\tfrac{26}{5} = \pm(3x+\tfrac{24}{5})$$
$$x^2-\tfrac{26}{5} = 3x+\tfrac{24}{5} \qquad x^2-\tfrac{26}{5} = -3x-\tfrac{24}{5}$$
$$x^2-3x = 10 \qquad x^2+3x = \tfrac{2}{5}$$
$$x^2-3x+(\tfrac{3}{2})^2 = 10+\tfrac{9}{4} = \tfrac{49}{4}; \quad x^2+3x+(\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{2}{5}+\tfrac{9}{4} = \tfrac{53}{20}$$
$$x-\tfrac{3}{2} = \pm\tfrac{7}{2} \qquad x+\tfrac{3}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{53}{5}}$$
$$x = 5 \text{ oder } = -2 \qquad x = \frac{-3\pm\sqrt{\frac{53}{5}}}{2}$$
$$x = 5 \text{ fl.} = \text{Lohn des } C,$$
$$y = \frac{8}{x-1} = 2 \text{ Tage.}$$

Nr. 24. Es hat Jemand zwei Gefässe, von denen jedes 20 Maass hält. Aus dem ersten, mit Branntwein gefüllten Gefässe giesst er ein bestimmtes Quantum in das zweite, und füllt dann das zweite vollends mit Wasser auf. Nachher füllt er das erste Gefäss wieder auf mittelst der im zweiten enthaltenen Mischung, und findet nun, dass wenn er jetzt von der im ersten Gefässe enthaltenen Mischung $6\frac{2}{3}$ Maass in das zweite Gefäss giesst, in beiden Gefässen gleich viel von dem ursprünglichen Branntwein sich befindet. Wie viel Branntwein wurde anfangs aus dem ersten in das zweite Gefäss zugegossen?



Auflösung. x = Anzahl Maass reinen Branntw., die das erste Mal vom ersten in d. zweite Gef. gegossen w.;

VII. $x+z = 15$

$xz(20-15) = 130$ (d. Substit. von VII. in V.)

VIII. $xz = 26$

wonach sich nun das Weitere, wie früher schon oft gezeigt wurde, aus den Gleichungen VII. und VIII. von selbst ergiebt.

Nr. 26. Man hat drei Zahlen, deren Summe 21 ist; die Summe der Quadrate von der grössten und kleinsten ist = 137 und die Differenz der Differenzen zwischen der ersten und zweiten und der zweiten und dritten ist = 3. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. x = erste Zahl,

y = zweite „

$21-x-y$ = dritte „

I. $x^2+(21-x-y)^2 = 137$

$x-y$ = Differ. der ersten u. zweiten Zahl.

$y-(21-x-y) = 2y+x-21$ = „ „ zweiten u. dritten „

II. $x-y-(2y+x-21) = 3$

$x-y-2y-x+21 = 3$ (aus II.)

$-3y = -18$

*III. $y = 6$ = zweite Zahl.

$x^2+(21-x-6)^2 = 137$ (d. Substit. von III. in I.)

$x^2+225-30x+x^2 = 137$

$2x^2-30x = -88$

$x^2-15x = -44$

$x^2-15x+(\frac{15}{2})^2 = \frac{225}{4}-44 = \frac{49}{4}$

$x-\frac{15}{2} = \pm\frac{7}{2}$

$x = \frac{15\pm 7}{2}$

*IV. $= 11$ oder $= 4$ = erste Zahl.

$21-x-y = 4$ oder $= 11$ = dritte „

Die drei Zahlen sind sohin 11, 6, 4 oder 4, 6, 11.

Anmerkung. Auch diese Aufgabe lässt sich auf rein quadratischem Wege lösen: x = erste Zahl,

z = dritte „

$21-(x+z)$ = zweite „ (mittlere).

V. $x^2+z^2 = 137$

$x-(21-x-z) = 2x+z-21$ = Differ. der ersten u. zweiten Zahl,

$21-x-z-z = 21-x-2z$ = „ „ zweiten u. dritten „

VI. $2x+z-21-(21-x-2z) = 3$

$$3x+3z-42 = 3 \text{ (aus VI.)}$$

VII. $$x+z = 15$$

VIII. $$x^2+2xz+z^2 = 225$$

IX. $$2x^2+2z^2 = 274 \text{ (aus V.)}$$

$$x^2-2xz+z^2 = 49 \text{ (aus VIII. und IX.)}$$

X. $$x-z = \pm 7$$

wonach nun aus VII. und X. das Weitere von selbst folgt.

Nr. 27. Wenn man eine zweiziffrige Zahl mit der Summe ihrer Ziffern dividirt, so erhält man einen Quotienten, welcher um 2 grösser ist, als die in der Stelle der Zehner befindliche Ziffer. Kehrt man die Ordnung der Ziffern um und dividirt in die neue Zahl mit einem Divisor, welcher um 1 grösser ist als der vorige Divisor, so ist auch der dadurch erhaltene Quotient um 2 grösser als der vorige. Wie heisst die Zahl?

Auflösung. x = Ziffer in der Stelle der Zehner,
y = „ „ „ „ „ Einer,
$10x+y$ = gesuchte Zahl,
$x+y$ = Summe der Ziffern.

I. $$\frac{10x+y}{x+y} = x+2$$

$10y+x$ = Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge.

II. $$\frac{10y+x}{x+y+1} = x+2+2 = x+4$$

$$10x+y = x^2+xy+2x+2y \text{ (aus I.)}$$

III. $$8x-y = x^2+xy$$

$$10y+x = x^2+xy+4x+4y+x+4 \text{ (aus II.)}$$

IV. $$6y-4x-4 = x^2+xy$$

$$8x-y = 6y-4x-4 \text{ (aus III. und IV.)}$$

$$12x+4 = 7y$$

V. $$y = \frac{12x+4}{7}$$

$$8x-\frac{12x+4}{7} = x^2+\frac{12x^2+4x}{7} \text{ (d. Substit. v. V. in III.)}$$

$$56x-12x-4 = 7x^2+12x^2+4x$$

$$19x^2-40x = -4$$

$$x^2-\tfrac{40}{19}x = -\tfrac{4}{19}$$

$$x^2-\tfrac{40}{19}x+(\tfrac{20}{19})^2 = \tfrac{400}{361}-\tfrac{4}{19} = \tfrac{324}{361}$$

$$x-\tfrac{20}{19} = \pm\tfrac{18}{19}$$

$$x = \frac{20 \pm 18}{19}$$

$$= 2 \text{ oder } = \tfrac{2}{19}$$

* VI. $\quad x = 2$

* VII. $\quad y = 4$ (d. Substit. von VI. in V.)

$$10x + y = 24 = \text{gesuchte Zahl.}$$

Nr. 28. *A* und *B* gewannen mit einander 100 fl. *A* hatte dazu ein Capital beigetragen, dessen Hälfte um 100 fl. kleiner war als das Capital von *B*, und von dem Gewinn so viel erhalten als $\frac{3}{20}$ des Capitals von *B* betragen. Was hat jeder eingelegt und gewonnen?

Auflösung. $\quad x =$ Einlage des *A* in fl.,

$$\frac{x}{2} + 100 = \text{„ „ } B \text{ „ „}$$

$$\tfrac{3}{20}\left(\frac{x}{2} + 100\right) = \text{ganzer Gewinn des } A,$$

$$\frac{\tfrac{3}{20}\left(\tfrac{x}{2} + 100\right)}{x} = \frac{3}{20x}\left(\frac{x}{2} + 100\right) = \text{Gewinn des } A \text{ von 1 fl. Capital,}$$

$$\frac{3}{20x}\left(\frac{x}{2} + 100\right) \cdot \left(\frac{x}{2} + 100\right) = \frac{3}{20x}\left(\frac{x}{2} + 100\right)^2 = \text{Gewinn des } B.$$

$$\tfrac{3}{20}\left(\frac{x}{2} + 100\right) + \frac{3}{20x}\left(\frac{x}{2} + 100\right)^2 = 100$$

$$x\left(\frac{x}{2} + 100\right) + \left(\frac{x}{2} + 100\right)^2 = \frac{2000x}{3}$$

$$\frac{x^2}{2} + 100x + \frac{x^2}{4} + 100x + 10000 = \frac{2000x}{3}$$

$$\frac{3x^2}{4} - \frac{1400x}{3} = -10000$$

$$x^2 - \frac{5600x}{9} = -\frac{40000}{3}$$

$$x^2 - \frac{5600x}{9} + \left(\frac{2800}{9}\right)^2 = \frac{7840000}{81} - \frac{40000}{3} = \frac{6760000}{81}$$

$$x - \frac{2800}{9} = \pm \frac{2600}{9}$$

$$x = \frac{2800 \pm 2600}{9}$$

$$x = 600 \text{ oder } = 22\tfrac{2}{9} \text{ fl.} = \text{Einlage des } A,$$

$$\frac{x}{2} + 100 = 400 \text{ oder } = 111\tfrac{1}{9} \text{ „} = \text{ „ „ } B,$$

$$\tfrac{3}{20}\left(\frac{x}{2}+100\right) = 60 \text{ oder } = 16\tfrac{2}{3} \text{ fl.} = \text{Gewinn des } A,$$

$$\frac{3}{20x}\left(\frac{x}{2}+100\right)^2 = 40 \text{ oder } = 83\tfrac{1}{3} \text{ „ } = \text{ „ „ } B.$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$$y = \text{Gewinn des } A \text{ in fl.},$$

$$100-y = \text{ „ „ } B \text{ „ „}$$

$$\tfrac{20}{3}y = \text{Capital des } B \text{ „ „}$$

$$\tfrac{20}{3}y-100 = \text{Hälfte des Capitals von } A,$$

$$\tfrac{40}{3}y-200 = \text{Capital des } A,$$

$$\frac{y}{\frac{40}{3}y-200} = \text{Gewinn des } A \text{ von einem Gulden.}$$

$$\frac{100-y}{\frac{20}{3}y} = \text{ „ „ } B \text{ „ „ „}$$

$$\frac{y}{\frac{40}{3}y-200} = \frac{100-y}{\frac{20}{3}y}$$

$$y^2-\tfrac{230}{3}y = -1000$$

$$y = \frac{115 \pm 65}{3}$$

$$= 60 \text{ oder } = 16\tfrac{2}{3} \text{ fl.} = \text{Gewinn des } A,$$

$$100-y = 40 \text{ oder } = 83\tfrac{1}{3} \text{ „ } = \text{ „ „ } B,$$

$$\tfrac{40}{3}y-200 = 600 \text{ oder } = 22\tfrac{2}{9} \text{ „ } = \text{Capital des } A,$$

$$\tfrac{20}{3}y = 400 \text{ oder } = 111\tfrac{1}{9} \text{ „ } = \text{ „ „ } B.$$

Ebenso könnte man als Haupt-Unbekannte das Capital oder den Gewinn des *B* annehmen.

Nr. 29. *A*, *B* und *C* waren drei Baumeister. *A* und *B* bauten zusammen 4 Waarenhäuser mit flachen Dächern, und zwar jeder ein breiteres und ein schmäleres; die Breite des ersten war bei beiden gleich gross und ebenso auch die Breite des zweiten. *A* baute sowohl sein breiteres als sein schmäleres Haus ebenso lang und hoch als jedes breit war; *B* aber baute sein breiteres so hoch und lang als die Breite des schmälern betrug; dagegen machte er die Länge und Höhe seines schmälern gleich der Breite des breitern. Die beiden Waarenhäuser des *A* hatten zusammen 73728 Kubikfuss mehr Inhalt als die von *B* gebauten. Ein fünftes, von *C* gebautes Waarenhaus hatte zur Grundfläche ein Quadrat, das gleich dem Unterschiede der Grundflächen von beiden, durch *A* gebauten Waarenhäuser war. Würde es statt dieser

Grundfläche eine Fläche von 2688 Quadrat-Fuss erhalten haben, so wäre die Grundfläche grösser geworden als sie wirklich ist, um 8mal so viel Quadrat-Fuss, als die Seite der Grundfläche in Wirklichkeit Fuss beträgt. Wie gross war die Breite der 5 Waarenhäuser?

Auflösung.

x = Breite der beiden von A u. B gebauten breiten Häuser,
und = Länge und Höhe des breitern von A gebauten Hauses,
und = „ „ „ „ schmälern „ B „ „
y = Breite d. beiden von A u. B gebauten schmälern Häuser,
und = Länge u. Höhe des schmälern von A gebauten Hauses,
und = „ „ „ „ breitern „ B „ „
x^3 = Kubikinhalt des breitern Hauses des A,
y^3 = „ „ schmälern „ „ „
x^2y = „ „ „ „ „ B,
xy^2 = „ „ breitern „ „ „

I. $x^3+y^3-x^2y-xy^2 = 73728$

x^2-y^2 = Differenz der Grundflächen der beiden Häuser des A,
und = Grundfläche des Hauses des C,
$\sqrt{x^2-y^2}$ = Seite dieser Grundfläche.

II. $2688-(x^2-y^2) = 8\sqrt{x^2-y^2}$

$$x^2-y^2+8\sqrt{x^2-y^2} = 2688 \quad \text{(aus II.)}$$
$$x^2-y^2+8\sqrt{x^2-y^2}+(4)^2 = 2688+16 = 2704$$
$$\sqrt{x^2-y^2}+4 = \pm 52$$
$$\sqrt{x^2-y^2} = 48 \text{ oder } = -56$$

*III. $\sqrt{x^2-y^2} = 48$ Fuss = Breite des von C gebauten Hauses,

IV. $x^2-y^2 = 2304$

V. $x-y = 32$ (aus I. u. IV. durch Divis.)

VI. $x+y = 72$ (aus IV. u. V.)

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 104 \\ 2y &= 40 \end{aligned}\right\} \text{(aus V. und VI.)}$$

*VII. $x = 52$ Fuss = Breite der von A u. B geb. breitern Häuser.

*VIII. $y = 20$ „ = „ „ „ „ „ „ „ schmälern „

Nr. 30. Drei Bauern, A, B, C, haben für ihre Aecker Steuern zu zahlen, und zwar für jeden Morgen 1 fl. Die Morgenzahl des A verhält sich zu der des B wie 3 : 7 und wenn man die Summe der Morgen von allen drei Bauern durch das Produkt der Morgenzahl des A und C dividirt, so ist der Quotient = $\frac{1}{4}$. Endlich ist

die von *A* und *C* zusammen zu bezahlende Summe um **36 fl. kleiner** als das Dreifache der von *C* zu bezahlenden, **vermehrt um** $\frac{2}{7}$ dessen, was *B* bezahlen muss. Wie viel Morgen hat **jeder Bauer?**

Auflösung. $3x$ = Anzahl Morgen des *A*,
und = „ Gulden Steuern, die er zahlt,
$7x$ = „ Morgen des *B*,
und = „ Gulden Steuern, die er zahlt,
y = „ Morgen des *C*,
und = „ Gulden Steuern, die er zahlt,
$10x+y$ = „ Morgen aller drei Bauern,
$3xy$ = Produkt der Anzahl Morgen von *A* u. *C*,

I. $$\frac{10x+y}{3xy} = \frac{1}{4}$$

$3x+y$ = Steuersumme, die *A* und *C* zahlen,
$2x$ = $\frac{2}{7}$ der von *B* bezahlten Summe,
$3y+2x-36$ = Steuersumme, die *A* und *C* zahlen.

II. $$3x+y = 3y+2x-36$$

III. $$x = 2y-36 \text{ (aus II.)}$$

$$\frac{20y-360+y}{3y(2y-36)} = \frac{1}{4} \text{ (aus III. in I.)}$$

$$\frac{7y-120}{y(y-18)} = \frac{1}{2}$$

$$14y-240 = y^2-18y$$

$$y^2-32y = -240$$

$$y^2-32y+(16)^2 = 256-240 = 16$$

$$y-16 = \pm 4$$

*IV. $$y = 20 \text{ oder } = 12$$

*V. $$x = 4 \text{ oder } = -12 \text{ (d. Substit. von IV. in III.)}$$

$3x$ = 12 Morgen des *A*,
$7x$ = 28 „ „ *B*,
y = 20 „ „ *C*.

Anmerkung. Sucht man aus III. einen Werth für y, so ist $y = \frac{1}{2}x+18$ und seine Substitution in I. giebt:

$$x^2+8x = 48$$

$$x = 4 \text{ oder } = -12$$

$$y = \frac{1}{2}x+18 = 20.$$

Nr. 31. Ein Metzger kauft eine Anzahl von jungen **Rindern** und Schafen, und giebt für jedes Rind so viele **Gulden als er**

Schafe kauft, und für jedes Schaf $\frac{1}{4}$ dieses Preises. Hätte er für jedes Rind 4 fl. und für jedes Schaf 2 fl. mehr bezahlt, so hätte seine ganze Auslage 140 fl. mehr betragen. Und hätte endlich jedes Schaf ebensoviel gekostet als ein Rind, so hätte die ganze Ausgabe 1128 fl. betragen. Wie viel Stücke kaufte er von jeder Thiergattung und wie theuer jedes Stück?

Auflösung. x = Anzahl gekaufter Schafe,
und = Preis eines Rindes in fl.,
und = Preis eines Schafes bei der zweiten Voraussetzung der Aufgabe,
$\frac{1}{4}x$ = Preis eines Schafes in fl.,
$\frac{1128}{x}$ = Anzahl Schafe u. Rinder, die gek. wurden, zufolge d. zweiten Voraussetz. der Aufgabe,
$\frac{1128}{x} - x$ = Anzahl gekaufter Rinder,
$4\left(\frac{1128}{x} - x\right)$ = Mehrausgabe f. d. Rinder } bei der ersten Voraussetzung der Aufgabe.
$2x$ = „ „ „ Schafe }

$$4\left(\frac{1128}{x} - x\right) + 2x = 140$$

$$2\left(\frac{1128}{x} - x\right) + x = 70$$

$$2256 - 2x^2 + x^2 = 70x$$

$$x^2 + 70x = 2256$$

$$x^2 + 70x + (35)^2 = 2256 + 1225 = 3481$$

$$x + 35 = \pm 59$$

$$x = 24 \text{ oder } = -94$$

$x = 24$ gekaufte Schafe,
$\frac{1128}{x} - x = 23$ „ Rinder,
$x = 24$ fl. = Preis eines Rindes,
$\frac{1}{4}x = 6$ fl. = „ „ Schafes.

Anmerkung. Behält man die Bedeutung von x und $\frac{1}{4}x$ aus obiger Auflösung bei, und setzt man ferner:

y = Anzahl gekaufter Rinder, so ist
$4y$ = Mehrausgabe für die Rinder } bei der ersten
$2x$ = „ „ „ Schafe } Voraussetzung.

I. $4y + 2x = 140$

II. $x(x + y) = 1128$

$$2y + x = 70 \text{ (aus I.)}$$

III. $$x = 70 - 2y$$

$$(70 - 2y)(70 - y) = 1128 \text{ (d. Substit. von III. in II.)}$$

$$y^2 - 105y = -1886$$

$$y = \frac{105 \pm 59}{2}$$

IV. $$= 82 \text{ oder } = 23$$

V. $$x = -94 \text{ oder } = 24 \text{ (d. Substit. von IV. in III.)}$$

$x = 24$ Schafe, die gekauft wurden,
$y = 23$ Rinder, „ „ „
$x = 24$ fl. = Preis eines Rindes,
$\frac{1}{4}x = 6$ „ = „ „ Schafes.

Nr. 32. Ein Landwirth hat 1000 fl., wofür er Ochsen und Schafe kaufen will. Da der Preis eines Ochsen dreimal so gross ist, so ist er Willens für obige Summe doppelt so viel Schafe als Ochsen zu kaufen. Indessen schlägt jeder Ochse um 10 fl., und jedes Schaf um 3 fl. 20 krz. ab, wodurch er in den Stand gesetzt ist, dreimal so viel Schafe als Ochsen, und im Ganzen 10 Stück Vieh mehr als vorher zu kaufen. Wie viel Schafe und Ochsen kaufte er, und wie theuer ein Stück?

Auflösung. x = ursprüngl. Preis eines Schafes in fl.,

$3x$ = „ „ „ Ochsen „ „

$3x + 2x = 5x$ = „ „ von einem Ochsen und zwei Schafen,

$\frac{1000}{5x} = \frac{200}{x}$ = Anz. Ochs., die er anfangs kauf. wollte,

und = halbe Anzahl Schafe, die er anfangs kaufen wollte,

$\frac{400}{x}$ = Anz. Schafe, die er anfangs kaufen w.,

$\frac{200}{x} + \frac{400}{x} + 10 = \frac{600}{x} + 10$ = Zahl der im zweiten Fall wirklich gekauften Stück Vieh,

$\frac{1}{4}\left(\frac{600}{x} + 10\right) = \frac{150}{x} + \frac{5}{2}$ = Anzahl der wirklich gekauften Ochsen,

$\frac{3}{4}\left(\frac{600}{x} + 10\right) = \frac{450}{x} + \frac{15}{2}$ = „ „ „ „ Schafe,

$3x - 10$ = Preis ein. Ochsen beim wirkl. Ankauf,

$x - 3\frac{1}{3} = \frac{3x - 10}{3}$ = „ „ Schafes „ „ „

$$(3x-10)\cdot\left(\frac{150}{x}+\frac{5}{2}\right) = \text{Preis der Ochsen beim wirkl. Ankauf,}$$

$$\frac{3x-10}{3}\left(\frac{450}{x}+\frac{15}{2}\right) = (3x-10)\left(\frac{150}{x}+\frac{5}{2}\right) = \text{Preis der Schafe beim wirkl. Ankauf.}$$

$$2(3x-10)\cdot\left(\frac{150}{x}+\frac{5}{2}\right) = 1000$$

$$(3x-10)\cdot\left(\frac{30}{x}+\frac{1}{2}\right) = 100$$

$$90-\frac{300}{x}+\frac{3x}{2}-5 = 100$$

$$\frac{3x}{2}-\frac{300}{x} = 15$$

$$\frac{x}{2}-\frac{100}{x} = 5$$

$$x^2-200 = 10x$$

$$x^2-10x = 200$$

$$x^2-10x+(5)^2 = 200+25 = 225$$

$$x-5 = \pm 15$$

$$x = 20 \text{ oder } = -10$$

$$\frac{150}{x}+\frac{5}{2} = 10 \text{ wirklich gekaufte Ochsen,}$$

$$3\left(\frac{150}{x}+\frac{5}{2}\right) = 30 \text{ „ „ Schafe,}$$

$$3x-10 = 50 \text{ fl.} = \text{wirklicher Preis eines Ochsen,}$$

$$\frac{3x-10}{3} = 16\tfrac{2}{3} \text{ fl.} = \text{ „ „ „ Schafes.}$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$$y = \text{wirklicher Preis eines Schafes in fl.,}$$

$$y+3\tfrac{1}{3} = \text{früherer „ „ „ „ „}$$

$$3y+10 = \text{ „ „ „ Ochsen „ „}$$

$$3y+10-10=3y = \text{wirklicher „ „ „ „ „}$$

$$3y+3y = 6y = \text{wirklicher Preis eines Ochsen und dreier Schafe,}$$

$$\frac{1000}{6y} = \frac{500}{3y} = \text{Anzahl wirklich gekaufter Ochsen,}$$

$$3\cdot\frac{500}{3y} = \frac{500}{y} = \text{Anzahl wirklich gekaufter Schafe,}$$

$$\frac{500}{3y}+\frac{500}{y}-10 = \frac{2000}{3y}-10 = \text{Anzahl Stück Vieh, die man früher kaufen wollte,}$$

$$\frac{2000}{9y}-\frac{10}{3} = \text{Anzahl Ochsen, die man früher kaufen wollte,}$$

$$2\left(\frac{2000}{9y}-\frac{10}{3}\right)=\frac{4000}{9y}-\frac{20}{3} = \text{Anzahl Schafe, die man früher kaufen wollte,}$$

$$(3y+10).\left(\frac{2000}{9y}-\frac{10}{3}\right) = \text{früh. Preis der zu kauf. Ochsen,}$$

$$(y+3\tfrac{1}{3}).\left(\frac{4000}{9y}-\frac{20}{3}\right) = \text{,, ,, ,, ,, ,, Schafe,}$$

$$\tfrac{5}{3}(3y+10).\left(\frac{2000}{9y}-\frac{10}{3}\right) = \text{Preis des früher zu kauf. Viehes.}$$

$$\tfrac{5}{3}(3y+10).\left(\frac{2000}{9y}-\frac{10}{3}\right) = 1000$$

$$9y^2-30y = 2000$$

$$3y = 5 \pm 45$$

$$= 50 \text{ fl.} = \text{Preis eines Ochsen,}$$

$$y = \tfrac{50}{3} \text{ ,, } = \text{ ,, ,, Schafes,}$$

$$\frac{500}{3y} = 10 \text{ wirklich gekaufte Ochsen,}$$

$$\frac{500}{y} = 30 \text{ ,, ,, Schafe.}$$

Nr. 33. Zwei Personen, A und B, vergleichen ihren täglichen Verdienst und finden, dass, wenn A zu seinem wirklichen Verdienste täglich noch den vierten Theil dessen erhielte, was B in 7 Tagen einnimmt, er in einer Zahl von Tagen, welche den von B täglich eingenommenen Gulden gleich ist, 48 fl. einnehmen würde, und dass B, wenn er täglich 2 fl. mehr verdienen würde als A wirklich verdient, in einer Zahl von Tagen, welche halb so gross ist als die Zahl von Gulden, die er selbst in 7 Tagen verdient, 98 fl. einnähme. Wie viel verdient jeder täglich?

Auflösung. x = wirklicher täglicher Verdienst des A in fl.,

y = ,, ,, ,, ,, B ,, ,,

und = Anzahl Arbeitstage des A bei der ersten Voraussetzung der Aufgabe,

$7y$ = 7tägiger Arbeitslohn des B,

$x+\tfrac{7}{4}y$ = vorausgesetzter täglicher Lohn des A.

I. $y(x+\tfrac{7}{4}y) = 48$

$x+2$ = vorausgesetzter täglicher Lohn des B,

$\tfrac{7}{2}y$ = vorausgesetzte Anzahl Arbeitstage des B.

II. $\frac{7}{2}y(x+2) = 98$

III. $xy+\frac{7}{4}y^2 = 48$ (aus I.)

IV. $(x+2)y = 28$ (aus II.)

V. $xy+2y = 28$

$$\frac{7}{4}y^2-2y = 20 \text{ (aus III. und V.)}$$

$$y^2-\frac{8}{7}y = \frac{80}{7}$$

$$y^2-\frac{8}{7}y+\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{80}{7}+\frac{16}{49} = \frac{576}{49}$$

$$y-\frac{4}{7} = \pm\frac{24}{7}$$

$$y = \frac{4\pm 24}{7}$$

$$= 4 \text{ oder } = -\frac{20}{7}$$

*VI. $y = 4$ fl. = täglicher Verdienst des *B*.

$$4(x+2) = 28 \text{ (d. Substit. von VI. in IV.)}$$

$$x+2 = 7$$

*VII. $x = 5$ fl. = täglicher Verdienst des *A*.

Nr. 34. Vier Städte, *A*, *B*, *C*, *D*, liegen in der Ordnung der genannten Buchstaben hinter einander. Der Unterschied zwischen der Entfernung von *A* und *B* und der Entfernung von *B* und *C* ist um 4 Meilen grösser als die Entfernung von *B* und *D*. Die Entfernung von *B* und *D* ist $\frac{2}{3}$ der Entfernung von *A* und *C*. Die Entfernung von *A* und *B* verhält sich zur Entfernung von *C* und *D* wie das Siebenfache der Entfernung von *B* und *C* zu 26. Wie weit sind die einzelnen Orte von einander entfernt?

Auflösung. x = Entfernung *AB* in Meilen,

y = „ *BC* „ „

$\frac{26x}{7y}$ = „ *CD* „ „

$x-y$ = Unterschied der Entfern. *AB* und *BC*,

$y+\frac{26x}{7y}$ = Entfernung *BD* in Meilen,

I. $$x-y-\left(y+\frac{26x}{7y}\right) = 4$$

$x+y$ = Entfernung *AC*.

II. $$y+\frac{26x}{7y} = \frac{2}{3}(x+y)$$

$$x-y = \frac{2}{3}(x+y)+4 \text{ (aus I. und II.)}$$

$$3x-3y = 2x+2y+12$$

$$x-5y = 12$$

III. $$x = 5y + 12$$

$$5y + 12 - y = y + \frac{26}{7y}(5y + 12) + 4 \text{ (d. Substit. v. III. in I.)}$$

$$3y + 8 = \frac{26}{7y}(5y + 12)$$

$$21y^2 + 56y = 130y + 312$$

$$21y^2 - 74y = 312$$

$$y^2 - \tfrac{74}{21}y = \tfrac{104}{7}$$

$$y^2 - \tfrac{74}{21}y + (\tfrac{37}{21})^2 = \tfrac{104}{7} + \tfrac{1369}{441} = \tfrac{7921}{441}$$

$$y - \tfrac{37}{21} = \pm\tfrac{89}{21}$$

$$y = \frac{37 \pm 89}{21}$$

$$= 6 \text{ oder } = -\tfrac{52}{21}$$

*IV. $y = 6$ Meilen = Entfernung BC,

*V. $x = 5y + 12 = 42$ „ = „ AB,

$\frac{26x}{7y} = 26$ „ = „ CD.

Anmerkung. Die Einsetzung von III. in II. führt auf dieselbe Gleichung für y wie jene in I. Sucht man aber y aus III., so ist:

VI. $$y = \frac{x - 12}{5}$$

$$\frac{x - 12}{5} + \frac{26x}{7 \cdot \frac{x-12}{5}} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{x - 12}{5}\right) \text{ (d. Substit. von VI. in II.)}$$

$$\frac{650x}{7x - 84} = 3x + 4$$

$$x^2 - \tfrac{874}{21}x = 16$$

$$x = \frac{437 \pm 445}{21}$$

VII. $x = 42$ Meilen = Entfernung AB,

VIII. $y = \frac{x - 12}{5} = 6$ „ = „ BC,

$\frac{26x}{7y} = 26$ „ = „ CD.

Nr. 35. Es kauft Jemand Wollentuch und Leinwand zusammen für $39\frac{1}{2}$ fl., für jede Elle Wollentuch zahlt er viermal weniger Gulden, als die Zahl der gekauften Ellen Tuch und Leinwand zusammen beträgt, und für jede Elle Leinwand viermal weniger Gulden, als der Ueberschuss der Anzahl Ellen von Tuch über die

Zahl der Ellen Leinwand beträgt. Der für das Tuch bezahlte Preis verhält sich zu dem für die Leinwand bezahlten wie 72 : 7. Wie viel Ellen kaufte er von jeder Sorte?

Auflösung. x = Anzahl Ellen Wollentuch,
y = „ „ Leinwand,

$\frac{x+y}{4}$ = Preis einer Elle Wollentuch,

$\frac{x-y}{4}$ = „ „ „ Leinwand,

$x \cdot \frac{x+y}{4}$ = Preis des gesammten Wollentuchs,

$y \cdot \frac{x-y}{4}$ = „ der „ Leinwand.

$$\text{I.} \quad x \cdot \frac{x+y}{4} + y \cdot \frac{x-y}{4} = 39\tfrac{1}{2}$$

$$\text{II.} \quad x \cdot \frac{x+y}{4} : y \cdot \frac{x-y}{4} = 72 : 7$$

$$\text{III.} \quad x(x+y) + y(x-y) = 158 \text{ (aus I.)}$$

$$x(x+y) : y(x-y) = 72 : 7 \text{ (aus II.)}$$

$$\text{IV.} \quad [x(x+y) + y(x-y)] : [x(x+y) - y(x-y)] = 79 : 65$$

$$158 : [x(x+y) - y(x-y)] = 79 : 65 \text{ (d. Substit. von III. in IV.)}$$

$$2 : [x(x+y) - y(x-y)] = 1 : 65$$

$$\text{V.} \quad x(x+y) - y(x-y) = 130$$

$$\left.\begin{aligned} 2x(x+y) &= 288 \\ 2y(x-y) &= 28 \end{aligned}\right\} \text{(aus III. und V.)}$$

$$\text{VI.} \quad x^2 + xy = 144$$

$$\text{VII.} \quad xy - y^2 = 14$$

$$\text{VIII.} \quad x^2 + y^2 = 130 \text{ (aus V. oder aus VI. u. VII.)}$$

$$xy = 144 - x^2 \text{ (aus VI.)}$$

$$\text{IX.} \quad y = \frac{144 - x^2}{x}$$

$$x^2 + \frac{20736 - 288x^2 + x^4}{x^2} = 130 \text{ (d. Substit. von IX. in VIII.)}$$

$$x^4 + 20736 - 288x^2 + x^4 = 130x^2$$

$$2x^4 - 418x^2 = -20736$$

$$x^4 - 209x^2 = -10368$$

$$x^4 - 209x^2 + \left(\tfrac{209}{2}\right)^2 = \tfrac{43681}{4} - 10368 = \tfrac{2209}{4}$$

$$x^2 - \tfrac{209}{2} = \pm \tfrac{47}{2}$$

$$x^2 = \frac{209 \pm 47}{2}$$

$$x^2 = 128 \text{ oder } = 81$$

*X. $$x = \pm 8\sqrt{2} \text{ oder } = \pm 9$$

$$x = 11{,}3136 \text{ oder } = 9 \text{ Ellen Wollentuch.}$$

$$y = \frac{144-128}{\pm 8\sqrt{2}} \text{ oder } = \frac{144-81}{\pm 9} \text{ (d. Substit. von X. in IX.)}$$

*XI. $$= \pm\sqrt{2} \text{ oder } = \pm 7$$

$$y = 1{,}4142 \text{ oder } = 7 \text{ Ellen Leinwand.}$$

Anmerkung. Sucht man aus VII. einen Werth für x, so ist:

$$xy = 14+y^2$$

XII. $$x = \frac{14+y^2}{y}$$

$$\frac{196+28y^2+y^4}{y^2}+y^2 = 130 \text{ (d. Substit. von XII. in VIII.)}$$

$$y^4-51y^2 = -98$$

$$y^2 = 49 \text{ oder } = 2$$

XIII. $$y = \pm 7 \text{ oder } = \pm\sqrt{2}$$

XIV. $$x = \pm 9 \text{ oder } = \pm 8\sqrt{2} \text{ (d. Substit. v. XIII. in XII.).}$$

Eine fernere Auflösung ist noch folgende:

$$xy(x^2-y^2) = 2016 \text{ (aus VI. u. VII. durch Mult.)}$$

XV. $$x^2-y^2 = \frac{2016}{xy}$$

XVI. $$x^2+2xy-y^2 = 158 \text{ (aus III.)}$$

$$2xy = 158-\frac{2016}{xy} \text{ (aus XV. und XVI.)}$$

$$(xy)^2-79xy = -1008$$

$$xy = 63 \text{ oder } = 16$$

XVII. $$2xy = 126 \text{ oder } = 32$$

$$x^2+2xy+y^2 = 256 \text{ oder } = 162 \text{ (aus VIII. und XVII.)}$$

XVIII. $$x+y = \pm 16 \text{ oder } = \pm 9\sqrt{2}$$

$$x^2-2xy+y^2 = 4 \text{ oder } = 98 \text{ (aus VIII. und XVII.)}$$

$$x-y = \pm 2 \text{ oder } = \pm 7\sqrt{2}$$

XX. $$x = \pm 9 \text{ oder } = \pm 8\sqrt{2} \text{ (aus VI. u. XVIII.)}$$

XXI. $$y = \pm 7 \text{ oder } = \pm\sqrt{2} \text{ (aus VII. u. XIX.).}$$

Nr. 36. Aus jedem von zwei Beuteln, in welchen sich Kugeln befinden, nahm Jemand gleich viel heraus und fand, dass das im ersten Beutel Zurückbleibende gleich sei dem Kubus des im zweiten Bleibenden, und ebenso gleich dem Quadrate des Herausgenommenen. Er entleerte hierauf den ersten Beutel noch weiter

so lange, bis in ihm nur noch das Quadrat des im zweiten Beutel Uebriggebliebenen sich befand, und goss nun das im ersten Beutel Befindliche auch noch zu dem im zweiten Beutel gebliebenen Reste. Dadurch vermehrte sich im zweiten Beutel die ursprüngliche Zahl der darin befindlichen Kugeln um $\frac{2}{3}$ derselben. Wie viel Kugeln waren ursprünglich in jedem Beutel?

Auflösung. $x =$ Anzahl herausgenomm. K. im ersten Fall,

$x^2 =$ „ K., die dann im erst. Beutel bleiben,

$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} =$ „ „ „ „ „ zweiten „ „

$x^2+x =$ ursprünglicher Inhalt des ersten Beutels,

$x^{\frac{2}{3}}+x =$ „ „ „ zweiten „

$(x^{\frac{2}{3}})^2 = x^{\frac{4}{3}} =$ Quadr. d. im zweiten Beutel geblieb. Restes,

und auch $=$ Anzahl K., die das zweite Mal vom ersten in den zweiten Beutel gegossen worden,

$x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}} =$ nachheriger Inhalt des zweiten Beutels,

aber auch $\frac{5}{3}(x^{\frac{2}{3}}+x) =$ „ „ „ „ „

$$\frac{5}{3}(x^{\frac{2}{3}}+x) = x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{5}{3}+\frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1+x^{\frac{2}{3}}$$

$$x^{\frac{2}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$x^{\frac{2}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{2}{3}+\frac{25}{36} = \frac{49}{36}$$

$$x^{\frac{1}{3}}-\frac{5}{6} = \pm\frac{7}{6}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{5\pm7}{6}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 2 \text{ oder } = -\frac{1}{3}$$

$$x = 8$$

$x^2+x = 72$ Kugeln $=$ Inhalt des ersten Beutels.

$x^{\frac{2}{3}}+x = 12$ „ $=$ „ „ zweiten „

Nr. 37. Ein Landwirth verkaufte 10 Scheffel Weizen und eine Anzahl Scheffel Gerste um $79\frac{1}{2}$ fl. Ein Scheffel Weizen kostete $1\frac{1}{2}$ fl. weniger als 2 Scheffel Gerste. Später verkaufte er 15 Scheffel Weizen und dazu noch 4 Scheffel mehr an Gerste als vorher, und löste sowohl aus dem Weizen als aus der Gerste für jeden Scheffel 1 fl. mehr als früher, wodurch sein ganzer Erlös 12 fl. weniger als das Doppelte des ersten Erlöses betrug. Wie viel Scheffel Gerste verkaufte er das erste Mal und wie theuer den Scheffel Weizen und Gerste?

Auflösung. x = Anzahl Scheffel Gerste, die das erste Mal verkauft wurden,

y = Preis ein. Schfls. Gerste beim ersten Verk.,

$2y-\frac{3}{2}$ = „ „ „ Weizen „ „ „

xy = Erlös aus der Gerste beim ersten Verk.

$10(2y-\frac{3}{2})$ = „ „ dem Weizen „ „ „

I. $xy+10(2y-\frac{3}{2}) = 79\frac{1}{2}$

$2y-\frac{3}{2}+1 = 2y-\frac{1}{2}$ = Preis eines Schfls. Weizen b. zweiten Verk.,

$y+1$ = „ „ „ Gerste „ „ „

$x+4$ = Anzahl Scheffel Gerste des zweiten Verk.,

$(x+4)(y+1)$ = Erlös aus der Gerste beim zweiten Verk.,

$15(2y-\frac{1}{2})$ = „ „ dem Weizen „ „ „

$(x+4)(y+1)+15(2y-\frac{1}{2})$ = ganzer Erlös beim zweiten Verk.

aber auch $2.79\frac{1}{2}-12 = 147$ = „ „ „ „ „

II. $(x+4)(y+1)+15(2y-\frac{1}{2}) = 147$

$xy+20y-15 = \frac{159}{2}$ (aus I.)

III. $xy+20y = \frac{189}{2}$

$xy+4y+x+4+30y-\frac{15}{2} = 147$ (aus II.)

IV. $xy+34y+x = \frac{301}{2}$

$14y+x = 56$ (aus III. und IV.)

V. $x = 56-14y$

$56y-14y^2+20y = \frac{189}{2}$ (d. Substit. von V. in III.)

$$14y^2-76y = -\frac{189}{2}$$

$$y^2-\frac{38}{7}y = -\frac{27}{4}$$

$$y^2-\frac{38}{7}y+\left(\frac{19}{7}\right)^2 = \frac{361}{49}-\frac{27}{4} = \frac{121}{196}$$

$$y-\frac{19}{7} = \pm\frac{11}{14}$$

$$y = \frac{38\pm 11}{14}$$

*VI. $y = \frac{7}{2}$ fl. oder $= \frac{27}{14}$ fl. = Preis eines Schfls. Gerste beim ersten Verkauf,

*VII: $x = 56-14y = 7$ oder $= 29$ = Anzahl Schfl. Gerste, die das erste Mal verk. wurden,

$2y-\frac{3}{2} = 5\frac{1}{2}$ fl. oder $= \frac{33}{14}$ fl. = Preis eines Schfls. Weizen beim ersten Verkauf.

Anmerkung. Aus Gleichung V. ergiebt sich auch $y = \frac{56-x}{14}$ $= 4-\frac{1}{14}x$ und daher durch Substitution in III.:

$$(x+20)(4-\tfrac{1}{14}x) = \frac{189}{2}$$

$$x^2-36x = -203$$

$$x - 18 = \pm 11$$

VIII. $x = 29$ oder $= 7$ Schfl. Gerste,

IX. $y = 4 - \frac{1}{14}x = \frac{27}{14}$ fl. od. $= 3\frac{1}{2}$ fl. = Preis 1 Schfls. Gerste,

$2y - \frac{1}{2} = \frac{47}{14}$ fl. od. $= 5\frac{1}{2}$ fl. = „ „ „ Weizen.

Nimmt man als zweite Haupt-Unbekannte statt y den ersten Verkaufs-Preis eines Scheffels Weizen, so ergiebt sich der Ansatz:

x = Anzahl Schfl. Gerste, die das erste Mal verk. wurden,

z = erster Verk.-Preis eines Schfls. Weizen in fl.,

$z + 1\frac{1}{2}$ = doppelter Verk.-Preis eines Schfls. Gerste in fl.

$\frac{z + 1\frac{1}{2}}{2}$ = Verk.-Preis eines Schfls. Gerste in fl.,

$x \cdot \frac{z + 1\frac{1}{2}}{2} = \frac{x(2z+3)}{4}$ = erster Erlös aus der Gerste,

$10z$ = „ „ „ dem Weizen.

X. $$\frac{x(2z+3)}{4} + 10z = 79\frac{1}{2}$$

$z + 1$ = zweiter Verk.-Preis eines Schfls. Weizen,

$\frac{z + 1\frac{1}{2}}{2} + 1 = \frac{2z+7}{4}$ = „ „ „ „ Gerste,

$15(z+1)$ = zweiter Erlös aus dem Weizen,

$(x+4) \cdot \frac{2z+7}{4}$ = „ „ „ der Gerste.

XI. $$15(z+1) + (x+4)\frac{2z+7}{4} = 147$$

XII. $$2xz + 3x + 40z = 318 \text{ (aus X.)}$$

XIII. $$2xz + 7x + 68z = 500 \text{ (aus XI.)}$$

$$2x + 14z = 91 \text{ (aus XII. und XIII.)}$$

XIV. $$x = \frac{91 - 14z}{2}$$

$$91z - 14z^2 + \frac{273 - 42z}{2} + 40z = 318 \text{ (d. Substit. von XIV. in XII.)}$$

$$z^2 - \frac{55}{7}z = -\frac{363}{28}$$

$$z = \frac{55 \pm 22}{14}$$

XV. $z = \frac{11}{2}$ oder $= \frac{33}{14}$ fl. = Preis eines Schfls. Weizen,

$\frac{2z+3}{4} = \frac{7}{2}$ „ $= \frac{27}{14}$ fl. = „ „ „ Gerste,

XVI. $x = \frac{7(13 - 2z)}{2} = 7$ oder $= 29$ = Anzahl Schfl. Gerste.

Nr. 38. Es kauft Jemand eine Anzahl Scheffel Korn in der Erwartung, diese Frucht nach 6 Monaten zu einem um $1\frac{1}{2}$ fl. für den Scheffel theurern Preise verkaufen zu können. Nach 6 Monaten aber ist der. Preis der Frucht um $\frac{1}{2}$ fl. für den Scheffel gefallen, und er würde daher, wenn er dieselbe jetzt verkaufen und zu seinen Auslagen 5 Procent Jahresinteressen hinzurechnen würde, so viel verlieren als der Ankaufs-Preis von 5 Scheffeln beträgt. Er wartet daher noch weitere 6 Monate, ist jedoch jetzt genöthigt, den Scheffel um 1 fl. wohlfeiler zu verkaufen, wobei er findet, dass er bei Einrechnung der 5procentigen Interessen des aufgewendeten Capitals 5 fl. weniger verloren habe, als er zu gewinnen gehofft hatte. Wie viel Scheffel Frucht hat er gekauft und wie theuer den Scheffel?

Auflösung. x = Anzahl gekaufter Scheffel,

y = Ankaufs-Preis eines Schfls. in fl.,

xy = ganze Auslage beim Ankauf der Frucht,

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}xy = \frac{xy}{40}$ = 6monatl. 5 proc. Zinsen des Anl.-Capitals,

$xy+\frac{xy}{40} = \frac{41xy}{40}$ = Preis, um welchen er nach 6 Mon. die Frucht verk. müsste, um Nichts zu verlieren,

$y-\frac{1}{2}$ = Preis eines Schfls. nach 6 Monaten,

$x(y-\frac{1}{2})$ = Erlös, wenn er die Frucht zu den eben herrschenden Preisen verkaufen wollte,

$\frac{41}{40}xy - x(y-\frac{1}{2}) = \frac{xy}{40}+\frac{x}{2}$ = Verlust, wenn er nach 6 Mon. verk.

aber auch $5y$ = „ „ „ „ „ „ „

I. $$\frac{xy}{40}+\frac{x}{2} = 5y$$

$y+1\frac{1}{2}$ = Preis, den er sich per Schfl. wünschte,

$x(y+1\frac{1}{2})$ = erwünschter Erlös aus der Frucht,

$x(y+1\frac{1}{2}) - \frac{41}{40}xy = \frac{3}{2}x - \frac{xy}{40}$ = reiner Gewinn, auf den der Verkäufer gerechnet hatte,

$y-1$ = wirklicher Verkaufs-Preis eines Schfls.,

$x(y-1)$ = wirklicher Erlös aus der Frucht,

$\frac{5}{100}xy = \frac{xy}{20}$ = einjährige 5proc. Zinsen des Anl.-Capitals,

$xy+\frac{xy}{20} = \frac{21}{20}xy$ = Erlös, der nach einem Jahre nöthig wäre, um Nichts verloren zu haben,

$$\tfrac{21}{20}xy - x(y-1) = \frac{xy}{20} + x = \text{wirklicher Verlust beim Verkauf.}$$

$$\text{aber auch} \quad \tfrac{1}{2}x - \frac{xy}{40} - 5 = \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}$$

$$\text{II.} \qquad \frac{xy}{20} + x = \tfrac{1}{2}x - \frac{xy}{40} - 5$$

$$\text{III.} \qquad xy + 20x = 200y \text{ (aus I.)}$$

$$\frac{3xy}{40} - \frac{x}{2} = -5 \text{ (aus II.)}$$

$$\text{IV.} \qquad 3xy - 20x = -200$$

$$\text{V.} \qquad 3xy + 60x = 600y \text{ (aus III.)}$$

$$80x = 600y + 200 \text{ (aus IV. u. V.)}$$

$$2x = 15y + 5$$

$$\text{VI.} \qquad x = \frac{15y+5}{2}$$

$$\frac{15y^2 + 5y}{2} + 150y + 50 = 200y \text{ (d. Substit. von VI. in III.)}$$

$$15y^2 + 5y + 300y + 100 = 400y$$

$$15y^2 - 95y = -100$$

$$y^2 - \tfrac{19}{3}y = -\tfrac{20}{3}$$

$$y^2 - \tfrac{19}{3}y + (\tfrac{19}{6})^2 = \tfrac{361}{36} - \tfrac{20}{3} = \tfrac{121}{36}$$

$$y - \tfrac{19}{6} = \pm\tfrac{11}{6}$$

$$y = \frac{19 \pm 11}{6}$$

$$\text{* VII.} \qquad y = 5 \text{ oder } = \tfrac{4}{3} \text{ fl.} = \text{Preis eines Schfls. b. Einkauf,}$$

$$\text{* VIII.} \qquad x = \frac{5(3y+1)}{2} = 40 \text{ oder } = \tfrac{25}{2} \text{ gekaufte Schfl.}$$

Anmerkung. Sucht man aus VI. einen Werth für y und benützt ihn weiter, so ist:

$$\text{IX.} \qquad y = \frac{2x-5}{15}$$

$$\frac{2x^2 - 5x}{5} - 20x = -200 \text{ (d. Substit. von IX. in IV.)}$$

$$x^2 - \tfrac{105}{2}x = -500$$

$$x = \frac{105 \pm 55}{4}$$

$$\text{X.} \qquad x = 40 \text{ oder } = \tfrac{25}{2} \text{ Schfl.,}$$

$$\text{XI.} \qquad y = \frac{2x-5}{15} = 5 \text{ oder } = \tfrac{4}{3} \text{ fl.} = \text{Preis eines Schfls. beim Einkauf.}$$

Nr. 39. Beim Nachgraben in einigen Ruinen fanden Arbeiter 9 Urnen, welche zusammen 60 Goldmünzen enthielten; die zweite davon enthielt 8, die achte 4 Münzen. Die ersten Urnen, und zwar mehr als die Hälfte der ganzen Zahl, verbargen sie mit den in ihnen enthaltenen Münzen und gaben nur die zuletzt gefundenen ab, und es verhielt sich die Zahl der zurückbehaltenen Urnen zur Zahl der abgegebenen wie die Zahl der in jenen enthaltenen Goldmünzen zur Zahl der in diesen enthaltenen. Hätten sie jedoch statt der zweiten Urne die achte mit ihrem Inhalte zurückbehalten, so würde sich die Zahl der zurückbehaltenen Goldmünzen zur Zahl der abgegebenen verhalten wie das Quadrat der zurückbehaltenen Urnen zu dem Ueberschusse der zwanzigfachen Anzahl der abgegebenen Urnen über das genannte Quadrat. Wie viel Urnen und wie viel Münzen wurden zurückbehalten?

Auflösung. $x =$ Anzahl zurückbehaltener Urnen,

$9 - x =$ „ abgegebener „

$\frac{x}{9} \cdot 60 = \frac{20x}{3} =$ „ zurückbehaltener Münzen,

$\frac{9-x}{9} \cdot 60 = \frac{(9-x) \cdot 20}{3} =$ Anzahl abgegebener Münzen, da die verborgenen und abgegebenen Münzen den verborgenen und abgegebenen Urnen proportionirt sind;

$\frac{20x}{3} - 4 =$ Anzahl verborgener Münzen, wenn statt d. zweiten Urne die achte zurückbeh. w.;

$\frac{(9-x)20}{3} + 4 = \frac{192 - 20x}{3} =$ Anzahl abgegebener Münzen, wenn statt der zweiten Urne die achte zurückbehalten wird;

$x^2 =$ Quadrat der zurückbehaltenen Urnen,

$20(9-x) - x^2 =$ Ueberschuss der 20fachen Anzahl abgegebener Urnen über das genannte Quadrat.

$$\left(\frac{20x}{3} - 4\right) : \frac{192 - 20x}{3} = x^2 : [20(9-x) - x^2]$$

$$(5x - 3) : (48 - 5x) = x^2 : [20(9-x) - x^2]$$

$$(5x - 3) : 45 = x^2 : 20(9-x)$$

$$(5x - 3) : 9 = x^2 : 4(9-x)$$

$$9x^2 = 180x - 108 - 20x^2 + 12x$$

$$29x^2 - 192x = -108$$

$$x^2 - \tfrac{192}{29}x = -\tfrac{108}{29}$$

$$x^2 - \tfrac{192}{29}x + (\tfrac{96}{29})^2 = \tfrac{9216}{841} - \tfrac{108}{29} = \tfrac{6084}{841}$$

$$x - \tfrac{96}{29} = \pm \tfrac{78}{29}$$

$$x = \frac{96 \pm 78}{29}$$

$$= 6 \text{ oder } = \tfrac{18}{29}$$

$x = 6$ zurückbehaltene Urnen,

$\frac{20x}{3} = 40$ „ Münzen.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Anzahl zurückbehaltener Münzen,

$60 - y$ = Anzahl abgegebener Münzen,

$\frac{y}{60} . 9 = \frac{3y}{20}$ = Anzahl zurückbehaltener Urnen,

$\frac{60 - y}{60} . 9 = \frac{3(60 - y)}{20}$ = Anzahl abgegebener Urnen, aus dem bereits oben angeführten Grunde;

$y - 4$ = Anzahl zurückbehalt. Münzen, wenn statt d. zweiten Urne die achte zurückbeh. w.;

$60 - y + 4 = 64 - y$ = Anzahl abgegeb. Münzen, wenn statt d. zweiten Urne die achte zurückbeh. w.;

$\frac{9y^2}{400}$ = Quadrat der zurückbehaltenen Urnen,

$3(60 - y) - \frac{9y^2}{400}$ = Ueberschuss der 20fachen Anzahl abgegebener Urnen über das genannte Quadrat.

$$(y - 4) : (64 - y) = \frac{9y^2}{400} : \left[3(60 - y) - \frac{9y^2}{400}\right]$$

$$(y - 4) : 60 = \frac{9y^2}{400} : 3(60 - y)$$

$$y^2 - \frac{1280y}{29} = \frac{-4800}{29}$$

$$y = \frac{640 \pm 520}{29}$$

$y = 40$ zurückbehaltene Münzen,

$\frac{3}{20}y = 6$ „ Urnen.

Nr. 40. Zwei Personen, A und B, begannen zu gleicher Zeit eine Reise. Da A in 6 Tagen doppelt so weit kam als B in 5, und da er zugleich 5 Tage länger auf der Reise war, so legte er im Ganzen $64\frac{3}{4}$ Meilen mehr zurück als B. Hätte jedoch A bei unveränderter Geschwindigkeit im Reisen 6 Tage weniger auf der Reise zugebracht, während B bei unveränderter Zahl der Reisetage

täglich $\frac{1}{2}$ Meile mehr zurückgelegt hätte, als dies wirklich der Fall war, so hätte *A* nur $9\frac{1}{4}$ Meilen mehr zurückgelegt als *B*. Wie lange war jeder auf der Reise, und wie viel Meilen legte er täglich zurück?

Auflösung. $x =$ Anzahl Tage, die *A* wirklich unterwegs ist,

$5y =$ „ Meilen, die *A* wirkl. täglich macht,

$5xy =$ „ „ „ „ „ im Ganzen zurückgelegt hat,

$x - 5 =$ „ Tage, die *B* wirkl. unterwegs ist,

$3y =$ „ Meilen, die *B* wirkl. täglich macht,

$3y(x-5) =$ „ „ „ „ „ im Ganzen zurückgel. hat.

I. $5xy - 3y(x-5) = 64\frac{3}{4}$

$x - 6 =$ vorausges. Anzahl Reisetage des *A*,

$5y(x-6) =$ „ „ Meilen, die *A* zurücklegen würde,

$3y + \frac{1}{2} =$ „ „ „ die *B* tägl. machen würde,

$(x-5)(3y+\frac{1}{2}) =$ „ „ „ die *B* im Ganzen zurückl. würde.

II. $5y(x-6) - (x-5)(3y+\frac{1}{2}) = 9\frac{1}{4}$

III. $2xy + 15y = \frac{259}{4}$ (aus I.)

$5xy - 30y - (3xy - 15y + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}) = \frac{37}{4}$ (aus II.)

IV. $2xy - 15y - \frac{1}{2}x = \frac{27}{4}$

$30y + \frac{1}{2}x = 58$ (aus III. und IV.)

$\frac{1}{2}x = 58 - 30y$

V. $x = 4(29 - 15y)$

$8(29 - 15y)y + 15y = \frac{259}{4}$ (d. Subst. von V. in. III.)

$232y - 120y^2 + 15y = \frac{259}{4}$

$247y - 120y^2 = \frac{259}{4}$

$y^2 - \frac{247}{120}y = -\frac{259}{480}$

$y^2 - \frac{247}{120}y + (\frac{247}{240})^2 = \frac{61009}{57600} - \frac{259}{480} = \frac{29929}{57600}$

$y - \frac{247}{240} = \pm\frac{173}{240}$

$$y = \frac{247 \pm 173}{240}$$

* VI. $= \frac{7}{4}$ oder $= \frac{37}{120}$

$5y = 8\frac{3}{4}$ oder $= \frac{37}{24}$ Meil., die *A* tägl. macht,

$3y = 5\frac{1}{4}$ oder $= \frac{37}{40}$ „ „ *B* „ „

* VII. $x = 4(29 - 15y) = 11$ oder $= 97\frac{1}{2}$ Tage, die *A* unterw. ist.

$x - 5 = 6$ oder $= 92\frac{1}{2}$ „ „ *B* „ „

Anmerkung. Sucht man aus V. einen Werth für y und setzt ihn in III. ein, so ergiebt sich:

VIII. $$y = \frac{116-x}{60}$$

$$(2x+15) \cdot \frac{116-x}{60} = \frac{259}{4}$$

$$x^2 - \tfrac{217}{2}x = -\tfrac{2145}{2}$$

$$x = \frac{217 \mp 173}{4}$$

IX. $= \frac{195}{2}$ oder $= 11$ Tage, die A unterw. ist,

$x - 5 = \frac{185}{2}$ oder $= 6$ „ „ B „ „

X. $y = \frac{116-x}{60} = \frac{37}{120}$ oder $= \frac{7}{4}$

$5y = \frac{35}{4}$ oder $= 8\frac{3}{4}$ Meilen, die A täglich macht.

$3x = \frac{21}{4}$ oder $= 5\frac{1}{4}$ „ „ B „ „

Man könnte auch als eine Haupt-Unbekannte die Anzahl Tage, die B unterwegs ist, annehmen.

Nr. 41. Ein volles Fass kann durch zwei Hahnen geleert werden. Man lässt zuerst den ersten Hahn $\frac{2}{3}$ der Zeit laufen, welche der zweite Hahn brauchen würde, um das Fass allein zu leeren, schliesst ihn hierauf, und öffnet den zweiten Hahn so lange, bis das ganze Fass geleert ist. Hätte man von Anfang an beide Hahnen geöffnet, so hätte man zur Entleerung des Fasses zwei Stunden weniger gebraucht, als im vorigen Fall nöthig waren, und durch den ersten Hahn wäre die Hälfte von dem ausgeflossen, was durch den zweiten Hahn im vorigen Fall wirklich ausfloss. Wie lange brauchte jeder Hahn für sich zur Entleerung des Fasses?

Auflösung. $x =$ Anzahl Stunden, die der erste Hahn allein zur Entleerung braucht;

$y =$ Anzahl Stunden, die der zweite Hahn allein zur Entleerung braucht;

$\frac{1}{x} =$ Theil des Fasses, den der erste Hahn in einer Stunde entleert;

$\frac{1}{y} =$ Theil des Fasses, den der zweite Hahn in einer Stunde entleert;

$\frac{2}{3}y =$ Zeit, währ. welcher d. erste Hahn läuft;

$\frac{2}{3}y \cdot \frac{1}{x} = \frac{2y}{3x} =$ Theil des Fasses, den der erste Hahn in dieser Zeit entleert;

$1-\frac{2y}{3x}=\frac{3x-2y}{3x}$ = Rest des Fasses, den der zweite Hahn entleeren muss;

$\frac{\frac{3x-2y}{3x}}{\frac{1}{y}}=\frac{y}{3x}(3x-2y)$ = Anzahl Stunden, die der zweite Hahn zur Entleerung dieses Restes braucht;

$\frac{2y}{3}+\frac{y}{3x}(3x-2y)$ = Zeit, welche zur gänzlichen Entleerung des Fasses verwendet wird;

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ = Theil des Fasses, der in einer Stunde entleert würde, wenn beide Hahnen geöffnet wären;

$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{xy}{x+y}$ = Zeit, in welcher das Fass entleert würde, wenn beide Hahnen geöffnet wären.

I. $\frac{2y}{3}+\frac{y}{3x}(3x-2y)-\frac{xy}{x+y}=2$

$\frac{1}{x}\cdot\frac{xy}{x+y}=\frac{y}{x+y}$ = Theil des Fasses, den der erste Hahn in obigen $\frac{xy}{x+y}$ St. entleeren würde.

II. $\frac{y}{x+y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x-2y}{3x}$

III. $\frac{5y}{3}-\frac{2y^2}{3x}=\frac{xy}{x+y}+2$ (aus I.)

$6xy = 3x^2+3xy-2xy-2y^2$ (aus II.)

IV. $2y^2+5xy = 3x^2$

$y^2+\frac{5}{2}xy = \frac{3}{2}x^2$

$y^2+\frac{5}{2}xy+(\frac{5}{4}x)^2 = \frac{3}{2}x^2+\frac{25}{16}x^2 = \frac{49}{16}x^2$

$y+\frac{5}{4}x = \pm\frac{7}{4}x$

$y = \frac{-5\pm 7}{4}x$

V. $= \frac{1}{2}x$ oder $= -3x$

$\frac{5x}{6}-\frac{2x^2}{12x}=\frac{\frac{x^2}{2}}{x+\frac{x}{2}}+2$ (d. Substit. von V. in III.)

$\frac{5}{6}x-\frac{1}{6}x = \frac{1}{3}x+2$

$\frac{1}{3}x = 2$

* VI. $x = 6$ Stunden, die der erste Hahn zur Entleerung braucht,

* VII. $y = \frac{1}{2}x = 3$ Stunden, die der zweite Hahn zur Entleerung braucht.

Anmerkung. Die Gleichung IV. lässt sich auch nach x auflösen. Man erhält alsdann:

$$x^2 - \tfrac{5}{3}xy = \tfrac{2}{3}y^2$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{6}y$$

$$= 2y \text{ oder } = -\tfrac{1}{3}y$$

$$\frac{5y}{3} - \frac{2y^2}{6y} = \frac{2y^2}{2y+y} + 2 \quad \text{(d. Substit. von VIII. in III.)}$$

IX. $y = 3$ Stund., die der zweite Hahn z. Entleerung braucht.

X. $x = 2y = 6$ „ „ „ erste „ „ „ „

Man kann auch die Gleichung IV. durch x^2 oder durch y^2 dividiren, und dann nach $\frac{y}{x}$ oder nach $\frac{x}{y}$ auflösen. Warum die Werthe $y = -3x$ und $x = -\frac{1}{3}y$ nicht brauchbar sind, ergiebt sich von selbst.

Nr. 42. Der Unterschied der Quadrate zweier Zahlen ist $= 5$; wenn man ferner das Produkt beider Zahlen in's Quadrat erhebt, dazu das Quadrat von der Summe der 4ten Potenzen beider Zahlen addirt, und die dadurch erhaltene Summe noch vermehrt durch das Produkt aus dem Quadrate der Differenz beider Quadrate und aus dem Quadrate des Produkts beider Zahlen selbst, so erhält man 10345. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. $x =$ erste Zahl,

$y =$ zweite Zahl.

I. $x^2 - y^2 = 5$

$x^2y^2 =$ Quadrat des Produkts beider Zahlen,

$(x^4+y^4)^2 =$ Quadrat der Summe der 4ten Potenzen,

$(x^2-y^2)^2 . x^2y^2 =$ Produkt aus d. Quadr. der Differenz beider Quadrate u. d. Quadrate des Produkts beider Zahlen.

II. $x^2y^2 + (x^4+y^4)^2 + (x^2-y^2)^2 . x^2y^2 = 10345$

$$(x^4+y^4)^2 + (x^4 - 2x^2y^2 + y^4)x^2y^2 = 10345 - x^2y^2 \text{ (aus II.)}$$

$$(x^4+y^4)^2 + (x^4+y^4)x^2y^2 - 2x^4y^4 = 10345 - x^2y^2$$

$$(x^4+y^4)^2 + (x^4+y^4)x^2y^2 - 2x^4y^4 + \tfrac{9}{4}x^4y^4 = 10345 - x^2y^2 + \tfrac{9}{4}x^4y^4$$

$$(x^4+y^4)^2 + (x^4+y^4)x^2y^2 + \tfrac{1}{4}x^4y^4 = 10345 - x^2y^2 + \tfrac{9}{4}x^4y^4$$

III. $x^4 + y^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 = \pm\sqrt{10345 - x^2y^2 + \frac{9}{4}x^4y^4}$

IV. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 25$ (aus I.)

$$\frac{5x^2y^2}{2} + 25 = \pm\sqrt{10345 + \frac{9x^4y^4}{4} - x^2y^2} \text{ (aus III. u. IV)}$$

$$\tfrac{25}{4}x^4y^4 + 125x^2y^2 + 625 = 10345 + \frac{9x^4y^4}{4} - x^2y^2$$

$$4x^4y^4 + 126x^2y^2 = 9720$$

$$4x^4y^4 + 126x^2y^2 + (\tfrac{63}{2})^2 = 9720 + \tfrac{3969}{4} = \tfrac{42849}{4}$$

$$2x^2y^2 + \tfrac{63}{2} = \pm\tfrac{207}{2}$$

$$2x^2y^2 = \frac{-63 \pm 207}{2}$$

$$2x^2y^2 = 72 \text{ oder } = -135$$

V. $$4x^2y^2 = 144 \text{ oder } = -270$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 169 \text{ oder } = -245 \text{ (aus IV. u. V.)}$$

VI. $$x^2 + y^2 = \pm 13 \text{ oder } = \pm 7\sqrt{-5}$$

$$x^2 = 9 \text{ oder } = -4 \text{ oder } = \frac{5 \pm 7\sqrt{-5}}{2} \text{ (aus I. und VI.)}$$

*VII. $$x = \pm 3 \text{ oder } = \pm 2\sqrt{-1} \text{ oder } = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 7\sqrt{-5}}{2}}$$

$$y^2 = 4 \text{ oder } = -9 \text{ oder } = \frac{-5 \pm 7\sqrt{-5}}{2} \text{ (aus I. und VI.)}$$

*VIII. $$y = \pm 2 \text{ oder } = \pm 3\sqrt{-1} \text{ oder } = \pm\sqrt{\frac{-5 \pm 7\sqrt{-5}}{2}}.$$

Anmerkung. Eine andere, nur wenig verschiedene Lösung ist folgende:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 25 \text{ (aus I.)}$$

$$x^4 + y^4 + \tfrac{1}{2}x^2y^2 = 25 + \tfrac{5}{2}x^2y^2$$

IX. $$(x^4+y^4)^2 + (x^4+y^4)x^2y^2 + \tfrac{1}{4}x^4y^4 = 625 + 125x^2y^2 + \tfrac{25}{4}x^4y^4$$

X. $$(x^4+y^4)^2 + (x^4+y^4)x^2y^2 - 2x^4y^4 = 10345 - x^2y^2 \text{ (aus II.)}$$

$$-\tfrac{9}{4}x^4y^4 = 9720 - 126x^2y^2 - \tfrac{25}{4}x^4y^4 \text{ (aus IX. und X.)}$$

$$4x^4y^4 + 126x^2y^2 = 9720$$

woraus das Uebrige wie oben folgt.

Eine fernere Auflösung ist folgende:

$$x^2 - y^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 = s$$

$$x^2 = \frac{5+s}{2}$$

$$y^2 = \frac{s-5}{2}$$

Durch Substitution dieser Werthe in II. ergiebt sich dann

$$s^4 + 76s^2 = 41405$$

$$s^2 = -38 \pm 207$$

$$= 169 \text{ oder } = -245$$

$$s = x^2 + y^2 = \pm 13 \text{ oder } = \pm 7\sqrt{-5},$$

woraus das Uebrige wie oben folgt.

Nr. 43. Von einem Punkt im Innern einer Stadt führen zwei Strassen aus, um einen in gerader Richtung fliessenden Fluss vermittelst zweier Brücken A und B zu überschreiten. Von demselben Punkte aus führt ebenfalls ein Abzugskanal für das Wasser nach dem Flusse, und zwar so zwischen beiden Strassen, dass er den Winkel halbirt, welchen diese mit einander machen. Derselbe mündet in den Fluss an einem Punkte, welcher von der Brücke A 600 Fuss entfernt ist, von der Brücke B aber 1100 Fuss weniger als die ganze Länge dieses Kanals beträgt. Das Graben dieses Kanals kostet für je 5 Fuss so viele Gulden, so viel 100 Fuss die von jenem Punkte bis zur Brücke A führende Strasse lang ist. Da der Kanal zur Abführung alles Wassers nicht ausreicht, so wird noch eine weitere Abzugsrinne gegraben, und zwar von einem Punkte der letztgenannten Strasse aus, welcher von der Brücke A 400 Fuss entfernt ist, bis zu demselben Punkte, in welchem auch der Kanal in den Fluss mündet, und es ergiebt sich, dass durch diese Rinne ebenfalls der Winkel genau halbirt wird, welchen der Abzugskanal mit dem Flusse bildet. Hätte man statt des Kanals zwei Abzugsrinnen längs der Mitte jener beiden Strassen gehen lassen, deren Ausgrabung für je 10 Fuss auf 18 fl. gekommen wäre, so hätte die ganze Ausgabe 1080 fl. mehr betragen, als jener Kanal kostete. Wie lang sind die Strassen und der Kanal, und wie weit ist die Mündung des letztern von der Brücke B entfernt?

Auflösung.

C = Punkt in der Stadt, von dem aus die zwei Strassen und der Kanal ausgehen;

D = Punkt, wo der Kanal in den Fluss mündet;

E = Punkt in der Strasse AC, von dem aus die Abzugsrinne nach D gegraben wird;

x = Länge der Strasse AC in Fussen;

$x - 400$ = „ „ „ EC „ „

$\frac{600 \cdot (x-400)}{400} = \frac{3}{2}(x-400)$ = Länge des Kanals CD in Fussen, denn wenn man in einem Dreieck einen Winkel halbirt, so wird die Gegenseite den Schenkeln proportionell getheilt, daher im Dreieck ACD die Proportion $AE : EC = AD : CD$ oder $400 : (x-400) = 600 : CD$;

$\frac{x}{100}$ = Kosten des Ausgrabens von 5 Fuss des Kanals in fl.;

$\frac{1}{5} \cdot \frac{x}{100} \cdot \frac{3}{2}(x-400) = \frac{3x}{1000}(x-400)$ = Kosten des Ausgrabens des ganzen Kanals;

$\frac{3}{2}(x-400)-1100 = \frac{3}{2}x-1700$ = Länge des Flussstücks *DB* in Fussen;

$\frac{x}{600}(\frac{3}{2}x-1700)$ = Länge der Strasse *BC* in Fussen, weil aus oben angeführtem Grunde im Dreieck *ACB* die Proportion $AD:DB = AC:BC$ stattfindet;

$x+\frac{x}{600}(\frac{3}{2}x-1700) = x\left(\frac{x}{400}-\frac{11}{6}\right)$ = Länge der beiden, längs der Strassen *AC* und *BC* gegrabenen, Abzugsrinnen zusammen, in Fussen;

$\frac{18x}{10}\left(\frac{x}{400}-\frac{11}{6}\right) = \frac{9x}{5}\left(\frac{x}{400}-\frac{11}{6}\right)$ = Gesammtkosten ihrer Aushebung in fl.

$$\frac{9x}{5}\left(\frac{x}{400}-\frac{11}{6}\right)-\frac{3x}{1000}(x-400) = 1080$$

$$\frac{9x^2}{2000}-\frac{33x}{10}-\frac{3x^2}{1000}+\frac{6x}{5} = 1080$$

$$\frac{3x^2}{2000}-\frac{21x}{10} = 1080$$

$$x^2-1400x = 720000$$

$$x^2-1400x+(700)^2 = 720000+490000 = 1210000$$

$$x-700 = \pm 1100$$

$$x = 1800 \text{ oder } = -400$$

$x = 1800$ Fuss = Länge der Strasse *AC*,

$\frac{x}{600}(\frac{3}{2}x-1700) = 3000$ „ = „ „ „ *BC*,

$\frac{3}{2}(x-400) = 2100$ „ = „ des Kanals *CD*,

$\frac{3}{2}x-1700 = 1000$ „ = Entfernung *DB* seiner Mündung von der Brücke *B*.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

x = Länge der Strasse *AC* in Fussen,

y = „ „ „ *BC* „ „

$\frac{600y}{x}$ = Länge des Flussstückes *DB* in Fussen, da in dem Dreieck *ABC* die Proportion: $AC:BC = AD:DB$ stattfindet;

$\frac{600y}{x}+1100$ = Länge des Kanals *CD* in Fussen;

$\frac{12}{15}(x+y) = \frac{4}{5}(x+y) =$ Kosten zweier längs den Strassen AC und BC gegrabenen Rinnen in fl.;

$\frac{x}{500} =$ Preis des Grabens eines Fusses des Kanals,

$\frac{x}{500}\left(\frac{600}{x}y + 1100\right) =$ Kosten des Grabens des Kanals.

$$\text{I.} \quad \frac{4}{5}(x+y) - \frac{x}{5}\left(\frac{6y}{x} + 11\right) = 1080$$

$$\text{II.} \quad \left(\frac{600y}{x} + 1100\right) : 600 = (x - 400) : 400 \text{ (aus Dreieck } ACD\text{)}$$

$$\text{III.} \quad \frac{1200y}{x} - 3x = -3400 \text{ (aus II.)}$$

$$\text{IV.} \quad x = \frac{3y}{2} - 2700 \text{ (aus I.)}$$

$$\frac{1200y}{\frac{3y}{2} - 2700} - \frac{9y}{2} + 8100 = -3400 \text{ (d. Substit. von IV. in III.)}$$

$$y^2 - \frac{13600}{3}y = -4600000$$

$$y = \frac{6800 \pm 2200}{3}$$

$$\text{V.} \quad y = 3000 \text{ oder } = \frac{4600}{3}$$

$$\text{VI.} \quad x = 1800 \text{ oder } = -400$$

$x = 1800$ Fuss = Länge AC,

$y = 3000$ „ = „ BC,

$\frac{600y}{x} = 1000$ „ = „ DB,

$\frac{600y}{x} + 1100 = 2100$ „ = „ CD.

Nr. 44. Von zwei Baumschulen hat die eine die Form eines Quadrats, die andere die Form eines Oblongums, und zwar ist die Höhe des letztern gleich der Seite des Quadrats. In beiden Baumschulen sind gleich viel Bäume; es stehen jedoch auf jeder Quadr.-Ruthe des Quadrats so viele als das Quadrat Qu.-Ruthen enthält, auf jeder Qu.-Ruthe des Oblongums aber viermal so viel als die Höhe des Oblongums Ruthen misst, und ausserdem noch auf dem Umfange des Oblongums statt der Umzäunung 144 Bäume. Wäre endlich die Fläche des Oblongums um 6 Qu.-Ruthen grösser, so würde sie sich zur Fläche des Quadrats verhalten wie 3 : 2. Wie viel Bäume sind in jeder Baumschule?

Auflösung. x = Seite des Quadrats in Ruthen,

und y = Höhe des Oblongums in Ruthen,

y = Länge des Oblongums in Ruthen,
x^2 = Anzahl Qu.-Ruthen des Quadrats,
und = Anz. Bäume, die auf einer Qu.-R. d. Quadr. stehen,
$x^2 . x^2 = x^4$ = „ „ der quadratischen Baumschule,
xy = „ Qu.-Ruthen des Oblongums,
$4x$ = „ Bäume, die auf einer Qu.-R. derselben steh.,
$xy . 4x = 4x^2y$ = „ „ der oblongen Baumschule.

I. $x^4 = 4x^2y + 144$

II. $(xy + 6) : x^2 = 3 : 2$

$x^4 - 4x^2y = 144$ (aus I.)

III. $x^4 - 4x^2y + 4y^2 = 144 + 4y^2$

IV. $2xy + 12 = 3x^2$ (aus II.)

$3x^2 - 2xy = 12$

$36x^2 - 24xy = 144$

V. $36x^2 - 24xy + 4y^2 = 144 + 4y^2$

$x^4 - 4x^2y + 4y^2 = 36x^2 - 24xy + 4y^2$ (aus III. u. V.)

$x^2 - 2y = \pm(6x - 2y)$

Entweder: $x^2 - 2y = 6x - 2y$

$x^2 = 6x$

*VI. $x = 6$

$12y + 12 = 108$ (d. Substit. von VI. in IV.)

$12y = 96$

*VII. $y = 8$

Oder: $x^2 - 2y = 2y - 6x$

$4y = x^2 + 6x$

VIII. $y = \frac{x^2 + 6x}{4}$

$\frac{x^3 + 6x^2}{2} + 12 = 3x^2$ (d. Substit. von VIII. in IV.)

$x^3 + 6x^2 + 24 = 6x^2$

$x^3 = -24$

*IX. $x = -2\sqrt[3]{3}$

$y = \frac{4\sqrt[3]{9} - 12\sqrt[3]{3}}{4}$ (d. Subst. v. IX. in VIII.)

*X. $= \sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{3}$

$x^4 = 4x^2y + 144 = 1296$ Bäume, die in jeder Baumschule sind.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

z = Anzahl Bäume jeder Baumschule,
$\sqrt{z}$ = Anzahl Qu.-Ruthen des Quadrats,

$$\frac{3\sqrt{z}}{2} - 6 = \text{Anzahl Qu.-Ruthen des Oblongums,}$$
$$\sqrt[4]{z} = \text{Seite des Quadrats in Ruthen,}$$
$$\text{und} = \text{Höhe des Rechtecks ,, ,,}$$
$$4\sqrt[4]{z} = \text{Anzahl Bäume, die auf einer Qu.-Ruthe des Oblongums stehen,}$$
$$4\sqrt[4]{z}\,.\left(\frac{3\sqrt{z}}{2} - 6\right) + 144 = \text{Anz. Bäume d. rechteck. Baumschule.}$$
$$4\sqrt[4]{z}\,.\left(\frac{3\sqrt{z}}{2} - 6\right) + 144 = z$$
$$6\sqrt[4]{z^3} - 24\sqrt[4]{z} + 144 = z$$
$$6\sqrt[4]{z^3} + 144 = z + 24\sqrt[4]{z}$$
$$6(\sqrt[4]{z^3} + 24) = \sqrt[4]{z}(\sqrt[4]{z^3} + 24)$$
$$6 = \sqrt[4]{z}$$
$$z = 1296 \text{ Bäume.}$$

Nr. 45. Man hat zwei Metallstücke, von denen jedes eine Mischung von Gold und Silber ist, aber in verschiedenen Verhältnissen dieser beiden Metalle. Nimmt man von beiden Stücke von gleichem Gewichte, so verhält sich der Werth des Stücks aus der ersten Mischung zum Werthe des Stücks aus der zweiten wie 11 : 17. Wenn jedoch in den beiden ursprünglichen Metallstücken die Quantität des Silbers unverändert gelassen, aber die darin befindliche Quantität des Goldes verdoppelt würde, so würden zwei gleich schwere Stücke von beiden Mischungen sich dem Werthe nach verhalten wie 7 : 11. In welchem Verhältniss ist das Gold und Silber in jeder Mischung enthalten, unter der Voraussetzung, dass der Werth des Goldes 13mal so gross ist als der des Silbers?

Auflösung.

x = Verhältn. des Silbers z. Gold in d. ersten Mischung, d. h. auf x Gewichtstheile Silber trifft 1 Gewichtstheil Gold;

y = Verhältn. des Silbers z. Gold in d. zweiten Mischung, d. h. auf y Gewichtstheile Silber trifft 1 Gewichtstheil Gold;

$x+1$ = Anzahl Gewichtstheile der ersten Mischung,

$y+1$ = ,, ,, ,, zweiten ,,

$x+13$ = Werth der ersten Mischung in Silber ausgedrückt,

$y+13$ = ,, ,, zweiten ,, ,, ,, ,,

$\frac{x+13}{x+1}$ = Werth einer Gewichtseinheit der ersten Mischung.

$\frac{y+13}{y+1}$ = Werth einer Gewichtseinheit der zweiten Mischung.

$$\text{I.}\qquad \frac{x+13}{x+1}:\frac{y+13}{y+1} = 11:17$$

$x:2$ = vorausges. Verhältn. d. Silbers z. Gold in d. ersten Misch.,

$y:2$ = „ „ „ „ „ „ „ „ zweiten „

$x+2$ = vorausges. Anzahl Gewichtstheile der ersten Misch.,

$y+2$ = „ „ „ „ zweiten „

$x+26$ = vorausges. Werth der ersten Mischung in Silber,

$y+26$ = „ „ „ zweiten „ „ „

$\frac{x+26}{x+2}$ = vorausges. Werth einer Gew.-Einheit der ersten Misch.

$\frac{y+26}{y+2}$ = „ „ „ „ „ zweiten „

$$\text{II.}\qquad \frac{x+26}{x+2}:\frac{y+26}{y+2} = 7:11$$

$$\frac{17x+221}{x+1} = \frac{11y+143}{y+1} \quad \text{(aus I.)}$$

$$17xy+221y+17x+221 = 11xy+143x+11y+143$$

$$6xy+210y-126x = -78$$

$$\text{III.}\qquad xy+35y-21x = -13$$

$$\frac{11x+286}{x+2} = \frac{7y+182}{y+2} \quad \text{(aus II.)}$$

$$11xy+286y+22x+572 = 7xy+182x+14y+364$$

$$4xy+272y-160x = -208$$

$$\text{IV.}\qquad xy+68y-40x = -52$$

$$19x-33y = 39 \quad \text{(aus III. u. IV.)}$$

$$19x = 39+33y$$

$$\text{V.}\qquad x = \frac{39+33y}{19}$$

$$\frac{39y+33y^2}{19}+35y-\frac{819+693y}{19} = -13 \quad \text{(V. in III.)}$$

$$39y+33y^2+665y-819-693y = -247$$

$$33y^2+11y = 572$$

$$y^2+\tfrac{1}{3}y = \tfrac{52}{3}$$

$$y^2+\tfrac{1}{3}y+(\tfrac{1}{6})^2 = \tfrac{52}{3}+\tfrac{1}{36} = \tfrac{625}{36}$$

$$y+\tfrac{1}{6} = \pm\tfrac{25}{6}$$

$$y = \frac{-1\pm 25}{6}$$

*VI. $y = 4$ oder $= -\frac{13}{3}$

$y = 4$, d. h., auf 1 Gew.-Theil Gold treffen 4 Gew.-Theile Silber in d. zweiten Misch.,

*VII. $x = \frac{3(13+11y)}{19} = 9$ Gew.-Theile Silber, die auf 1 Gew.-Theil Gold in der ersten Misch. treffen.

Anmerkung. Aus der Gleichung V. ergiebt sich auch:

VIII. $$y = \frac{19x - 39}{33}$$

$$\frac{19x^2 - 39x}{33} + \frac{665x - 1365}{33} - 21x = -13 \text{ (d. Substit. v. VIII. in III.)}$$

$$x^2 - \frac{67}{19}x = \frac{936}{19}$$

$$x = \frac{67 \pm 275}{38}$$

IX. $$x = 9 \text{ oder } = -\frac{104}{19}$$

X. $$y = \frac{19x - 39}{33} = 4 \text{ oder } = -\frac{13}{3}.$$

Nimmt man als Unbekannte die umgekehrten Verhältnisse an, nämlich:

$1 : z =$ Verhältniss des Silbers zum Gold in der ersten Misch.,

$1 : v =$ „ „ „ „ „ „ „ zweiten „

so ergeben sich durch analoge Schlussfolgerungen wie oben die zwei Hauptgleichungen:

XI. $$\frac{13z+1}{z+1} : \frac{13v+1}{v+1} = 11 : 17$$

XII. $$\frac{26z+1}{2z+1} : \frac{26v+1}{2v+1} = 7 : 11$$

aus denen sich weiters die folgenden zwei ergeben:

XIII. $$13zv + 35z - 21v = -1$$

XIV. $$13zv + 17z - 10v = -\frac{1}{4}$$

$$11v - 18z = \frac{3}{4} \text{ (aus XIII. und XIV.)}$$

XV. $$\begin{cases} v = \frac{3}{44} + \frac{18}{11}z \\ z = \frac{11}{18}v - \frac{1}{24} \end{cases}$$

$$\frac{39}{44}z + \frac{234}{11}z^2 - \frac{63}{44} - \frac{378}{11}z + 35z = -1; \qquad \frac{143}{18}v^2 - \frac{13}{24}v + \frac{385}{18}v - \frac{35}{24} - 21v = -1$$

(durch Substit. von XV. in XIII.)

$$z^2 + \frac{67}{936}z = \frac{19}{936} \qquad v^2 - \frac{1}{52}v = \frac{3}{52}$$

$$z = \frac{-67 \pm 275}{1872} \qquad v = \frac{1 \pm 25}{104}$$

XVI. $$= \frac{1}{9} \text{ oder } = -\frac{19}{104} \qquad = \frac{1}{4} \text{ oder } = -\frac{3}{13}$$

XVII. $v = \frac{1}{4}$ oder $= -\frac{3}{13}$ $z = \frac{1}{9}$ oder $= -\frac{19}{104}$
(durch Substit. von XVI. in XV.)

$1 : \frac{1}{9} = 9 : 1$ = Verhältniss des Silbers z. Gold in der ersten Misch.,
$1 : \frac{1}{4} = 4 : 1$ = „ „ „ „ „ „ „ zweiten „

Nr. 46. Ein Steinhauer hat zwei gleich grosse Steine von weissem Marmor in der Form von Würfeln, und zwei andere von dunkelm Marmor, ebenfalls in der Form von Würfeln, und in der Grösse einander gleich, aber grösser als die vorigen. Die Zahl der Kubik-Fusse, welche alle vier Steine zusammen hatten, ist um 9 grösser als die Summe von der 11fachen Zahl von Fussen, welche die Länge einer Seite der ersten zwei Steine misst, und der 12fachen Zahl von Fussen, welche die Länge einer Seite von dem zweiten Paare misst. Ausserdem besitzt er einen fünften Stein in der Form eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen drei Dimensionen durch folgende Angaben bestimmt sind. Die beiden kleinern, die Breite und Höhe, sind einander gleich, und jede um 2 Fuss grösser als eine Seite der weissen Marmorsteine; die grösste aber, die Länge, ist viermal so gross als eine Seite der dunkeln Marmorsteine. Seine grösste Grenzfläche ist um 3 Qu.-Fuss grösser als der Ueberschuss von dem Vierfachen einer Grenzfläche des dunkeln Marmors über das Dreifache einer Grenzfläche des weissen. Welche Dimensionen haben die fünf Steine?

Auflösung. x = Kante d. weissen Marmorwürfel in Fuss.,
y = „ „ dunkeln „ „ „
x^3 = Kubikinhalt des weissen Marmorsteins,
y^3 = „ „ dunkeln „
$2x^3+2y^3$ = „ der vier ersten Steine,
aber auch $11x+12y+9$ = „ „ „ „ „

I. $2x^3+2y^3 = 11x+12y+9$

$x+2$ = Breite und = Höhe des fünften Steines,
$4y$ = Länge des fünften Steines,
$4y(x+2)$ = Flächeninhalt der grössten Grenzfläche desselben,
x^2 = Grenzfläche des weissen Würfels,
y^2 = „ „ dunkeln „
$4y^2-3x^2+3$ = Flächeninhalt der grössten Grenzfläche des fünften Steines.

II. $4y(x+2) = 4y^2-3x^2+3$

$$3x^2 - 3 = 4y^2 - 4y(x+2) \quad \text{(aus II.)}$$

$$x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 3 = 4y^2 - 4y(x+2) + (x+2)^2 \quad \text{(durch Add. von } [x+2]^2\text{)}$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 - 4y(x+2) + (x+2)^2$$

$$2x+1 = \pm[2y - (x+2)]$$

$$2x+1 = 2y - x - 2 \qquad\qquad 2x+1 = -2y + x + 2$$

$$3x = 2y - 3 \qquad\qquad x = 1 - 2y$$

III. $x = \frac{2}{3}y - 1$ — Dieser Werth ist für elementare Behandlung unbrauchbar.

$$2(\tfrac{2}{3}y - 1)^3 + 2y^3 = \tfrac{22}{3}y - 11 + 12y + 9 \quad \text{(d. Subst. v. III. in I.)}$$

$$2(\tfrac{2}{3}y - 1)^3 + 2y^3 = \tfrac{58}{3}y - 2$$

$$\tfrac{8}{27}y^3 - \tfrac{4}{3}y^2 + 2y - 1 + y^3 = \tfrac{29}{3}y - 1$$

$$\tfrac{35}{27}y^3 - \tfrac{4}{3}y^2 = \tfrac{23}{3}y$$

$$\tfrac{35}{27}y^2 - \tfrac{4}{3}y = \tfrac{23}{3}$$

$$y^2 - \tfrac{36}{35}y = \tfrac{207}{35}$$

$$y^2 - \tfrac{36}{35}y + (\tfrac{18}{35})^2 = \tfrac{207}{35} + \tfrac{324}{1225} = \tfrac{7569}{1225}$$

$$y - \tfrac{18}{35} = \pm\tfrac{87}{35}$$

$$y = \frac{18 \pm 87}{35}$$

*IV. $= 3$ oder $= -\frac{69}{35}$

$y = 3$ Fuss = Kante der dunkeln Steine,

*V. $x = \frac{2}{3}y - 1 = 1$ „ = „ „ hellen „

$4y = 12$ „ = Länge des fünften Steins,

$x+2 = 3$ „ = Breite und Höhe desselben.

Anmerkung. Sucht man aus der Gleichung III. einen Werth für y, so ergiebt sich:

VI. $y = \frac{3}{2}(x+1)$

$$2x^3 + \tfrac{27}{4}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 11x + 18x + 18 + 9 \quad \text{(d. Substit. von VI. in I.)}$$

$$35x^3 + 81x^2 - 35x = 81$$

$$35x^3 - 35x = 81 - 81x^2 \qquad\qquad 35x^3 + 81x^2 = 35x + 81$$

$$35x(x^2 - 1) = -81(x^2 - 1) \qquad\qquad x^2(35x + 81) = 35x + 81$$

$$35x = -81 \qquad\qquad x^2 = 1$$

VII. $x = -\frac{81}{35}$ $\qquad\qquad x = \pm 1$

$x = 1$ Fuss.

VIII. $y = 3$ „ (d. Substit. von VII. in VI.)

Die Gleichung III. ergiebt sich auch noch folgendermassen:

$$3x^2 + 4xy = 4y^2 - 8y + 3 \quad \text{(aus II.)}$$

$$x^2 + \tfrac{4}{3}xy = \tfrac{4}{3}y^2 - \tfrac{8}{3}y + 1$$

$$x^2 + \tfrac{4}{3}yx + (\tfrac{2}{3}y)^2 = \tfrac{4}{9}y^2 + \tfrac{4}{3}y^2 - \tfrac{8}{3}y + 1 = \tfrac{16}{9}y^2 - \tfrac{8}{3}y + 1$$

$$x+\tfrac{2}{3}y = \pm(\tfrac{4}{3}y-1)$$

IX. $$x = \tfrac{2}{3}y-1 \text{ oder } = 1-2y.$$

Nr. 47. *A* und *B* reisen auf der nämlichen Strasse und mit gleicher Geschwindigkeit von *C* nach *D*. *A* ist früher von *C* abgegangen als *B*, und begegnet einer Heerde Gänse, welche gleichfalls nach *D* getrieben wird, und 3 Meilen in 8 Stunden zurücklegt, an dem 50sten Meilenstein von *D* entfernt. 8 Stunden später kommt ihm ein Frachtwagen entgegen, der von *D* nach *C* fährt, und 9 Meilen in 16 Stunden zurücklegt. *B* begegnete der nämlichen Heerde Gänse am 45sten Meilenstein, und nachdem er dem Frachtwagen begegnet war, hatte er noch 2 Stunden 40 Min. zu reisen, bis er an den 31sten Meilenstein kam. Wie weit war *B* noch von *D* entfernt, als *A* daselbst ankam?

Auflösung.
$$\begin{array}{rcl}
x &=& \text{Anz. Meil., die } A \text{ und } B \text{ in 1 Stunde machen;}\\
\frac{3}{8} &=& \text{„ „ „ die Gänse „ „ „ „}\\
\frac{50-45}{\frac{3}{8}} = \frac{40}{3} &=& \text{Anz. Stunden, die die Gänse brauchen, um v. 50sten bis z. 45sten Meilenst. zu komm.;}\\
\frac{40}{3}x &=& \text{Anz. Meil., die } A \text{ in dieser Zeit zurückl.;}\\
\frac{40}{3}x-5 &=& \text{„ „ um welche } A \text{ dem } B \text{ voraus ist;}\\
\text{und} &=& \text{Entfern. d. } B \text{ v. } D\text{, als } A \text{ daselbst ankömmt;}\\
8x &=& \text{Weg, den } A \text{ in 8 Stunden zurücklegt;}\\
50-8x &=& \text{Entfern. d. } A \text{ v. } D\text{, als er d. Frachtw. begegn.;}\\
2\frac{40}{60}x = 2\frac{2}{3}x &=& \text{Weg, den } B \text{ in 2 Stund. 40 Min. zurückl.;}\\
31+\frac{8}{3}x &=& \text{Entfern. d. } B \text{ v. } D\text{, als er d. Frachtw. begegn.;}\\
31+\frac{8}{3}x-(50-8x) &=& \frac{32}{3}x-19 = \text{Weg, den d. Frachtw. zwischen beiden Begegnungen zurücklegt;}\\
\frac{9}{16} &=& \text{Anz. Meil., die d. Frachtw. in 1 Stunde m.;}\\
\frac{\frac{32}{3}x-19}{\frac{9}{16}} &=& \frac{16}{9}(\frac{32}{3}x-19) = \text{Anz. Stund., die d. Frachtw. zwischen beiden Begegnungen unterwegs ist;}\\
\frac{16}{9}x(\frac{32}{3}x-19) &=& \text{Weg, den } A \text{ in dieser Zeit zurücklegt;}
\end{array}$$

$$50-8x-\tfrac{16}{9}x(\tfrac{32}{3}x-19) = 50+\frac{232x}{9}-\frac{512x^2}{27} = \text{Entfern. des } A \text{ von } D\text{, als } B \text{ d. Frachtw. begegnete;}$$

$$31+\tfrac{8}{3}x-\left(50+\frac{232x}{9}-\frac{512x^2}{27}\right) = \frac{512x^2}{27}-\frac{208x}{9}-19 = \text{constanter Vorsprung des } A \text{ über den } B.$$

$$\frac{512x^2}{27} - \frac{208x}{9} - 19 = \frac{40x}{3} - 5$$

$$\frac{512x^2}{27} - \frac{328x}{9} = 14$$

$$x^2 - \frac{123x}{64} = \frac{189}{256}$$

$$x^2 - \frac{123x}{64} + \left(\frac{123}{128}\right)^2 = \frac{189}{256} + \frac{15129}{(128)^2} = \frac{27225}{(128)^2}$$

$$x - \tfrac{123}{128} = \pm \tfrac{165}{128}$$

$$x = \frac{123 \pm 165}{128}$$

$$= \tfrac{9}{4} \text{ oder } = -\tfrac{21}{64}$$

$x = \frac{9}{4}$ Meilen, die A und B stündlich machen;

$\frac{40}{3}x - 5 = 25$ „ die B noch zu machen hat, wenn A in D ankömmt.

Anmerkung. Man kann die Aufgabe auch mit zwei Unbekannten lösen:

x = Anzahl Meilen, die A und B stündl. machen;

y = Vorsprung des A vor dem B in Meilen;

I. $\frac{40}{3}x - 5 = y$ (nach obigen Entwickelungen)

$50 - 8x$ = Entfern. des A v. D, als er d. Frachtw. begegn.;

$50 - 8x + y$ = „ „ B v. D um dieselbe Zeit;

$31 + \frac{8}{3}x$ = „ „ „ „ „ als er d. Frachtw. begegn.;

$31 + \frac{8}{3}x - (50 - 8x) = \frac{32}{3}x - 19$ = Anz. Meil., die der Frachtw. zwischen beiden Begegnungen zurücklegt;

$\dfrac{\frac{32}{3}x - 19}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9}(\frac{32}{3}x - 19)$ = Anz. Stunden, die zwischen seinen beiden Begegnungen verflossen sind;

$50 - 8x + y - (31 + \frac{8}{3}x) = 19 + y - \frac{32}{3}x$ = Anz. Meil., die B zwischen den beiden Begegnungen des Frachtw. zurückgel. hat;

$\dfrac{19 + y - \frac{32}{3}x}{x}$ = Anz. Stunden, die er hiezu gebraucht hat.

II. $$\frac{19 + y - \frac{32}{3}x}{x} = \tfrac{16}{9}(\tfrac{32}{3}x - 19)$$

$$40x - 15 = 3y \text{ (aus I.)}$$

III. $$x = \frac{3(y+5)}{40}$$

$$\frac{19 + y - \frac{4}{5}(y+5)}{\frac{3}{40}(y+5)} = \tfrac{16}{9}[\tfrac{4}{5}(y+5) - 19] \text{ (d. Substit. von III. in II.)}$$

$$y^2 - \tfrac{125}{8}y = \tfrac{1875}{8}$$

$$y = \frac{125 + 275}{16}$$

IV. $y = 25$ Meilen, die A dem B voraus ist,

V. $x = \frac{3(y+5)}{40} = \frac{9}{4}$ „ die jeder stündlich macht.

Es ist einleuchtend, dass man diesen zweiten Ansatz mit der in der ersten Auflösung benützten Unbekannten x allein durchführen kann. Setzt man den in I. gegebenen Werth von y in die zweite Gleichung ein, so ergiebt sich daher die in der ersten Auflösung gelöste Gleichung.

Nr. 48. Der Kiel eines Schiffes ist zum Theil mit Wasser gefüllt, welches durch einen Leck gleichförmig einströmt. Derselbe ist mit zwei Pumpen, A und B, versehen, von denen die erste immer 3 Stösse thut, während B 2 thut; 4 Stösse von B jedoch wirken so viel als 5 von A. — B pumpte zuerst so lange, als A gebraucht hätte, um allein das Ganze zu leeren; hierauf pumpte A den Rest aus, wodurch der Kiel in 13 Stunden 20 Minuten von Wasser frei wurde. Hätten beide Pumpen zugleich gewirkt, so wäre das Ganze in 3 Stunden und 45 Minuten ausgepumpt worden, und A hätte 100 Imi mehr ausgepumpt als wirklich geschah. Wie viel Wasser war in dem Kiel, als die Pumpen zu wirken begannen, wie viel strömte in jeder Stunde ein, und was wurde durch jede Pumpe in einer Stunde ausgepumpt?

Auflösung. $6x =$ Anz. Imi, die A in einer Stunde auspumpt;

$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6x = 5x =$ „ „ „ B „ „ „ „

denn B macht in einer Stunde $\frac{2}{3}$mal so viel Stösse als A; ein Stoss des B ist aber gleich $\frac{5}{4}$ Stössen des A, mithin liefert B in der nämlichen Zeit $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$mal die von A gelieferte Quantität;

$y =$ Anz. Imi, die in einer Stunde einfliessen;

$6x - y =$ „ „ die A in einer Stunde wirklich entleert;

$5x - y =$ „ „ „ B „ „ „ „ „

$6x + 5x - y = 11x - y =$ Anz. Imi, die A und B in einer St. entleeren, wenn sie mit einander arbeiten;

$3\frac{45}{60}(11x - y) = \frac{15}{4}(11x - y) =$ ursprüngl. Inhalt des Kiels in Imi, da er durch die gemeinschaftl. Arbeit des A und B in $3\frac{45}{60}$ Stunden entleert würde;

$\frac{\frac{15}{4}(11x - y)}{6x - y} =$ Anz. Stunden, die A allein zur vollständigen Entleerung des Kiels brauchen würde;

$\frac{(5x-y).15(11x-y)}{4(6x-y)}$ = Anz. Imi, welche *B* in dieser Zeit entleert;

$\frac{15}{4}(11x-y) - \frac{(5x-y).15(11x-y)}{4(6x-y)} = \frac{15x(11x-y)}{4(6x-y)}$ = Anzahl Imi, welche im Kiel noch übrig bleiben, u. die *A* entleeren muss;

$\frac{\frac{15x(11x-y)}{4(6x-y)}}{6x-y} = \frac{15x(11x-y)}{4(6x-y)^2}$ = Anz. Stunden, die *A* zur Entleerung derselben braucht;

$\frac{\frac{15}{4}(11x-y)}{6x-y} + \frac{15x(11x-y)}{4(6x-y)^2} = \frac{15(11x-y)(7x-y)}{4(6x-y)^2}$ = Anzahl Stunden, in denen der Kiel auf die angegebene Art entleert wird.

$$\text{I.}\qquad \frac{15(11x-y)(7x-y)}{4(6x-y)^2} = 13\tfrac{1}{3}$$

$6x.\frac{15x(11x-y)}{4(6x-y)^2} = \frac{45x^2(11x-y)}{2(6x-y)^2}$ = Anzahl Imi, die *A* wirkl. auspumpt;

$3\frac{3}{4}.6x = \frac{45}{2}x$ = Anz. Imi, die *A* auspumpen würde, wenn *A* und *B* gemeinschaftlich arbeiten würden;

$\frac{45x}{2} - \frac{45x^2}{2}.\frac{(11x-y)}{(6x-y)^2} = \frac{45x}{2}\left(1 - \frac{x(11x-y)}{(6x-y)^2}\right)$ = Anzahl Imi, die *A* bei d. Vorauss. der Aufg. mehr als in Wirklichk. auspump. w.

$$\text{II.}\quad \frac{45x}{2}\left(1 - \frac{x(11x-y)}{(6x-y)^2}\right) = 100$$

$$\frac{3(77x^2 - 7xy - 11xy + y^2)}{4(36x^2 - 12xy + y^2)} = \tfrac{8}{3} \text{ (aus I.)}$$

$$693x^2 - 162xy + 9y^2 = 1152x^2 - 384xy + 32y^2$$

$$23y^2 - 222xy = -459x^2$$

$$y^2 - \tfrac{222}{23}xy = -\tfrac{459}{23}x^2$$

$$y^2 - \tfrac{222}{23}xy + (\tfrac{111}{23}x)^2 = \tfrac{12321}{529}x^2 - \tfrac{459}{23}x^2 = \tfrac{1764}{529}x^2$$

$$y - \tfrac{111}{23}x = \pm\tfrac{42}{23}x$$

$$y = \frac{111 \pm 42}{23}x$$

$$\text{III.}\qquad = \tfrac{153}{23}x \text{ oder } = 3x$$

$$\text{IV.}\quad 9x\left(\frac{(6x-y)^2 - x(11x-y)}{(6x-y)^2}\right) = 40 \text{ (aus II.)}$$

$$9x.\left(\frac{(-\frac{15}{23}x)^2 - x.\frac{100}{23}x}{(-\frac{15}{23}x)^2}\right) = 40;\qquad 9x\left(\frac{(3x)^2 - x.8x}{(3x)^2}\right) = 40$$

(durch Substit. von III. in IV.)

$$9x\left(\frac{\frac{225}{529}x^2 - \frac{100}{23}x^2}{\frac{225}{529}x^2}\right) = 40 \qquad 9x\left(\frac{9x^2 - 8x^2}{9x^2}\right) = 40$$

$$-9x \cdot \tfrac{2075}{225} = 40 \qquad\qquad 9x \cdot \tfrac{1}{9} = 40$$

$$\text{*V.} \quad x = -\tfrac{40}{83} \qquad\qquad x = 40$$

$x = 40$

$6x = 240$ Imi, die A in einer Stunde auspumpt,

$5x = 200$ „ „ B „ „ „ „

*VI. $y = 3x = 120$ „ die durch den Leck in einer Stunde einströmen,

$\frac{15}{4}(11x - y) = 1200$ „ = ursprüngl. Inhalt des Kiels, als die Pumpen zu wirken begannen.

Anmerkung. Die Gleichung I. lässt sich auch folgendermassen auflösen:

$$23y^2 - 222xy = -459x^2 \quad \text{(aus I.)}$$

$$x^2 - \tfrac{74}{153}xy = -\tfrac{23}{459}y^2$$

$$x = \frac{37 \pm 14}{153}y$$

$$\text{VII.} \qquad = \tfrac{1}{3}y \text{ oder } = \tfrac{23}{153}y.$$

Auch lässt sich obige Gleichung durch x^2 oder y^2 dividiren, und dann nach $\frac{y}{x}$ oder $\frac{x}{y}$ auflösen. Substituirt man die Gleichung VII. in I. oder in die veränderte Gleichung:

$$9x\left(1 - \frac{x(11x - y)}{(6x - y)^2}\right) = 40, \text{ so ergiebt sich:}$$

$$3y\left(1 - \frac{\frac{1}{3}y(\frac{11}{3}y - y)}{(2y - y)^2}\right) = 40 \qquad \tfrac{23}{17}y\left(1 - \frac{\frac{23}{153}y(\frac{253}{153}y - y)}{(\frac{138}{153}y - y)^2}\right) = 40$$

$$\text{VIII.} \qquad y = 120 \qquad\qquad y = -\tfrac{6120}{1909}$$

$y = 120$ Imi.

IX. $x = \frac{1}{3}y = 40$

$6x = 240$ Imi.

$5x = 200$ „

Nr. 49. Nachdem man aus einem französischen Kartenspiele die Figuren (Könige, Damen und Buben) herausgenommen hatte, wurde der Rest in drei Haufen getheilt, und man fand, dass die Anzahl Augen in dem zweiten Haufen das vierfache Quadrat der Anzahl Augen im ersten Haufen betrage, und dass, wenn der dritte Haufe um 5 Augen mehr enthielte, als wirklich der Fall ist, seine Anzahl genau die Hälfte der Summe der Augen der beiden andern betragen würde. Wie viele Augen enthielt jeder Haufe?

Auflösung. x = Anzahl Augen im ersten Haufen,

$4x^2$ = „ „ „ zweiten „

$\frac{x+4x^2}{2} - 5$ = Anzahl Augen im dritten Haufen,

$\frac{3}{2}(x+4x^2) - 5$ = ganze Anzahl Augen in allen drei Haufen,

aber auch $4 \cdot 55 = 220$ = „ „ „ „ „ „ „

$$\frac{3}{2}(x+4x^2) - 5 = 220$$

$$\frac{3}{2}(x+4x^2) = 225$$

$$4x^2 + x = 150$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x = \frac{75}{2}$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x + (\tfrac{1}{8})^2 = \frac{75}{2} + \frac{1}{64} = \frac{2401}{64}$$

$$x + \frac{1}{8} = \pm \frac{49}{8}$$

$$x = \frac{-1 \pm 49}{8}$$

$$= 6 \text{ oder } = -\frac{25}{4}$$

x = 6 Augen im ersten Haufen,

$4x^2$ = 144 „ „ zweiten „

$\frac{x+4x^2}{2} - 5$ = 70 „ „ dritten „

Anmerkung. Diese Aufgabe findet sich nicht in der Nagel'schen Bearbeitung.

Nr. 50. Wenn ich in einem französischen Kartenspiel die drei Carreaufiguren, König, Dame, Bub, ausstosse, und die übrig bleibenden Karten dieser Farbe in zwei Haufen lege, so finde ich, dass sich die Summe der Augen in dem kleinern Haufen zur Summe der Augen in dem grössern verhalte, wie die Anzahl Karten des grössern Haufens zu jener des kleinern. Wenn ich aber die Siebner-Karte zum kleinen Haufen lege, so ist der Unterschied der Anzahl Augen in den beiden Haufen dem Quadrat der Anzahl Karten des kleinen Haufens gleich. Wie viel Karten und Augen liegen in jedem Haufen?

Auflösung. 10 = ganze Anzahl Karten,

55 = „ „ Augen,

x = ursprüngl. Anz. Karten d. grössern Hauf.,

$10 - x$ = „ „ „ „ kleinern „

y = „ „ Augen „ „ „

$55 - y$ = „ „ „ „ grössern „

1. $y : (55 - y) = x : (10 - x)$

$y + 7$ = nachherige Anz. Augen des kleinen Hauf.,

$55 - (y+7) = 48 - y$ = „ „ „ „ grossen „

$y + 7 - (48 - y) = 2y - 41$ = Untersch. der Anz. Augen beider H.,

$10 - x + 1 = 11 - x$ = nachherige Anz. Karten des kleinen Hauf.

$$\text{II.} \quad 2y - 41 = (11 - x)^2$$
$$y : 55 = x : 10 \text{ (aus I.)}$$
$$\text{III.} \quad 2y = 11x$$
$$\text{IV.} \quad y = \tfrac{11}{2}x$$
$$11x - 41 = 121 - 22x + x^2 \text{ (III. in II.)}$$
$$x^2 - 33x = -162$$
$$x^2 - 33x + (\tfrac{33}{2})^2 = \tfrac{1089}{4} - 162 = \tfrac{441}{4}$$
$$x - \tfrac{33}{2} = \pm\tfrac{21}{2}$$
$$x = \frac{33 \pm 21}{2}$$
$$= 27 \text{ oder } = 6$$

*V. $x = 6$ Karten im grossen Haufen,

$10 - x = 4$ „ „ kleinen „

*VI. $y = \tfrac{11}{2}x = 33$ Augen im kleinen Haufen,

$55 - y = 22$ „ „ grossen „

Anmerkung. Diese Aufgabe findet sich nicht in der Nagel'schen Bearbeitung.

Nr. 51. Eine Truppe ist so stark, dass man sie 3 Mann tief in einem hohlen gleichseitigen Keil aufstellen kann. — Nachdem 597 Mann abmarschirt waren, liess sich der Rest der Mannschaft 4 Mann tief in einem hohlen Quarré aufstellen, dessen Aussenseite einen Mann mehr zählte, als die Quadrat-Wurzel der Anzahl Mann betrug, die auf einer Aussenseite des Keils standen. Wie stark war die Truppe?

Auflösung. x = Anzahl Mann einer Aussenseite des Keils,

$x - 3$ = „ „ die dahinter stehen,

$x - 6$ = „ „ die wieder hinter dies. steh.,

$3x - 3$ = Mannschaft des ersten Gliedes des Keils,

$3(x-3) - 3 = 3x - 12$ = „ „ zweiten „ „ „

$3(x-6) - 3 = 3x - 21$ = „ „ dritten „ „ „

$9x - 36$ = ganze Mannschaft des Keils,

$\sqrt{x} + 1$ = Anzahl Mann einer Aussenseite d. Quadr.,

$\sqrt{x} + 1 - 2 = \sqrt{x} - 1$ = „ „ die dahinter stehen,

$\sqrt{x} - 3$ = „ „ die hinter diesen stehen,

$\sqrt{x} - 5$ = „ „ „ „ „ „

$4(\sqrt{x} + 1) - 4 = 4\sqrt{x}$ = Mannsch. des ersten Glied. d. Quarrés,

$4(\sqrt{x} - 1) - 4 = 4\sqrt{x} - 8$ = „ „ zweiten „ „ „

$4(\sqrt{x} - 3) - 4 = 4\sqrt{x} - 16$ = „ „ dritten „ „ „

$4(\sqrt{x}-5)-4 = 4\sqrt{x}-24$ = Mannsch. des viert. Glied. d. Quarrés,

$16\sqrt{x}-48$ = ganze Mannschaft des Quarrés,

aber auch $9x-36-597$ = „ „ „ „

$$16\sqrt{x}-48 = 9x-633$$

$$9x-16\sqrt{x} = 585$$

$$x-\tfrac{16}{9}\sqrt{x} = \tfrac{585}{9} = 65$$

$$x-\tfrac{16}{9}\sqrt{x}+(\tfrac{8}{9})^2 = 65+\tfrac{64}{81} = \tfrac{5329}{81}$$

$$\sqrt{x}-\tfrac{8}{9} = \pm\tfrac{73}{9}$$

$$\sqrt{x} = \frac{8\pm 73}{9}$$

$$= 9 \text{ oder } = -\tfrac{65}{9}$$

$$9x-36 = 9(x-4) = 693 \text{ Mann.}$$

Anmerkung. Diese Aufgabe findet sich nicht in der Nagelschen Bearbeitung. Geht man von der Quarré-Seite aus, so erhält man: y = Mannsch. in einer Fronte des erst. Glied. d. Quarrés,

$(y-1)^2$ = „ „ „ „ „ „ „ „ Keils,

$y^2-(y-8)^2 = 16y-64$ = ganze Mannschaft des Quarrés als Differenz zweier vollen Quadrate,

$$\frac{(y-1)^2[(y-1)^2+1]}{2}-\frac{[(y-1)^2-9][(y-1)^2-8]}{2} = 9(y-1)^2-36$$

= ganze Mannsch. d. Keils als Differ. zweier vollen Dreiecke.

$$16y-64 = 9(y-1)^2-36-597$$

$$9y^2-34y = 560$$

$$y = \tfrac{17}{9}\pm\sqrt{\tfrac{5329}{81}}$$

$$= \frac{17\pm 73}{9}$$

$$= 10 \text{ oder } = -\tfrac{56}{9}$$

$$16(y-4)+597 = 9(y-1)^2-36 = 693 \text{ Mann.}$$

Nr. 52. Das Dach eines Magazins besteht aus zwei Quadraten, die von zwei gleich grossen und parallelen gleichschenkligen gezimmerten Dreiecken getragen werden; die Höhe der Mauern des Magazins ist der Grundlinie jedes dieser beiden Dreiecke gleich. — Die Menge Holz, die das Magazin zu fassen vermag, vermehrt um 6 Holzwürfel, deren jeder so lang wie das Gebäude selbst ist, verhält sich zur Holzmenge, welche dasselbe Magazin fassen würde, wenn sein Dach flach wäre, wie 11 : 2. Das Dach kostete so viele Groschen per Quadrat-Fuss als es lang ist, und die Pflasterung wurde zu demselben Preis ausgeführt, Bedachung und Pflaster zusammen aber kosteten 2500 fl. Welche Dimensionen hatte das Magazin?

Auflösung. x = Länge des Gebäudes in Fussen,
y = Breite und Höhe desselben in Fussen,

$\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$ = Höhe der beiden gleichschenkligen Dreiecke,

xy^2 = Kubikinhalt des gemauerten Theils des Magaz.,

$\frac{xy}{4}\sqrt{4x^2 - y^2}$ = „ „ gezimmerten „ „ „

$6x^3$ = „ der sechs Würfel.

I. $\left(xy^2 + \frac{xy}{4}\sqrt{4x^2 - y^2} + 6x^3\right) : xy^2 = 11 : 2$

$2x^2$ = Flächeninhalt des Daches,

xy = „ „ Pflasters,

x = Kosten der Bedachung u. Pflaster. per Qu.-Fuss in Groschen,

$x(2x^2 + xy)$ = ganze Kosten der Bedachung und Pflasterung.

II. $x(2x^2 + xy) = 50000$

$$\left(\tfrac{1}{4}xy\sqrt{4x^2 - y^2} + 6x^3\right) : xy^2 = 9 : 2 \text{ (aus I.)}$$

$$\tfrac{1}{2}y\sqrt{4x^2 - y^2} + 12x^2 = 9y^2$$

$$\tfrac{1}{2}y\sqrt{4x^2 - y^2} = 9y^2 - 12x^2$$

$$x^2y^2 - \tfrac{1}{4}y^4 = 81y^4 - 216x^2y^2 + 144x^4$$

$$\tfrac{325}{4}y^4 - 217x^2y^2 = -144x^4$$

$$y^4 - \tfrac{868}{325}x^2y^2 = -\tfrac{576}{325}x^4$$

$$y^4 - \frac{868}{325}x^2y^2 + \left(\frac{434}{325}x^2\right)^2 = \frac{188356x^4}{(325)^2} - \frac{576x^4}{325} = \frac{1156x^4}{(325)^2}$$

$$y^2 - \tfrac{434}{325}x^2 = \pm\tfrac{34}{325}x^2$$

$$y^2 = \frac{434 \pm 34}{325}x^2$$

$$y^2 = \tfrac{36}{25}x^2 \text{ oder } = \tfrac{16}{13}x^2$$

III. $$y = \pm\tfrac{6}{5}x \text{ oder } = \pm\frac{4x}{\sqrt{13}}.$$

Da die Dimensionen des Magazins positiv sein müssen, so können nur die oberen Zeichen gelten, und man erhält daher:

IV. $y = \tfrac{6}{5}x$ $\qquad$ $y = \frac{4x}{\sqrt{13}}$

V. $x^2(2x + y) = 50000$ (aus II.)

$x^2(2x + \tfrac{6}{5}x) = 50000$ (IV. in V.) $\qquad$ $x^2\left(2x + \frac{4x}{\sqrt{13}}\right) = 50000$

$x^3(2 + \tfrac{6}{5}) = 50000$ $\qquad$ $x^3\left(2 + \frac{4}{\sqrt{13}}\right) = 50000$

$$x^3 = \frac{50000}{\frac{16}{5}} \qquad\qquad x^3 = \frac{50000}{2+\frac{4}{\sqrt{13}}}$$

$$x^3 = 15625 \qquad\qquad x^3 = \frac{50000\sqrt{13}}{2\sqrt{13}+4}$$

$$\text{*VI.} \quad x = 25 \qquad\qquad x = \sqrt[3]{\tfrac{12500}{9}(26-4\sqrt{13})}$$

$$\text{*VII.} \quad y = \tfrac{6}{5}x = 30 \qquad y = \frac{4x}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}\cdot\sqrt[3]{\tfrac{12500}{9}(26-4\sqrt{13})}.$$

Da die beiden aus $y = \frac{4x}{\sqrt{13}}$ hervorgegangenen Werthe von x und y der ersten Gleichung nur dann Genüge leisten, wenn $\sqrt{4x^2 - y^2}$ negativ angenommen wird, dies aber gegen den praktischen Sinn der Aufgabe stösst, so bleiben die Dimensionen übrig:

$x = 25$ Fuss = Länge des Gebäudes,
$y = 30$ „ = Breite und Höhe des Gebäudes.

Anmerkung. Diese Aufgabe findet sich nicht in der Nagelschen Bearbeitung.

X. Abschnitt.

Aufgaben über arithmetische und geometrische Progressionen.

Nr. 1. Drei Zahlen stehen in arithmetischer Progression; ihre Summe ist = 21 und die Summe der ersten und zweiten verhält sich zur Summe der zweiten und dritten wie 3 : 4. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. $x - y$ = erste Zahl,
x = zweite „
$x + y$ = dritte „
$3x$ = Summe der drei Zahlen.

I. $3x = 21$

$2x - y$ = Summe d. ersten u. zweiten Zahl.
$2x + y$ = „ „ zweiten u. dritten „

II. $(2x - y) : (2x + y) = 3 : 4$

*III. $x = 7$ (aus I.)

IV. $4x : 2y = 2x : y = 7 : 1$ (aus II.)

$14 : y = 7 : 1$ (d. Substit. von III. in IV.)

*V. $y = 2$

$x - y = 5$ = erste Zahl.

$x = 7$ = zweite „

$x + y = 9$ = dritte „

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

z = erste Zahl,

$z + v$ = zweite „

$z + 2v$ = dritte „

$3z + 3v$ = Summe der drei Zahlen.

VI. $3z + 3v = 21$

$2z + v$ = Summe der ersten u. zweiten Zahl;

$2z + 3v$ = „ „ zweiten u. dritten „

VII. $(2z + v) : (2z + 3v) = 3 : 4$

VIII. $z + v = 7$ (aus VI.)

IX. $z = \frac{5}{2}v$ (aus VII.)

$\frac{5}{2}v + v = \frac{7}{2}v = 7$ (IX. in VIII.)

X. $v = 2$

XI. $z = 5$ = erste Zahl.

$z + v = 7$ = zweite „

$z + 2v = 9$ = dritte „

Nr. 2. Sechs Städte, A, B, C, D, E, F, liegen in der Ordnung der Buchstaben so hintereinander, dass die Entfernungen AB, BC, CD, DE, EF eine steigende arithmetische Progression bilden; A ist von C 16 Meilen und C von E 24 Meilen entfernt.

Auflösung. x = Entfernung AB in Meilen,

$x + y$ = „ BC „ „

$x + 2y$ = „ CD „ „

$x + 3y$ = „ DE „ „

$x + 4y$ = „ EF „ „

$2x + y$ = Entfernung AC „ „

I. $2x + y = 16$

$2x + 5y$ = Entfernung CE in Meilen.

II. $2x + 5y = 24$

$4y = 8$ (aus I. und II.)

*III. $y = 2$

$2x + 2 = 16$ (III. in I.)

$2x = 14$

*IV. $x = 7$ Meilen = Entfernung AB,

$x+y = 9$ „ = „ BC,

$x+2y = 11$ „ = „ CD,

$x+3y = 13$ „ = „ DE,

$x+4y = 15$ „ = „ EF.

Nr. 3. Es mischt Jemand dreierlei Weinsorten untereinander, so dass die Quantitäten der einzelnen Sorten eine arithmetische Progression bilden, und die Mischung 51 Maass hält. Die Summe der von den beiden ersten Sorten genommenen Quantitäten verhält sich zur Summe der von der zweiten und dritten Sorte genommenen wie 8 : 9. Wie viel wurde von jeder Sorte genommen?

Auflösung. $x-y$ = Anzahl Maass der ersten Sorte,

x = „ „ „ zweiten „

$x+y$ = „ „ „ dritten „

$3x$ = Anzahl Maass der ganzen Mischung,

I. $3x = 51$

$2x-y$ = Summe der Quantitäten der beiden ersten Sorten,

$2x+y$ = Summe der Quantitäten der beiden letzten Sorten.

II. $(2x-y):(2x+y) = 8:9$

*III. $x = 17$ (aus I.)

IV. $4x:2y = 2x:y = 17:1$ (aus II.)

$34:y = 17:1$ (III. in IV.)

*V. $y = 2$

$x-y = 15$ Maass der ersten Sorte.

$x = 17$ „ „ zweiten „

$x+y = 19$ „ „ dritten „

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

z = Anzahl Maass der ersten Sorte,

$z+v$ = „ „ „ zweiten „

$z+2v$ = „ „ „ dritten „

$3z+3v$ = Anzahl Maass der ganzen Mischung.

VI. $3z+3v = 51$

$2z+v$ = Summe d. Quant. der 2 ersten Sorten.

$2z+3v$ = „ „ „ „ 2 letzten „

VII. $(2z+v):(2z+3v) = 8:9$

VIII. $z+v = 17$ (aus VI.)

IX. $2(z+v):v = 17:1$ (aus VII.)

$34:v = 17:1$ (VIII. in IX.)

X. $v = 2$

XI. $z = 15$ Maass d. ersten Sorte (X. in VIII.)

$z+v = 17$ „ „ zweiten „

$z+2v = 19$ „ „ dritten „

Nr. 4. Eine Zahl besteht aus drei Ziffern, welche eine arithmetische Progression bilden. Wenn man die Zahl durch ihre Ziffern-Summe dividirt, so ist der Quotient = 48; zieht man von der Zahl 198 ab, so erscheint eine zweite Zahl, welche dieselben Ziffern enthält, aber in umgekehrter Ordnung. Wie heisst die Zahl?

Auflösung. $x-y =$ Ziffer an der Stelle der Einer,

$x =$ „ „ „ „ „ Zehner,

$x+y =$ „ „ „ „ „ Hunderter,

$3x =$ Ziffern-Summe,

$x-y+10x+100(x+y) = 111x+99y =$ Zahl selbst.

I. $\frac{111x+99y}{3x} = 48$

$100(x-y)+10x+x+y = 111x-99y =$ Zahl mit umgekehrter Ziffern-Ordnung.

II. $111x+99y-198 = 111x-99y$

$\frac{37x+33y}{x} = 48$ (aus I.)

$37x+33y = 48x$

$33y = 11x$

III. $x = 3y$

$198y = 198$ (aus II.)

*IV. $y = 1$

*V. $x = 3$ (IV. in III.)

$111x+99y = 432 =$ gesuchte Zahl.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$z =$ Ziffer an der Stelle der Einer,

$z+v =$ „ „ „ „ „ Zehner,

$z+2v =$ „ „ „ „ „ Hunderter,

$3z+3v =$ Ziffern-Summe,

$z+10(z+v)+100(z+2v) = 111z+210v =$ Zahl selbst.

VI. $\frac{111z+210v}{3z+3v} = 48$

$$100z+10(z+v)+z+2v = 111z+12v = \text{Zahl mit umgekehrter}$$

VII. $111z+210v-198 = 111z+12v$ Ziffern-Ordnung.

VIII. $z = 2v$ (aus VI.)

IX. $v = 1$ (aus VII.)

X. $z = 2$ (IX. in VIII.)

$$111z+210v = 432 = \text{gesuchte Zahl.}$$

Nr. 5. Es erhält Jemand den Auftrag, auf einem Fruchtmarkte im Ganzen 24 Scheffel Weizen, Hafer und Gerste zu kaufen, und zwar in Quantitäten, welche eine steigende arithmetische Progression bilden. Da er aber keine Gerste bekömmt, so vertheilt er das von dieser Fruchtgattung zu kaufende Quantum auf die beiden andern Sorten, den Weizen und Hafer, im Verhältniss von 2 : 3, wodurch sich das ganze von ihm gekaufte Quantum Weizen zum Quantum Hafer verhält wie 5 : 7. Wie viel Scheffel von jeder Fruchtgattung sollte er anfangs kaufen?

Auflösung.

$x-y$ = Anz. Schfl. Weizen, die gekauft werden sollen,

x = „ „ Hafer „ „ „ „

$x+y$ = „ „ Gerste „ „ „ „

$3x$ = ganzes zu kaufendes Getreide-Quantum.

I. $3x = 24$

$\frac{2}{5}(x+y)$ = Anz. Schfl. Gerste, die dem Weizen zufallen,

$\frac{3}{5}(x+y)$ = „ „ „ „ „ Hafer „

$x-y+\frac{2}{5}(x+y) = \frac{7x-3y}{5}$ = wirklich gek. Quantum Weizen,

$x+\frac{3}{5}(x+y) = \frac{8x+3y}{5}$ = „ „ „ Hafer.

II. $\frac{7x-3y}{5} : \frac{8x+3y}{5} = 5:7$

*III. $x = 8$ (aus I.)

$(7x-3y):(8x+3y) = 5:7$ (aus II.)

$49x-21y = 40x+15y$

IV. $9x = 36y$

*V. $y = \frac{1}{4}x$

$y = 2$ (III. in IV.)

$x-y$ = 6 Schfl. Weizen, die gekauft werden sollen.

x = 8 „ Hafer, „ „ „ „

$x+y$ = 10 „ Gerste, „ „ „ „

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$5z$ = Anzahl zu kaufender Schfl. Gerste,
$5z - v$ = „ „ „ „ Hafer,
$5z - 2v$ = „ „ „ „ Weizen,
$15z - 3v$ = ganzes zu kaufendes Getreide-Quantum.

VI. $15z - 3v = 24$

$2z$ = Anz. Schfl. Gerste, die dem Weizen zufallen,
$3z$ = „ „ „ „ „ Hafer „
$5z - 2v + 2z = 7z - 2v$ = wirklich gek. Quantum Weizen,
$5z - v + 3z = 8z - v$ = „ „ „ Hafer.

VII. $(7z - 2v) : (8z - v) = 5 : 7$

VIII. $5z - v = 8$ (aus I.)

IX. $z = v$ (aus VII.)

$5z - z = 4z = 8$ (IX. in VIII.)

X. $z = v = 2$

$5z - 2v = 6$ Scheffel Weizen,
$5z - v = 8$ „ Hafer,
$5z = 10$ „ Gerste.

Nr. 6. Vier Zahlen stehen in geometrischer Progression; die erste ist grösser als die zweite um 36, und die dritte grösser als die vierte um 4. Wie heissen sie?

Auflösung. x = vierte Zahl,
xy = dritte „
xy^2 = zweite „
xy^3 = erste „

I. $xy^3 - xy^2 = 36$

II. $xy - x = 4$

$y^2 = 9$ (aus I. und II. durch Division)

*III. $y = \pm 3$

$\pm 3x - x = 4$ (III. in II.)

$2x$ oder $-4x = 4$

*IV. $x = 2$ oder $= -1$

$xy^3 = 54$ oder $= +27$ = erste Zahl.
$xy^2 = 18$ oder $= -9$ = zweite „
$xy = 6$ oder $= +3$ = dritte „
$x = 2$ oder $= -1$ = vierte. „

Anmerkung. Eine andere, nur wenig verschiedene Lösung ist folgende:

z = erste Zahl, $\frac{z}{v^2}$ = dritte Zahl,

$\frac{z}{v}$ = zweite „ $\frac{z}{v^3}$ = vierte „

V. $z - \frac{z}{v} = 36$

VI. $\frac{z}{v^2} - \frac{z}{v^3} = 4$

VII. $zv - z = 36v$ (aus V.)

VIII. $zv - z = 4v^3$ (aus VI.)

$4v^3 = 36v$ (aus VII. und VIII.)

IX. $v = \pm 3$

$3z - z = 108$ (IX. in VII.) $-3z - z = -108$

X. $z = 54$ $z = 27$

woraus sich die Zahlen von selbst wie oben ergeben.

Nr. 7. Es hatte Jemand drei Gehülfen zur Ausführung einer Arbeit angenommen, denen er nach Verhältniss ihrer Leistungen verschiedenen Wochenlohn gab, in der Art, dass der Lohn des ersten, zweiten und dritten eine arithmetische Progression bildete. Er benützte sie so viele Wochen lang, als der zweite Gulden zum Wochenlohn erhielt, und hatte ihnen dann im Ganzen 147 fl. zu bezahlen, wobei der dritte 28 fl. mehr bekam als der erste. Was war der Wochenlohn eines Jeden?

Auflösung.

$x - y$ = Wochenlohn des ersten Arbeiters in fl.,

x = „ „ zweiten „ „ „

und = Anzahl Arbeitswochen,

$x + y$ = Wochenlohn des dritten Arbeiters in fl.,

$3x$ = Gesammt-Wochenlohn der drei Arbeiter in fl.,

$x . 3x = 3x^2$ = Gesammt-Lohn derselben.

I. $3x^2 = 147$

$x + y - (x - y) = 2y$ = Anzahl Gulden, um welche der dritte Arbeiter wöchentlich mehr erhält als der erste.

$x . 2y = 2xy$ = Anz. Gulden, um welche er im Ganzen mehr erh.

II. $2xy = 28$

$x^2 = 49$ (aus I.)

*III. $x = \pm 7$

$$14y = 28 \text{ (III. in II.)}$$

*IV. $y = 2$

$x - y = 5$ fl. = Wochenlohn des ersten Arbeiters.

$x = 7$ „ = „ „ zweiten „

$x + y = 9$ „ = „ „ dritten „

Anmerkung. Eine andere, nur wenig verschiedene Lösung ist folgende: z = Wochenlohn des ersten Arbeiters in fl.,

$z + v$ = „ „ zweiten „ „ „

$z + v$ = Anzahl Arbeitswochen,

$z + 2v$ = Wochenlohn des dritten Arbeiters in fl.,

$3z + 3v$ = Wochenlohn der drei Arb. zusammen in fl.,

$(z+v) \cdot 3(z+v) = 3(z+v)^2$ = Gesammtlohn derselben.

V. $3(z+v)^2 = 147$

$2v$ = wöchentl. Mehrverdienst des dritten vor dem ersten Arbeiter in fl.,

$(z+v) \cdot 2v$ = Gesammt-Mehrverdienst desselben.

VI. $2v \cdot (z+v) = 28$

VII. $z + v = \pm 7$ (aus V.)

$2v = \pm 4$ (aus VI. und VII.)

VIII. $v = \pm 2$

IX. $z = \pm 5$ (VIII. in VII.)

$z = 5$ fl. = Wochenlohn des ersten Arbeiters.

$z + v = 7$ „ = „ „ zweiten „

$z + 2v = 9$ „ = „ „ dritten „

Nr. 8. Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; die Summe der ersten und zweiten ist = 9, die Summe der ersten und dritten aber = 15. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. x = erste Zahl,

xy = zweite „

xy^2 = dritte „

I. $x + xy = 9$

II. $x + xy^2 = 15$

III. $x = \frac{9}{1+y}$ (aus I.)

IV. $x = \frac{15}{1+y^2}$ (aus II.)

$$\frac{9}{1+y} = \frac{15}{1+y^2} \text{ (aus III. und IV.)}$$

$$\frac{3}{1+y} = \frac{5}{1+y^2}$$
$$3+3y^2 = 5+5y$$
$$3y^2-5y = 2$$
$$y^2-\tfrac{5}{3}y = \tfrac{2}{3}$$
$$y^2-\tfrac{5}{3}y+(\tfrac{5}{6})^2 = \tfrac{2}{3}+\tfrac{25}{36} = \tfrac{49}{36}$$
$$y-\tfrac{5}{6} = \pm\tfrac{7}{6}$$
$$y = \frac{5\pm 7}{6}$$

*V. $$= 2 \text{ oder } = -\tfrac{1}{3}$$

*VI. $$x = \frac{9}{1+y} = 3 \text{ oder } = \tfrac{27}{2} = \text{erste Zahl,}$$
$$xy = 6 \text{ oder } = -\tfrac{9}{2} = \text{zweite ,,}$$
$$xy^2 = 12 \text{ oder } = \tfrac{3}{2} = \text{dritte ,,}$$

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$$x = \text{erste Zahl,}$$
$$9-x = \text{zweite ,,}$$
$$\frac{9-x}{x} = \text{Exponent der Progression,}$$
$$x.\left(\frac{9-x}{x}\right)^2 = \frac{(9-x)^2}{x} = \text{dritte Zahl,}$$
$$x+\frac{(9-x)^2}{x} = \text{Summe der ersten und dritten Zahl,}$$
$$x+\frac{(9-x)^2}{x} = 15$$
$$x^2-\tfrac{33}{2}x = -\tfrac{81}{2}$$
$$x = \frac{33\pm 21}{4}$$
$$x = \tfrac{27}{2} \text{ oder } = 3 = \text{erste Zahl.}$$
$$9-x = -\tfrac{9}{2} \text{ oder } = 6 = \text{zweite ,,}$$
$$\frac{(9-x)^2}{x} = \tfrac{3}{2} \text{ oder } = 12 = \text{dritte ,,}$$

Nr. 9. Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; ihre Summe ist = 14 und die Summe der ersten und zweiten ist die Hälfte von der Summe der zweiten und dritten. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. $$x = \text{erste Zahl,}$$
$$xy = \text{zweite ,,}$$
$$xy^2 = \text{dritte ,,}$$

I. $x+xy+xy^2 = 14$

II. $x+xy = \frac{xy+xy^2}{2}$

$1 = \frac{1}{2}y$ (aus II. d. Divis. mit $x+xy$)

* III. $y = 2$

$x+2x+4x = 7x = 14$ (III. in I.)

* IV. $x = 2$ = erste Zahl.

$xy = 4$ = zweite „

$xy^2 = 8$ = dritte „

Nr. 10. Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; die Summe ihrer Kuben ist $= 584$ und das Produkt diesen drei Zahlen ist $= 64$. Wie heissen sie?

Auflösung. $\frac{x}{y}$ = erste Zahl,

x = zweite „

xy = dritte „

x^3 = Produkt der drei Zahlen.

I. $x^3 = 64$

$\frac{x^3}{y^3}+x^3+x^3y^3$ = Summe der Kuben der drei Zahlen.

II. $x^3\left(\frac{1}{y^3}+1+y^3\right) = 584$

* III. $x = 4$ (aus I.)

$64\left(\frac{1}{y^3}+1+y^3\right) = 584$ (III. in II.)

$$\frac{1}{y^3}+1+y^3 = \frac{73}{8}$$

$$\frac{1}{y^3}+y^3 = \frac{65}{8}$$

$$y^6+1 = \frac{65}{8}y^3$$

$$y^6-\frac{65}{8}y^3 = -1$$

$$y^6-\frac{65}{8}y^3+(\tfrac{65}{16})^2 = \frac{4225}{256}-1 = \frac{3969}{256}$$

$$y^3-\frac{65}{16} = \pm\frac{63}{16}$$

$$y^3 = \frac{65\pm 63}{16}$$

$y^3 = 8$ oder $= \frac{1}{8}$

* IV. $y = 2$ oder $= \frac{1}{2}$

$\frac{x}{y} = 2$ oder $= 8$ = erste Zahl,

$x = 4$ = zweite „

$xy = 8$ oder $= 2$ = dritte „

Anmerkung. Nimmt man die drei Zahlen zu z, zv, zv^2 an, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{I.} \quad z^3v^3 = 64$$

$$\text{II.} \quad z^3 + z^3v^3 + z^3v^6 = 584$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{III.} & z^3 = \frac{64}{v^3} \\ \text{IV.} & zv = 4\end{array}\right\} \text{(aus I.)}$$

$$\frac{64}{v^3}(1+v^3+v^6) = 584 \text{ (III. in II.)}$$

$$1+v^3+v^6 = \tfrac{73}{8}v^3$$

$$v^6 - \tfrac{65}{8}v^3 = -1, \text{ woraus wie oben folgt:}$$

$$v^3 = 8 \text{ oder } = \tfrac{1}{8} \text{ und}$$

$$\text{V.} \quad v = 2 \text{ oder } = \tfrac{1}{2}$$

$$2z \text{ oder } \tfrac{1}{2}z = 4 \quad \text{(V. in IV.)}$$

$$\text{VI.} \quad z = 2 \text{ oder } = 8 = \text{erste Zahl,}$$

$$zv = 4 \qquad = \text{zweite ,,}$$

$$zv^2 = 8 \text{ oder } = 2 = \text{dritte ,,}$$

Nr. 11. Vier Zahlen stehen in geometrischer Progression; die Summe der ersten und vierten verhält sich zur Summe der zweiten und dritten wie 7 : 3, und die zweite ist kleiner als die vierte um 24. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. x = erste Zahl,

xy = zweite ,,

xy^2 = dritte ,,

xy^3 = vierte ,,

$x(1+y^3)$ = Summe der ersten und vierten Zahl,

$xy(1+y)$ = ,, ,, zweiten und dritten ,,

$$\text{I.} \quad x(1+y^3) : xy(1+y) = 7 : 3$$

$$\text{II.} \quad xy^3 - xy = 24$$

$$(1-y+y^2) : y = 7 : 3 \text{ [aus I. d. Divis. mit } x(1+y)\text{],}$$

$$3 - 3y + 3y^2 = 7y$$

$$3y^2 - 10y = -3$$

$$y^2 - \tfrac{10}{3}y = -1$$

$$y^2 - \tfrac{10}{3}y + (\tfrac{5}{3})^2 = \tfrac{25}{9} - 1 = \tfrac{16}{9}$$

$$y - \tfrac{5}{3} = \pm\tfrac{4}{3}$$

$$y = \frac{5 \pm 4}{3}$$

$$\text{*III.} \quad y = 3 \text{ oder } = \tfrac{1}{3}$$

$$x(27-3) \text{ oder } x(\tfrac{1}{27}-\tfrac{1}{3}) = 24 \quad \text{(III in II.).}$$
$$24x \text{ oder } -\tfrac{8}{27}x = 24$$

$$\text{*IV.} \quad \begin{aligned} x &= 1 \text{ oder } = -81 = \text{erste Zahl.} \\ xy &= 3 \text{ oder } = -27 = \text{zweite ,,} \\ xy^2 &= 9 \text{ oder } = -\ 9 = \text{dritte ,,} \\ xy^3 &= 27 \text{ oder } = -\ 3 = \text{vierte ,,} \end{aligned}$$

Nr. 12. Von zwei Städten, welche 168 Meilen von einander entfernt sind, reisen zwei Personen, *A* und *B*, zu gleicher Zeit aus, um einander entgegen zu gehen; *A* macht am ersten Tage 3 Meilen, am zweiten 5, am dritten 7 und so jeden Tag 2 Meilen mehr als den vorhergehenden. *B* macht am ersten Tag 4 Meilen, am zweiten 6 und so ebenfalls jeden Tag 2 Meilen weiter als am vorhergehenden. In wie viel Tagen begegnen sie einander?

Auflösung. x = Anz. Tage, nach denen sie sich begegnen;

$\frac{1}{2}x[2.3+(x-1)2] = x(2+x)$ = Anzahl Meilen, die *A* in dieser Zeit zurücklegt, da seine täglichen Wegstrecken die Glieder einer arithmetischen Progression, und die Summe dieser letztern gleich $S = \frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$, worin das erste Glied $a = 3$; die Differenz $d = 2$ und die Gliederzahl $n = x$ ist;

$\frac{1}{2}x[2.4+(x-1)2] = x(3+x)$ = Anzahl Meilen, die *B* zurücklegt, da für denselben in der nämlichen allgemeinen Summenformel $a = 4$; $d = 2$ und $n = x$ ist;

$x(2+x)+x(3+x) = 5x+2x^2$ = Entfernung der beiden Städte in Meilen.

$$5x+2x^2 = 168$$
$$x^2+\tfrac{5}{2}x = 84$$
$$x^2+\tfrac{5}{2}x+(\tfrac{5}{4})^2 = 84+\tfrac{25}{16} = \tfrac{1369}{16}$$
$$x+\tfrac{5}{4} = \pm\tfrac{37}{4}$$
$$x = \frac{-5\pm 37}{4}$$
$$x = 8 \text{ oder } = -\tfrac{21}{2}.$$
$$x = 8 \text{ Tage.}$$

Nr. 13[a]. *A* und *B* reisen zu gleicher Zeit von hier ab und zwar mit der Absicht, um die Welt herumzureisen, indem der eine nach Osten, der andere nach Westen geht. In wie viel Tagen begegnen sie sich, und wie viele Meilen hat jeder von ihnen bei der Begegnung zurückgelegt, wenn *A* den ersten Tag 1, den zweiten

Tag 2 Meilen u. s. f., *B* aber täglich 20 Meilen zurücklegt, und wenn der Umkreis der Erde 23661 Meilen beträgt?

Auflösung. x = Anz. Tage, nach denen sie sich begegnen;

$\frac{1}{2}x(x+1)$ = Anz. Meilen, die *A* bei d. Begegn. zurückgelegt hat, indem in der Summenformel $s = \frac{1}{2}n(a+t)$, $n = x = t$, $a = 1$ ist;

$20x$ = Anz. Meilen, die *B* bei der Begegnung zurückgelegt hat.

$$\frac{1}{2}x(x+1)+20x = 23661$$
$$x^2+x+40x = 47322$$
$$x^2+41x+(\tfrac{41}{2})^2 = 47322+\tfrac{1681}{4} = \tfrac{190969}{4}$$
$$x+\tfrac{41}{2} = \pm\tfrac{437}{2}$$
$$x = \frac{-41\pm 437}{2}$$
$$= 198 \text{ oder } = -239$$

x = 198 Tage, nach denen sie sich begegnen;

$20x$ = 3960 Meilen, die *B* gemacht hat..

$23661-20x=\frac{1}{2}x(x+1)$ = 19701 „ „ *A* „ „

Anmerkung. Diese Aufgabe findet sich nicht in der Nagelschen Bearbeitung.

Nr. 13[b]. Ein Reisender geht von einem gewissen Orte aus, und macht am ersten Tag 1 Meile, am zweiten 3, am dritten 5 u. s. w., überhaupt jeden folgenden Tag 2 Meilen mehr als am vorhergehenden. 3 Tage später reist ihm Jemand nach, um ihn einzuholen, und macht am ersten Tage 12, am zweiten 13 Meilen u. s. w., überhaupt jeden folgenden Tag 1 Meile mehr als den vorhergehenden. Nach wie viel Tagen wird der zweite den ersten einholen?

Auflösung.

x = Anz. Tage, nach denen der zweite Reis. den ersten einholt;

$x+3$ = Anz. Tage, die der erste Reisende unterwegs ist, bis er vom zweiten eingeholt wird;

$\frac{x+3}{2}[2.1+(x+3-1).2] = (x+3)^2$ = Anzahl Meilen, die der erste Reisende gemacht hat, als er eingeholt wird, indem in der Formel $S = \frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$ für $a = 3$, $d = 2$ und $n = x+3$ gesetzt wurde;

$\frac{1}{2}x[2.12+(x-1)] = \frac{1}{2}x(23+x)$ = Anzahl Meilen, die der zweite Reisende bei der Begegnung zurückgelegt hat, indem in der nämlichen Formel $a = 12$, $d = 1$, $n = x$ ist.

$$(x+3)^2 = \tfrac{1}{2}x(23+x)$$
$$x^2+6x+9 = \tfrac{23}{2}x+\tfrac{1}{2}x^2$$
$$\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{11}{2}x = -9$$
$$x^2-11x = -18$$
$$x^2-11x+(\tfrac{11}{2})^2 = \tfrac{121}{4}-18 = \tfrac{49}{4}$$
$$x-\tfrac{11}{2} = \pm\tfrac{7}{2}$$
$$x = \frac{11\pm7}{2}$$
$$x = 9 \text{ oder } = 2 \text{ Tage.}$$

Anmerkung. Nimmt man als ursprüngliche Haupt-Unbekannte y die Anzahl Tage, die der erste Reisende bis zur Begegnung unterwegs ist, an, so ist:

$y-3$ = Anzahl Tage, die der zweite Reisende bis zur Begegnung unterwegs ist;

$\tfrac{1}{2}y[2.1+(y-1)2] = y^2$ = Weg des ersten Reisenden in Meilen;

$\frac{y-3}{2}[2.12+(y-3-1)] = \frac{(y-3)(20+y)}{2}$ = Weg des zweiten Reisenden in Meilen.

$$y^2 = \frac{(y-3)(20+y)}{2}$$
$$y^2-17y = -60$$
$$y = \frac{17\pm7}{2}$$
$$= 12 \text{ oder } = 5.$$

Die beiden positiven Werthe bedeuten, dass 2 Tage nach Abreise des zweiten Reisenden dieser letztere den ersten einholt, dass er selbst aber am neunten Tage nach seiner Abreise von dem ersten Reisenden wieder eingeholt wird.

Nr. 14. Vier Zahlen stehen in arithmetischer Progression; ihre Summe ist $= 28$ und das Produkt aller vier Zahlen ist $= 585$. Wie heissen dieselben?

Auflösung. $x-3y$ = erste Zahl,
$x-y$ = zweite „
$x+y$ = dritte „
$x+3y$ = vierte „
$4x$ = Summe der vier Zahlen,
$(x^2-9y^2)(x^2-y^2)$ = Produkt derselben.

I. $4x = 28$

II. $(x^2-9y^2)(x^2-y^2) = 585$

$$*\text{III.}\quad x = 7 \text{ (aus I.)}$$
$$x^4 - 9y^2x^2 - y^2x^2 + y^4 = 585 \text{ (aus II.)}$$
$$\text{IV.}\quad x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4 = 585$$
$$2401 - 490y^2 + 9y^4 = 585 \text{ (III. in IV.)}$$
$$9y^4 - 490y^2 = -1816$$
$$y^4 - \tfrac{490}{9}y^2 = -\tfrac{1816}{9}$$
$$y^4 - \tfrac{490}{9}y^2 + (\tfrac{245}{9})^2 = \tfrac{60025}{81} - \tfrac{1816}{9} = \tfrac{43681}{81}$$
$$y^2 - \tfrac{245}{9} = \pm\tfrac{209}{9}$$
$$y^2 = \frac{245 \pm 209}{9}$$
$$y^2 = \tfrac{454}{9} \text{ oder } = 4$$
$$*\text{V.}\quad y = \pm\tfrac{1}{3}\sqrt{454} \text{ oder } = \pm 2$$
$$x - 3y = 7 \mp \sqrt{454} \text{ oder } = 1 \text{ oder } = 13 = \text{erste Zahl.}$$
$$x - y = 7 \mp \tfrac{1}{3}\sqrt{454} \text{ oder } = 5 \text{ oder } = 9 = \text{zweite „}$$
$$x + y = 7 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{454} \text{ oder } = 9 \text{ oder } = 5 = \text{dritte „}$$
$$x + 3y = 7 \pm \sqrt{454} \text{ oder } = 13 \text{ oder } = 1 = \text{vierte „}$$

Nr. 15. Vier Zahlen stehen in arithmetischer Progression; die Summe der Quadrate der ersten und zweiten ist = 34 und die Summe der Quadrate der dritten und vierten = 130. Wie heissen die Zahlen?

Auflösung. $x - 3y$ = erste Zahl.
$x - y$ = zweite „
$x + y$ = dritte „
$x + 3y$ = vierte „

$$\text{I.}\quad (x - 3y)^2 + (x - y)^2 = 34$$
$$\text{II.}\quad (x + y)^2 + (x + 3y) = 130$$
$$x^2 - 6xy + 9y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 34 \text{ (aus I.)}$$
$$\text{III.}\quad 2x^2 - 8xy + 10y^2 = 34$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 6xy + 9y^2 = 130 \text{ (aus II.)}$$
$$\text{IV.}\quad 2x^2 + 8xy + 10y^2 = 130$$
$$4x^2 + 20y^2 = 164 \text{ (aus III. und IV.)}$$
$$\text{V.}\quad x^2 + 5y^2 = 41$$
$$16xy = 96 \text{ (aus III. und IV.)}$$
$$\text{VI.}\quad y = \frac{6}{x}$$
$$x^2 + \frac{180}{x^2} = 41 \text{ (VI. in V.)}$$
$$x^4 + 180 = 41x^2$$

$$x^4 - 41x^2 = -180$$

$$x^4 - 41x^2 + \left(\tfrac{41}{2}\right)^2 = \tfrac{1681}{4} - 180 = \tfrac{961}{4}$$

$$x^2 - \tfrac{41}{2} = \pm \tfrac{31}{2}$$

$$x^2 = \frac{41 \pm 31}{2}$$

$$= 36 \text{ oder } = 5$$

* VII. $x = \pm 6 \text{ oder } = \pm \sqrt{5}$

* VIII. $y = \pm 1 \text{ oder } = \pm \tfrac{6}{5}\sqrt{5}$ (VII. in VI.)

$$x - 3y = \pm 3 \text{ oder } = \mp \tfrac{13}{5}\sqrt{5} = \text{erste Zahl.}$$

$$x - y = \pm 5 \text{ oder } = \mp \tfrac{1}{5}\sqrt{5} = \text{zweite „}$$

$$x + y = \pm 7 \text{ oder } = \mp \tfrac{11}{5}\sqrt{5} = \text{dritte „}$$

$$x + 3y = \pm 9 \text{ oder } = \pm \tfrac{23}{5}\sqrt{5} = \text{vierte „}$$

Anmerkung. Man erhält auch aus Gleichung VI.:

IX. $x = \dfrac{6}{y}$

$$\frac{36}{y^2} + 5y^2 = 41 \text{ (IX. in V.)}$$

$$y^4 - \tfrac{41}{5}y^2 = -\tfrac{36}{5}$$

$$y^2 = \frac{41 \pm 31}{10}$$

$$= \tfrac{36}{5} \text{ oder } = 1$$

X. $y = \pm \tfrac{6}{5}\sqrt{5} \text{ oder } = \pm 1$

XI. $x = \pm \sqrt{5} \text{ oder } = \pm 6$ (X. in IX.)

woraus das Uebrige von selbst wie oben folgt.

Eine andere Auflösung ist folgende:

$$z = \text{erste Zahl,}$$

$$z + v = \text{zweite „}$$

$$z + 2v = \text{dritte „}$$

$$z + 3v = \text{vierte „}$$

XII. $z^2 + (z+v)^2 = 34$

XIII. $(z+2v)^2 + (z+3v)^2 = 130$

XIV. $2z^2 + 2zv + v^2 = 34$ (aus XII.)

XV. $2z^2 + 10zv + 13v^2 = 130$ (aus XIII.)

$$8zv + 12v^2 = 96 \text{ (aus XIV. und XV.)}$$

XVI. $z = \dfrac{3(8 - v^2)}{2v}$

XVII. $10z^2 + 10zv + 5v^2 = 170$ (aus XIV.)

XVIII. $z^2 - v^2 = 5$ (aus XV. und XVII.)

$$\frac{9(64 - 16v^2 + v^4)}{4v^2} - v^2 = 5 \text{ (XVI. in XVIII.)}$$

$$v^4 - \tfrac{164}{5}v^2 = -\tfrac{576}{5}$$

$$v^2 = \frac{82 \pm 62}{5}$$

$$= \tfrac{144}{5} \text{ oder } = 4$$

XIX. $v = \pm \tfrac{12}{5}\sqrt{5}$ oder $= \pm 2$

$$z = \frac{3(8 - v^2)}{2v}$$

XX. $= \mp \tfrac{13}{5}\sqrt{5}$ oder $= \pm 3$ = erste Zahl.

$z + v = \mp \tfrac{1}{5}\sqrt{5}$ oder $= \pm 5$ = zweite „

$z + 2v = \pm \tfrac{11}{5}\sqrt{5}$ oder $= \pm 7$ = dritte „

$z + 3v = \pm \tfrac{23}{5}\sqrt{5}$ oder $= \pm 9$ = vierte „

Auch kann man folgendermaassen verfahren:

XXI. $26z^2 + 26zv + 13v^2 = 442$ (aus XIV.)

$24z^2 + 16zv = 312$ (aus XV. und XXI.)

XXII. $$v = \frac{3(13 - z^2)}{2z}$$

$$z^2 - \frac{9(169 - 26z^2 + z^4)}{4z^2} = 5 \text{ (XXII. in XVIII.)}$$

$$z^4 - \tfrac{214}{5}z^2 = -\tfrac{1521}{5}$$

$$z^2 = \frac{107 \pm 62}{5}$$

$$= \tfrac{169}{5} \text{ oder } = 9$$

XXIII. $z = \pm \tfrac{13}{5}\sqrt{5}$ oder $= \pm 3$

XXIV. $v = \dfrac{3(13 - z^2)}{2z} = \pm \tfrac{12}{5}\sqrt{5}$ oder $= \pm 2$

woraus sich nun das Uebrige von selbst wie oben ergiebt.

Nr. 16. Die Summe von 700 fl. wurde unter vier Personen, *A*, *B*, *C*, *D*, so vertheilt, dass die einzelnen Antheile eine geometrische Progression bildeten. Die Differenz der Antheile von *A* und *D* verhielt sich zur Differenz der Antheile von *B* und *C* wie 37 : 12. Wie viel bekam jeder?

Auflösung. xy^3 = Antheil des *A*,

xy^2 = „ „ *B*,

xy = „ „ *C*,

x = „ „ *D*,

$\dfrac{x(y^4 - 1)}{y - 1}$ = Summe aller vier Antheile, nach der

allgemeinen Summenformel $S = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$, in welcher a das erste Glied, e den Exponenten und n die Gliederzahl bedeutet.

$$\text{I.} \quad \frac{x(y^4 - 1)}{y - 1} = 700$$

$$xy^3 - x = \text{Differenz der Antheile von } A \text{ und } D,$$

$$xy^2 - xy = \text{,, ,, ,, ,, } B \text{ und } C.$$

$$\text{II.} \quad (xy^3 - x):(xy^2 - xy) = 37 : 12$$

$$(y^2 + y + 1) : y = 37 : 12 \quad [\text{aus II. d. Div. mit } x(y-1)]$$

$$12y^2 + 12y + 12 = 37y$$

$$12y^2 - 25y = -12$$

$$y^2 - \tfrac{25}{12}y = -1$$

$$y^2 - \tfrac{25}{12}y + (\tfrac{25}{24})^2 = \tfrac{625}{576} - 1 = \tfrac{49}{576}$$

$$y - \tfrac{25}{24} = \pm \tfrac{7}{24}$$

$$y = \frac{25 \pm 7}{24}$$

$$\text{* III.} \quad = \tfrac{4}{3} \text{ oder } = \tfrac{3}{4}$$

$$\frac{x(\frac{256}{81} - 1)}{\frac{4}{3} - 1} \text{ oder } \frac{x(\frac{81}{256} - 1)}{\frac{3}{4} - 1} = 700 \text{ (III. in I.)}$$

$$\tfrac{175}{27}x \text{ oder } \tfrac{175}{64}x = 700$$

$$\text{* IV.} \quad x = 108 \text{ oder } = 256 \text{ fl.} = \text{Antheil des } D,$$

$$xy = 144 \text{ oder } = 192 \text{ fl.} = \text{,, ,, } C,$$

$$xy^2 = 192 \text{ oder } = 144 \text{ fl.} = \text{,, ,, } B,$$

$$xy^3 = 256 \text{ oder } = 108 \text{ fl.} = \text{,, ,, } A.$$

Anmerkung. Dieselben Resultate ergeben sich, wenn man im ursprünglichen Ansatz die Antheile des A, B, C, D zu x, xy, xy^2, xy^3 fl. annimmt.

Nr. 17. Eine Anzahl von Kugeln ist in der Form eines ausgefüllten gleichseitigen Dreiecks gelegt; eine um 5 grössere Anzahl Kugeln von gleicher Grösse wie die vorigen bildet die Form eines ausgefüllten Rechtecks, dessen grössere Seite ebenso viele Kugeln enthält, wie die Basis des Dreiecks, die kleinere aber 4 weniger. Wie viel Kugeln liegen im Dreieck, und wie viele im Reckteck?

Auflösung.

x = Anzahl Kugeln in der Grundlinie des Dreiecks;

und auch = Anzahl auf einander folgender Reihen Kugeln im Dreieck, von denen jede um eine Kugel weniger als die vorhergehende, die letzte an der Spitze aber nur mehr eine Kugel enthält;

und auch = Anzahl Kugeln der grössern Rechtecks-Seite;
$\frac{1}{2}x(x+1)$ = Anzahl Kugeln im Dreieck nach der Summenformel der arithmetischen Progressionen $S=\frac{1}{2}n(a+t)$ oder $S=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$, in denen a das erste Glied $=x$, t das letzte Glied $=1$, n die Anzahl Glieder $=x$ und d die Differenz $=-1$ bedeutet;
$x-4$ = Anzahl Kugeln der kleinern Rechtecks-Seite;
$x(x-4)$ = Anzahl Kugeln im Rechteck;
aber auch $\frac{1}{2}x(x+1)+5$ = Anzahl Kugeln im Rechteck.

$$x(x-4) = \tfrac{1}{2}x(x+1)+5$$
$$2x^2-8x = x^2+x+10$$
$$x^2-9x = 10$$
$$x^2-9x+(\tfrac{9}{2})^2 = \tfrac{81}{4}+10 = \tfrac{121}{4}$$
$$x-\tfrac{9}{2} = \pm\tfrac{11}{2}$$
$$x = \frac{9\pm 11}{2}$$
$$= 10 \text{ oder } = -1$$
$$x = 10$$

$\frac{1}{2}x(x+1)$ = 55 Kugeln, die im Dreieck liegen.
$\frac{1}{2}x(x+1)+5$ oder $x(x-4)$ = 60 „ „ „ Rechteck „

Nr. 18. Fünf Personen übernehmen die Ausgrabung von 87 Kubikruthen Erde, und wurden zusammen fertig in 60 Tagen. Die Zahlen der Tage, in welchen jeder für sich allein eine Kubikruthe auszugraben im Stande wäre, bilden eine arithmetische Progression von 5 Gliedern, deren Summe = 20 ist. Wie lange braucht jeder Einzelne zur Ausgrabung einer Kubikruthe?

Auflösung.

$x-2y$ = Zeit des Ersten z. Ausgraben einer Kub.-R. in Tagen,
$x-y$ = „ „ Zweiten „ „ „ „ „ „
x = „ „ Dritten „ „ „ „ „ „
$x+y$ = „ „ Vierten „ „ „ „ „ „
$x+2y$ = „ „ Fünften „ „ „ „ „ „
$5x$ = Summe dieser fünf Glieder.

I. $5x = 20$

$\frac{1}{x-2y}$ = Anzahl Kub.-R., die der Erste täglich aushebt,

$\frac{1}{x-y}$ = „ „ „ „ Zweite „ „

$\frac{1}{x}$ = Anzahl Kub.-R., die der Dritte täglich aushebt,

$\frac{1}{x+y}$ = „ „ „ „ Vierte „ „

$\frac{1}{x+2y}$ = „ „ „ „ Fünfte „ „

$60 \cdot \left(\frac{1}{x-2y}+\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+2y}\right)$ = Anzahl Kub.-R., die alle 5 Arbeiter zusammen in 60 Tagen ausheben.

II. $60\left(\frac{1}{x-2y}+\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+2y}\right) = 87$

* III. $x = 4$ (aus I.)

$$60\,[(x^2+2xy)(x^2-y^2)+(x^2-4y^2)(x^2+xy)$$
$$+(x^2-y^2)(x^2-4y^2)+(x^2-4y^2)(x^2-xy) = 87x(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$$
$$+(x^2-y^2)(x^2-2xy)] \qquad \text{(aus II.)}$$

$$60\,[2x^2(2x^2-5y^2)+(x^2-y^2)(x^2-4y^2)] = 87x(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$$

IV. $120x^2(2x^2-5y^2) = (87x-60)(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$

$$120x^2(2x^2-5y^2) = (348-60)(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$$
(III. in IV.)

$$5x^2(2x^2-5y^2) = 12(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$$
$$10x^4-25x^2y^2 = 12x^4-12x^2y^2-48x^2y^2+48y^4$$
$$2x^4 = 35x^2y^2-48y^4$$

V. $y^4-\frac{35}{48}x^2y^2 = -\frac{1}{24}x^4$

$$y^4-\frac{35}{3}y^2 = -\frac{32}{3} \quad \text{(III. in V.)}$$
$$y^4-\frac{35}{3}y^2+\left(\frac{35}{6}\right)^2 = \frac{1225}{36}-\frac{32}{3} = \frac{841}{36}$$
$$y^2-\frac{35}{6} = \pm\frac{29}{6}$$
$$y^2 = \frac{35\pm 29}{6}$$
$$= \frac{32}{3} \text{ oder } = 1$$

* VI. $y = \pm 4\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ oder $= \pm 1$.

Der erste Werth ist unbrauchbar, indem sonst $x \mp 2y$ negativ würde; daher bleibt uns:

$x-2y = 2$ oder $= 6$	Tage,	die der	Erste braucht.
$x-y = 3$ oder $= 5$	„	„ „	Zweite „
$x = 4$	„	„ „	Dritte „
$x+y = 5$ oder $= 3$	„	„ „	Vierte „
$x+2y = 6$ oder $= 2$	„	„ „	Fünfte „

Nr. 19. Es hat Jemand ein Fässchen von 24 Maass reinem Weingeist, zieht zuerst ein gewisses Quantum davon ab, und füllt

es hierauf mit Wasser auf; von der Mischung lässt er wieder ein anderes Quantum ab, und füllt hierauf wieder das Fässchen mit Wasser auf. Wenn nun der in dem Fässchen jetzt enthaltene Branntwein nur den sechsten Theil des ursprünglichen Gehaltes hat, und wenn der beim ersten Abzapfen erhaltene Weingeist, der beim zweiten Ablassen erhaltene reine Weingeist, und der im Fässchen zurückgebliebene reine Weingeist eine abnehmende arithmetische Progression bilden, bei welcher die Differenz zwischen den Quadraten der beiden äussersten Glieder gleich ist dem 16fachen mittlern Gliede, wie viel Flüssigkeit wurde jedes Mal abgelassen?

Auflösung.

$\frac{24}{6} = 4 =$ Anzahl Maass reinen Weingeistes, die nach dem zweiten Abzapfen im Fass bleiben;

$4+x =$ Anzahl Maass reinen Weingeistes, die beim zweiten Abzapfen herausgenommen wurden;

$4+2x =$ Anzahl Maass reinen Weingeistes, die beim ersten Abzapfen herausgenommen wurden;

$(2x+4)^2-16 =$ Differ. der Quadr. d. äussern Glieder dieser Progr.;

$16(x+4) =$ 16faches mittleres Glied derselben;

$24-(2x+4) = 20-2x =$ Anzahl Maass reinen Weingeistes, die nach dem ersten Abzapfen im Fass bleiben, und mit Wasser wieder auf 24 Maass aufgefüllt w.;

$\frac{20-2x}{24} = \frac{10-x}{12} =$ Anzahl Maass reinen Weingeistes, die nach dem ersten Abzapfen und Auffüllen in einer Maass Mischung enthalten sind;

$\frac{x+4}{\frac{10-x}{12}} = \frac{12(x+4)}{10-x} =$ Anzahl Maass Mischung, die beim zweiten Abzapfen herausgenommen wurden und in denen $x+4$ Maass reinen Weingeists enth. sind.

$$(2x+4)^2-16 = 16(x+4)$$
$$4x^2+16x+16-16 = 16x+64$$
$$4x^2 = 64$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4.$$

Der zweite Werth $x = -4$ ist unmöglich, indem sonst beim zweiten Abzapfen $x+4 = 0$ Maass reinen Weingeists herausgenommen würden, daher bleibt:

$2x+4 = 12$ Maass reinen Weing., die das erste Mal herausgen. w.;

$\frac{12(x+4)}{10-x}$ = 16 Maass Misch., die das zweite Mal herausgen. w.;

$x+4$ = 8 Maass reinen Weingeists, die in diesen 16 Maass Mischung enthalten sind.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

y = Anzahl Maass reinen Weingeists, die das erste Mal abgelassen werden (erstes Glied der Progression);

$24-y$ = Anzahl Maass reinen Weingeists, die nach dem ersten Abzapfen im Fass bleiben u. mit Wasser aufgef. w.;

$\frac{24-y}{24}$ = Anzahl Maass reinen Weingeists, die in einer Maass dieser Mischung enthalten sind;

z = Anzahl Maass Misch., die das zweite Mal abgelassen w.;

$z \cdot \frac{24-y}{24}$ = Anzahl Maass reinen Weingeists, die in diesen z Maass Mischung enthalten sind (zweites Glied der Progr.);

$24-y-\frac{1}{24}z(24-y) = (24-y)(1-\frac{1}{24}z)$ = Anzahl Maass reinen Weingeistes, die im Fass bleiben (drittes Glied der Progression).

I. $(24-y)(1-\frac{1}{24}z) = \frac{24}{6} = 4$

y^2-16 = Differenz der Quadrate der äussern Glieder der Progr.;

$16 \cdot \frac{1}{24}z \cdot (24-y) = \frac{2}{3}z(24-y)$ = 16faches mittleres Glied derselb.

II. $y^2-16 = \frac{2}{3}z(24-y)$

III. $yz-24y-24z = -480$ (aus I.)

IV. $2yz+3y^2-48z = 48$ (aus II.)

V. $2yz-48y-48z = -960$ (aus III.)

$3y^2+48y = 1008$ (aus IV. und V.)

$y^2+16y = 336$

$y = -8 \pm 20$

VI. $y = 12$ oder $= -28$

y = 12 Maass, die das erste Mal abgezapft wurden.

$12(1-\frac{1}{24}z) = 4$ (VI. in I.)

$1-\frac{1}{24}z = \frac{1}{3}$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{24}z$

VI. z = 16 Maass Misch., die das zweite Mal abgez. wurden;

$z \cdot \frac{24-y}{24}$ = 8 Maass reiner Weingeist, die in diesen 16 Maass Mischung enthalten sind.

Nr. 20. Eine Anzahl Personen kauften miteinander ein Stück Feld um 3450 fl. Zur Bezahlung des Kaufpreises sollte der erste

eine gewisse Summe, der zweite 50 fl. weiter als der erste, der dritte wieder 50 fl. weiter u. s. w. geben. Diejenige Hälfte der Personen, welche am meisten zu bezahlen hatte, wollte ihren Antheil gemeinschaftlich bebauen; es wurde daher der ersten Hälfte, welche am wenigsten bezahlen musste, ihr Antheil an dem Felde nach Verhältniss der Summe ihrer Zahlungen weggemessen. Da diese sich über die gemeinschaftliche Bebauung nicht zu einigen vermochten, und ihnen die Theilung ihres Antheils nach dem Verhältnisse ihrer Zahlungen zu viel Mühe verursacht hätte, so theilten sie ihr Feld in gleiche Theile, machten aber auch ihren Beitrag zur Zahlung gleich gross, wodurch der Beitrag eines Jeden derselben an der Zahlung 220 fl. wurde. Wie viel waren es Personen, und wie viel hatte jede zu zahlen?

Auflösung. $x =$ ganze Anzahl Theilnehmer;

$\frac{1}{2}x =$ Anz. Theilnehmer, deren Antheil hinaus gemessen und vertheilt wurde;

$y =$ Anz. Gulden, die der erste Theiln. zahlt;

$\frac{1}{2}x[2y+(x-1)50] =$ Preis des ganzen Feldes in Gulden, nach der allgemeinen Summenformel $S = \frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$.

I. $\frac{1}{2}x[2y+(x-1)50] = 3450$

$\frac{1}{4}x[2y+(\frac{1}{2}x-1)50] =$ Preis des abgemessenen und vertheilten Feldes in Gulden nach derselben Formel;

aber auch $\frac{1}{2}x.220 = 110x =$ Preis desselben.

II. $\frac{1}{4}x[2y+(\frac{1}{2}x-1)50] = 110x$

III. $xy+25x^2-25x = 3450$ (aus I.)

$\frac{1}{2}xy+\frac{25}{4}x^2-\frac{25}{2}x = 110x$ (aus II.)

IV. $xy+\frac{25}{2}x^2-25x = 220x$

$\frac{25}{2}x^2+220x = 3450$ (aus III. und IV.)

$x^2+\frac{88}{5}x = 276$

$x^2+\frac{88}{5}x+(\frac{44}{5})^2 = 276+\frac{1936}{25} = \frac{8836}{25}$

$x+\frac{44}{5} = \pm\frac{94}{5}$

$x = \frac{44\pm 94}{5}$

*V. $= 10$ oder $= -\frac{138}{5}$

$x = 10$ Theilnehmer.

$10y+\frac{2500}{2}-2450 = 0$ (V. in IV.)

$10y = 1200$

*VI. $y = 120$ fl., die der erste Theiln. zahlt.

Die 10 Theilnehmer zahlen sohin einzeln 120, 170, 220, 270, 320, 370, 420, 470, 520 und 570 fl.

Anmerkung. Diese Aufgabe lässt sich auch mit einer Unbekannten lösen, wenn man die Formel $a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$ als bekannt annimmt, in welcher a das erste Glied, s die Summe der Glieder, n ihre Anzahl und d ihre Differenz bedeutet. Es ist dann: x = Anzahl Theilnehmer, die am ersten Kauf theiln.;

$\frac{1}{2}x$ = „ „ deren Antheil hinausgemessen und vertheilt wurde;

$\frac{3450}{x} - (x-1)25$ = Anzahl Gulden, die der erste Theilnehmer zahlt, nach obiger Formel;

$\frac{1}{4}x\left(\frac{6900}{x} - (x-1)50 + (\frac{1}{2}x-1)50\right)$ = Preis des abgemessenen und vertheilten Feldes nach der allgemeinen Summenformel; aber auch $\frac{1}{2}x.220 = 110x$ = Preis desselben Feldes.

$$\frac{1}{4}x\left(\frac{6900}{x} - 50x + 50 + 25x - 50\right) = 110x$$

$$x^2 + \frac{88}{5}x = 276$$

woraus sich wie oben ergiebt x = 10 Theilnehmer,

$\frac{3450}{x} - (x-1)25$ = 120 fl. = Zahlungsbeitrag des ersten Theilnehmers.

Nr. 21. Die Zahl der Todten unter der Besatzung einer belagerten Festung betrug täglich 6 Mann, und unter Einrechnung dieser täglichen Abnahme konnte der Vorrath an Proviant gerade noch 8 Tage ausreichen. Jedoch am Abend des sechsten Tages wurden bei einem Ausfalle 100 Mann getödtet, und vom darauf folgenden Tag an stieg die tägliche Zahl der Todten auf 10 Mann. Wenn nun der am Ende des sechsten Tages noch vorräthige Proviant genügend gewesen wäre, um 6 Mann 61 Tage lang zu erhalten, auf wie lange war von diesem Tage an die Garnison noch verproviantirt, und wie viel Mann waren noch übrig, als der Proviant aufgezehrt war?

Auflösung. x = ursprüngliche Besatzung;

$\frac{8}{2}[2x-(8-1)6] = 4(2x-42)$ = Anzahl täglicher Portionen, die bei einem täglichen Abgang von 6 Mann auf 8 Tage nothwendig, nach der allgemeinen Summenformel $S = \frac{1}{2}n[2a \pm (n-1)d]$;

$\frac{6}{2}[2x - (6-1)6] = 3(2x - 30)$ = Anzahl täglicher Portionen, die in den ersten 6 Tagen wirkl. verbraucht w., nach derselben Formel;

$4(2x - 42) - 3(2x - 30) = 2x - 78$ = Anzahl täglicher Portionen, die nach den ersten 6 Tagen noch übrig sind.

I. $\qquad 2x - 78 = 6 \,.\, 61 = 366$

$x - 6 \,.\, 6 - 100 = x - 136$ = Besatzung nach dem Ausfall am siebenten Tage;

y = Anzahl Tage, die der Proviant noch ausreicht;

$x - 136 - 10y$ = Besatzung, die dann noch übrig bleibt;

$\frac{1}{2}y[2(x - 136) - (y - 1)10]$ = Anzahl Portionen, die in dieser Zeit bei täglicher Abnahme von 10 Mann verbraucht werden.

$$\begin{array}{lrl}
\text{II.} & \frac{1}{2}y[2(x-136)-(y-1)10] & = 366 \\
 & 2x & = 444 \text{ (aus I.)} \\
{}^{*}\text{III.} & x & = 222 \text{ Mann.} \\
 & \frac{1}{2}y(2x-272-10y+10) & = 366 \text{ (aus II.)} \\
 & \frac{1}{2}y(2x-262-10y) & = 366 \\
\text{IV.} & y(x-131-5y) & = 366 \\
 & y(222-131-5y) & = 366 \text{ (III. in IV.)} \\
 & 91y - 5y^2 & = 366 \\
 & y^2 - \frac{91}{5}y & = -\frac{366}{5} \\
 & y^2 - \frac{91}{5}y + (\frac{91}{10})^2 & = \frac{8281}{100} - \frac{366}{5} = \frac{961}{100} \\
 & y - \frac{91}{10} & = \pm\frac{31}{10} \\
 & y & = \dfrac{91 \pm 31}{10} \\
{}^{*}\text{V.} & & = \frac{61}{5} \text{ oder } = 6.
\end{array}$$

Der erste Werth ist unbrauchbar, indem die nach dem Verbrauch der Lebensmittel übrig bleibende Mannschaft $x - 136 - 10y = -36$ wäre. Es bleibt daher nur:

$y = 6$ Tage, die die Besatzung nach dem Ausfall mit ihrem Proviant noch ausreicht;

$x - 136 - 10y = 26$ Mann, die nach aufgezehrtem Proviant noch übrig sind.

Anmerkung. Der Werth $x = 222$ lässt sich auch durch Schlüsse finden; die am Abend des sechsten Tages noch übrigen 366 Portionen müssten noch für den vorausgesetzten siebenten und achten Tag ausreichen; am siebenten Tage würden aber um $6 \,.\, 6 = 36$ und am achten um $7 \,.\, 6 = 42$ Portionen weniger verzehrt werden als am ersten, daher müssen obige 366 Portionen um 78 weniger betragen als die doppelte Anzahl ver-

zehrter Portionen des ersten Tags; die doppelte ursprüngliche Besatzung muss also $366+78 = 444$ und die einfache $= 222$ Mann betragen. Bei dieser, sowie bei der nächsten Aufgabe darf man nicht übersehen, dass jene Leute, die an einem Tage starben, an jenem Tage auch noch die ihnen gebührende Portion verzehrt haben.

Nr. 22. Ein Schiff geht unter Segel mit einer Bemannung von 175 Mann, und mit einem Wasser-Vorrath, welcher gerade bis zum Ende der Reise nach den gewöhnlich ausgesetzten Rationen ausreichen sollte. Jedoch vom 30sten Tag der Reise an, diesen Tag eingerechnet, starben in Folge des ausgebrochenen Scorbuts täglich 3 Mann, und während der Weiterreise wurde durch einen ausgebrochenen Sturm die Ankunft an dem Ziele der Reise um 3 Wochen verzögert. Dadurch gelangte das Schiff so in den Hafen, dass das mitgenommene Wasser gerade ausreichte, ohne die tägliche Ration eines Mannes schmälern zu müssen. Wie lange war das Schiff auf der Reise, und wie viel Mann hatte es noch am letzten Tag der Reise?

Auflösung.

$x =$ wirkl. Anzahl Tage, die das Schiff unterwegs ist;

$x-21 =$ Anzahl Reisetage, auf welche es bei der Abfahrt gerechnet hatte;

$175(x-21) =$ mitgenommener Wasservorrath in tägl. Rationen;

$29 \,.\, 175 =$ Anzahl täglicher Rationen, die bis zum Morgen des 30sten Tages verbraucht wurden;

$175(x-21)-29(175) = 175(x-50) =$ Wasservorrath, der beim Ausbruch des Scorbuts in täglichen Rationen noch vorhanden ist;

$x-29 =$ Anzahl Tage, die das Schiff nach Ausbruch des Scorbuts noch unterwegs ist;

$\frac{x-29}{2}[2 \,.\, 175-(x-30)3] =$ Anzahl Rationen, welche bei tägl. Abnahme von 3 Mann in dieser Zeit verbraucht werden, nach d. Summenformel $S = \frac{1}{2}n[2a \pm (n-1)d]$;

$175-(x-30)3 = 265-3x =$ Anzahl Mann, die bei der Ankunft im Hafen noch übrig sind, nach der Formel für das letzte Glied $t = a \pm (n-1)d$.

$$\frac{x-29}{2}(350-3x+90) = 175(x-50)$$

$$(x-29).(440-3x) = 350(x-50)$$
$$440x-3x^2-12760+87x = 350x-17500$$
$$-3x^2+177x = -4740$$
$$x^2-59x = 1580$$
$$x^2-59x+(\tfrac{59}{2})^2 = 1580+\tfrac{3481}{4} = \tfrac{9801}{4}$$
$$x = \frac{59 \pm 99}{2}$$
$$= 79 \text{ oder } = -20$$

$x = 79$ Tage, die das Schiff unterwegs ist;

$265-3x = 28$ Mann, die es bei der Ankunft noch an Bord hat, wenn es Morgens ankömmt; 25 wenn Abends.

Anmerkung. Eine analoge Auflösung ergiebt sich, wenn man die vorausgesetzte Anzahl Reisetage als ursprüngliche Unbekannte y annimmt; dann ist:

$y+21 =$ wirkliche Anzahl Reisetage;

$175y =$ ursprünglich vorhandener Vorrath an Rationen;

$175(y-29) =$ übrig bleibender Vorrath bei Beginn des Scorbuts;

$y+21-29 = y-8 =$ Anzahl Tage, die das Schiff nach Anfang des Scorbuts noch unterwegs ist;

$\frac{y-8}{2}[2.175-(y-9)3] =$ Vorrath, der während des Scorbuts verzehrt wird;

$175-(y-9)3 =$ Mannschaft, die bei der Ankunft im Hafen noch übrig bleibt.

$$\frac{y-8}{2}(350-3y+27) = 175(y-29)$$
$$y^2-17y = 2378$$
$$y = \frac{17 \pm 99}{2}$$
$$= 58 \text{ oder } = -41$$

$y+21 = 79$ Tage, die das Schiff unterwegs ist;

$175-(y-9)3 = 28$ Mann, die es bei der Ankunft im Hafen noch an Bord hat.

Nr. 23. Drei Personen, A, B, C, deren Geld-Vorrath eine abnehmende geometrische Progression bildete, gingen in ein Spielhaus. Als sie dasselbe wieder verliessen, fanden sie, dass jetzt ihr Geld-Vorrath eine abnehmende arithmetische Progression bilde, dass C Nichts gewonnen und Nichts verloren habe, dass aber das, was B übrig behalten habe, sich zu seinem Verlust verhalte, wie die Summe

der ursprünglichen Geld-Vorräthe von B und C zur Differenz dieser beiden Vorräthe. Wenn ferner C das gewonnen hätte, was A verloren hat, so hätte er 64 fl. mehr als A übrig bleibt. Endlich verhält sich die ganze Summe, welche alle drei zusammen übrig behielten, zur Summe dessen, was sie verloren, wie 6 : 7. Was hatte jeder ursprünglich und was später?

Auflösung.

xy^2 = ursprünglicher Geld-Vorrath des A,
xy = „ „ „ B,
x = „ „ „ C,
und = nachherigen „ „ C,
$xy+x$ = Summe der ursprüngl. Vorräthe von B u. C,
$xy-x$ = Differenz „ „ „ „ „ „ „
$(xy+x):(xy-x) = (y+1):(y-1)$ = Verhältniss, in welchem der ursprüngliche Geld-Vorrath des B durch das Spiel getheilt wird;

$\frac{y+1}{y+1+y-1}.xy = \frac{x(y+1)}{2}$ = nachheriger Geld-Vorrath des B;

$\frac{y-1}{y+1+y-1}.xy = \frac{x(y-1)}{2}$ = Verlust des B;

$\frac{x(y+1)}{2}-x = \frac{x(y-1)}{2}$ = Differenz der arithmet. Progr., welche die nachherigen Geld-Vorräthe des A, B u. C bilden;

$\frac{x(y+1)}{2}+\frac{x(y-1)}{2} = xy$ = nachheriger Geld-Vorrath des A;

xy^2-xy = Verlust des A;

$x+xy^2-xy$ = vorausges. Summe des C, wenn er den Verlust des A gewonnen hätte;

aber auch $xy+64$ = derselben Summe des C.

$$\text{I.}\quad x+xy^2-xy = xy+64$$

$xy+\frac{x(y+1)}{2}+x$ = nachheriger Geld-Vorrath aller drei Personen;

$xy^2-xy+\frac{x(y-1)}{2}$ = Verlust derselben, da C Nichts gewonnen und Nichts verloren hat;

$$\text{II.}\quad \left(xy+\frac{x(y+1)}{2}+x\right):\left(xy^2-xy+\frac{x(y-1)}{2}\right) = 6:7$$

$$x+xy^2-2xy = 64 \text{ (aus I.)}$$

$$x.(1-2y+y^2) = 64$$

$$x = \frac{64}{1-2y+y^2}$$

III. $$x = \left(\frac{8}{y-1}\right)^2$$

$$\frac{3x+3xy}{2} : \frac{2xy^2-xy-x}{2} = 6:7 \quad \text{(aus II.)}$$

$$(1+y):(2y^2-y-1) = 2:7$$

$$7+7y = 4y^2-2y-2$$

$$4y^2-9y = 9$$

$$y^2-\tfrac{9}{4}y = \tfrac{9}{4}$$

$$y^2-\tfrac{9}{4}y+(\tfrac{9}{8})^2 = \tfrac{9}{4}+\tfrac{81}{64} = \tfrac{225}{64}$$

$$y = \frac{9\pm 15}{8}$$

IV. $$= 3 \text{ oder } = -\tfrac{3}{4}$$

$$y = 3$$

V. $$x = 16 \quad \text{(IV. in III.)}$$

$xy^2 =$ 144 fl., die A vor dem Spiel hatte,
$xy =$ 48 „ „ B „ „ „ „
$x =$ 16 „ „ C „ „ „ „
$xy =$ 48 fl. die A nach dem Spiel hatte.
$\frac{x(y+1)}{2} =$ 32 „ „ B „ „ „ „
$x =$ 16 „ „ C „ „ „ „

Nr. 24. Ein schwer beladener Frachtwagen hat einen Vorsprung von 10 Meilen vor einem Eilwagen; der Eilwagen aber fährt so, dass der Frachtwagen von ihm eingeholt wird, nachdem er noch weitere 2 Meilen zurückgelegt hat. Dabei wurde die Bemerkung gemacht, dass die Anzahl von Umdrehungen, welche das Hinterrad des Frachtwagens, das Vorderrad desselben und das Hinterrad des Eilwagens in einer gegebenen Zeit machen, eine steigende arithmetische Progression bilden, und dass ebenso die Umfänge dieser Räder, nämlich des Vorderrades vom Frachtwagen, seines Hinterrades, und des Hinterrades vom Eilwagen in einer steigenden geometrischen Progression stehen, deren Exponent gleich ist der Differenz jener arithmetischen Progression. In welchem Verhältniss stehen die Räder zu einander?

Auflösung.

$x-y =$ Verhältnisszahl der Anzahl Umdrehungen des Hinterrades des Frachtwagens;

x = Verhältnisszahl der Anzahl Umdrehungen des Vorderrades des Frachtwagens;

$x+y$ = Verhältnisszahl der Anzahl Umdrehungen des Hinterrades des Eilwagens;

$\frac{2}{x}$ = Verhältnisszahl des Umfangs d. Vorderrades d. Frachtw.;

$\frac{2}{x-y}$ = „ „ „ „ Hinterrades „ „

$\frac{12}{x+y}$ = „ „ „ „ „ „ Eilw., indem der Frachtw. in derselben Zeit 2 Meilen zurücklegt, in welcher der Eilw. deren $10+2=12$ macht;

y = Differenz der arithmetischen Progression;

$\frac{\frac{2}{x-y}}{\frac{2}{x}} = \frac{x}{x-y}$ = Exponent der geometrischen Progression,

aber auch $\frac{\frac{12}{x+y}}{\frac{2}{x-y}} = \frac{6(x-y)}{x+y}$ = demselben.

$$\text{I.} \qquad \frac{x}{x-y} = y$$

$$\text{II.} \qquad \frac{6(x-y)}{x+y} = y$$

$$x = xy - y^2 \text{ (aus I.)}$$

$$y^2 = xy - x$$

$$\text{III.} \qquad x = \frac{y^2}{y-1}$$

$$6x - 6y = xy + y^2$$

$$6x - xy = 6y + y^2$$

$$\text{IV.} \qquad x = \frac{y(6+y)}{6-y}$$

$$\frac{y^2}{y-1} = \frac{y(6+y)}{6-y} \text{ (aus III. und IV.)}$$

$$\frac{y}{y-1} = \frac{6+y}{6-y}$$

$$6y - y^2 = 6y + y^2 - 6 - y$$

$$2y^2 - y = 6$$

$$y^2 - \tfrac{1}{2}y = 3$$

$$y^2 - \tfrac{1}{2}y + (\tfrac{1}{4})^2 = 3 + \tfrac{1}{16} = \tfrac{49}{16}$$

$$y - \tfrac{1}{4} = \pm\tfrac{7}{4}$$

$$y = \frac{1 \pm 7}{4}$$

*V. $y = 2$ oder $= -\frac{3}{2}$

*VI. $x = 4$ oder $= -\frac{9}{16}$ (V. in III.)

$(x-y):x:(x+y) = 2:4:6 = 1:2:3$ = Verhältniss der Anzahl Umdrehungen der drei Räder;

$\frac{2}{x}:\frac{2}{x-y}:\frac{12}{x+y} = \frac{1}{2}:1:2 = 1:2:4$ = Verhältniss der Umfänge der drei Räder.

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende:

$1:y:y^2$ = Verhältn. der Umfänge des Vorderrades des Frachtw., seines Hinterrades u. des Hinterrades des Eilw.;

$\frac{2}{y}:2:\frac{12}{y^2} = \frac{1}{y}:1:\frac{6}{y^2}$ = Verhältn. der Anzahl Umdrehungen des Hinterrades des Frachtw., seines Vorderrades und des Hinterrades des Eilw., indem die Anzahl Umdrehungen in gegebener Zeit den zurückgelegten Wegstrecken gerade, den Umfängen der Räder aber entgegengesetzt proportionirt sein müssen;

$\frac{6}{y^2}-1$ = Differenz der arithmetischen Progressionen;

aber auch $1-\frac{1}{y}$ = derselben Differenz.

$$\frac{6}{y^2}-1 = 1-\frac{1}{y}$$

$$y^2-\frac{1}{2}y = 3$$

$$y = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$= 2 \text{ oder } = -\frac{3}{2}$$

$1:y:y^2 = 1:2:4$ = Verhältniss der Umfänge der drei Räder,

$\frac{2}{y}:2:\frac{12}{y^2} = 1:2:3$ = Verhältniss der Anzahl Umdrehungen der drei Räder.

Nr. 25. Eine Compagnie von Kaufleuten rüstete einen Kaper aus und jeder gab zur Ausrüstung 1000 fl. Der Capitän gab nichts; es wurde ihm aber am Ende von je einer bestimmten Zahl von Monaten die feste Summe von 1000 fl. als Antheil an der Beute gutgeschrieben, mochte die erhaltene Prise betragen was sie wollte. Im Laufe von 25 Monaten nahm der Kaper drei Prisen, deren Werthe in geometrischer Progression standen. Das mittlere Glied dieser Progression war gleich dem vierten Theil von den Kosten der Ausrüstung, und der Exponent der Progression gleich der Anzahl von Monaten, für welche der Capitän jedesmal 1000 fl.

bekam, die Summe der drei Prisen aber um 13750 fl. grösser als die Kosten der Ausrüstung. Nachdem die Mannschaft 8750 fl. Prisengeld, und der Capitän den ihm zukommenden Antheil abgezogen hatte, wurde das Uebrige an die Kaufleute abgegeben, und es zeigte sich, dass der Antheil des Capitäns den fünften Theil von dem betrug, was die Kaufleute erhielten. Wie viel waren es Kaufleute, was betrug der Werth jeder Prise, und für wie viel Monate bekam der Capitän jedesmal 1000 fl.?

Auflösung. x = Anzahl Kaufleute,

$1000x$ = Kosten der Ausrüstung in fl.,

y = Anzahl Monate, für welche der Capitän 1000 fl. erhielt,

und = Exponent der Progression der Prisen,

$\frac{1000x}{4} = 250x$ = mittlere Prise,

$\frac{250x}{y}$ = erste Prise,

$250xy$ = dritte Prise,

$250\left(\frac{x}{y}+x+xy\right)$ = Summe der drei Prisen,

$$\text{I.} \quad 250\left(\frac{x}{y}+x+xy\right) = 13750+1000x$$

$\frac{1000}{y}$ = Antheil des Capitäns für 1 Monat,

$\frac{25000}{y}$ = „ „ „ „ 25 „

$13750+1000x$ = Werth der drei Prisen,

$13750+1000x-8750-\frac{25000}{y} = 5000+1000x-\frac{25000}{y}$ = = Antheil der Kaufleute,

aber auch $5 . \frac{25000}{y}$ = „ „ „

$$\text{II.} \quad 5000+1000x-\frac{25000}{y} = \frac{125000}{y}$$

$$xy+x+\frac{x}{y} = 55+4x \text{ (aus I.)}$$

$$\text{III.} \quad xy-3x+\frac{x}{y} = 55$$

$$5+x-\frac{25}{y} = \frac{125}{y} \text{ (aus II.)}$$

IV. $$x = \frac{150}{y} - 5$$

$$\left(\frac{150}{y} - 5\right)\left(y - 3 + \frac{1}{y}\right) = 55 \quad \text{(IV. in III.)}$$

$$\left(\frac{30}{y} - 1\right)\left(y - 3 + \frac{1}{y}\right) = 11$$

$$30 - y - \frac{90}{y} + 3 + \frac{30}{y^2} - \frac{1}{y} = 11$$

$$\frac{30}{y^2} - \frac{91}{y} - y = -22$$

$$30 - 91y - y^3 + 22y^2 = 0$$

$$30y - 91y^2 - y^4 + 22y^3 + 660 - 2002y - 22y^3 + 484y^2 = 0 \quad \text{(durch Multipl. mit } y+22)$$

$$y^4 - 393y^2 = 660 - 1972y$$

$$y^4 - 104y^2 + 2704 = 289y^2 - 1972y + 3364 \quad \text{(d. Add. von } 289y^2 + 2704)$$

$$y^2 - 52 = \pm(17y - 58)$$

$$y^2 - 52 = 17y - 58 \qquad y^2 - 52 = 58 - 17y$$

$$y^2 - 17y = -6 \qquad y^2 + 17y = 110$$

$$y^2 - 17y + \left(\tfrac{17}{2}\right)^2 = \tfrac{289}{4} - 6; \qquad y^2 + 17y + \left(\tfrac{17}{2}\right)^2 = 110 + \tfrac{289}{4}$$

$$= \tfrac{265}{4} \qquad = \tfrac{729}{4}$$

$$y - \tfrac{17}{2} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{265} \qquad y + \tfrac{17}{2} = \pm \tfrac{27}{2}$$

*V. $$y = \frac{17 \pm \sqrt{265}}{2} \qquad y = 5 \text{ oder } = -22$$

$$x = \frac{150}{y} - 5 = \frac{300}{17 \pm \sqrt{265}} - 5 \text{ od.} = \tfrac{150}{5} - 5 \text{ od.} = \frac{150}{-22} - 5$$

*VI. $$x = \frac{415 \mp 25\sqrt{265}}{2} \text{ od.} = 25 \text{ od.} = -\tfrac{130}{11}$$

$x = 25$ Kaufleute,

$y = 5$ Monate, für welche d. Capit. je 1000 fl. erhielt,

$250 \cdot \frac{x}{y} = 1250$ fl. = erste Prise.

$250x = 6250$ „ = zweite „

$250xy = 31250$ „ = dritte „

Anmerkung. Eine andere Auflösung ist folgende, die sich aus der Gleichung: $y^3 - 22y^2 + 91y - 30 = 0$ ergiebt:

$$y^3 - 22y^2 + 91y = 30$$

$$y^3 - 17y^2 + 6y = 5y^2 - 85y + 30$$

$$y(y^2 - 17y + 6) = 5(y^2 - 17y + 6)$$

$$y = 5$$

woraus auch noch $y^2 - 17y + 6 = 0$ und daraus

$$y^2 - 17y = -6$$

$$y = \frac{17 \pm \sqrt{265}}{2}$$

und das Uebrige wie oben folgt.

Auch ergiebt sich aus der Gleichung III.:

$$\text{VII.} \qquad y = \frac{150}{x+5}$$

$$\frac{150x}{x+5} - 3x + \frac{x^2+5x}{150} = 55 \text{ (VII. in III.)}$$

$$x^3 - 440x^2 + 12025x = 41250$$

$$x^3 - 415x^2 + 1650x = 25x^2 - 10375x + 41250$$

$$x(x^2 - 415x + 1650) = 25(x^2 - 415x + 1650)$$

$$\text{IX.} \qquad x = 25$$

oder auch

$$x^2 - 415x = -1650$$

$$\text{X.} \qquad x = \frac{415 \pm 25\sqrt{265}}{2}$$

$$\text{XI.} \qquad y = \frac{150}{x+5} = 5 \text{ oder } = \frac{300}{425 \pm 25\sqrt{265}} = \frac{17 \mp \sqrt{265}}{2}$$

Das zweite Paar Werthe von x und y ist auch als Resultate zu gebrauchen, wenn sie nur richtig gedeutet werden. Es ist dann nämlich: $x = 410,9852$ oder $= 4,0147$ und die Ausrüstungskosten

$$= 1000x = 410985,2574 \text{ oder } = 4014,7425$$

d. h. es sind entweder 411 Kaufleute, von denen 410 einen Beitrag von 1000 fl. und der 411te einen Beitrag von 985,2574 fl. leistet, oder es sind fünf Kaufleute, von denen vier einen Beitrag von je 1000 fl. und der fünfte einen solchen von 14,7425 fl. leistet. Im ersten Fall ist die Anzahl Monate, für welche der Capitän jedesmal 1000 fl. erhält $y = 0,3605897$; im zweiten aber $y = 16,6394103$ d. h. er erhält im ersten Fall monatlich 2773,4538 fl., im zweiten aber monatlich 60,0982 fl. Gehalt. Die drei Prisen sind im ersten Fall 284939,6816 fl., 102746,3143 fl., und 37049,2626 fl., im zweiten Fall aber sind sie: 60,3198 fl., 1003,6856 fl. und 16700,7365 fl., welche Resultate sämmtlich den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Nr. 26. Ein fleissiger Arbeiter mit seiner Frau und seinen Kindern legte monatlich eine gewisse Summe bei einer Sparkasse

an. Die Ersparnisse der einzelnen Personen in Groschen ausgedrückt, bildeten eine, nach dem Alter derselben abnehmende arithmetische Progression, deren Summe so gross war, dass noch 2 fl. 45 krz. fehlten, um 6mal weniger Scheffel Weizen kaufen zu können, als das siebente Kind Groschen monatlich ersparte. Der Preis des Weizens war so, dass zu der monatlichen Ersparniss des ersten und fünften Kindes zusammen noch 1 fl. 24 krz. nöthig gewesen wären, um einen Scheffel kaufen zu können. Als später der Preis des Weizens um einen Gulden stieg, die Gelegenheit zum Verdienst aber abnahm, waren die monatlichen Ersparnisse der ganzen Familie nur noch so gross, dass sie 2 Scheffel Weizen weniger hätte kaufen können, als vorher möglich gewesen wäre, wenn sie nämlich, wie oben bemerkt wurde, vorher noch 2 fl. 45 krz. gehabt hätte. Die Ersparniss des ganzen Jahres hatte dadurch abgenommen um 63 fl. Als die zwei jüngsten Kinder gestorben waren, hätte jedes Mitglied der Familie 12 Groschen weniger ersparen müssen, als ursprünglich das erste Kind ersparte, damit dieser Tod in Betreff der monatlichen Einlagen in die Sparkasse, wie sie sich nach dem Aufschlagen des Weizens gestalteten, nicht fühlbar werden sollte. Hätte aber jedes Glied der Familie nur 2 Groschen weniger erspart, als dieses älteste Kind monatlich ersparte, so wäre die monatliche Ersparniss bloss um 1 fl. 15 krz. geringer gewesen, als die ursprüngliche. Aus wie viel Gliedern bestand die Familie? Wie viel hatte jedes ursprünglich erspart? Wie viel alle zusammen später? Und was war der Preis des Weizens?

Auflösung.

$\frac{63}{12} = \frac{21}{4} =$ Unterschied der monatl. Ersparniss der ganzen Familie vor und nach d. Aufschlagen des Weizens in fl.;

und auch $=$ Unterschied der ursprüngl. monatl. Ersparniss der ganzen Familie u. der unter der ersten Voraussetzung nach d. Tode zweier Kinder eintretenden, in fl.;

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} =$ Unterschied der ursprüngl. monatl. Ersparniss der ganzen Familie und der unter der zweiten Voraussetzung nach d. Tode zweier Kinder eintretenden, in fl.;

$\frac{21}{4} - \frac{5}{4} = 4 =$ Anz. Gulden, um welche die ganze Familie bei d. zweiten Voraussetz. mehr erspart als bei der ersten;

$\frac{12}{20} - \frac{2}{20} = \frac{1}{2} =$ Anz. Gulden, um welche jedes Familienglied bei d. zweiten Voraussetzung mehr erspart als bei der

ersten, da jedes Mitglied bei der zweiten Voraussetzung 2 Gr., bei der ersten aber 12 Gr. weniger erspart als ursprünglich das älteste Kind;

$\frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 =$ Anzahl Familienglieder nach dem Tod der zwei jüngsten Kinder;

$8+2 = 10 =$ ursprüngl. Anzahl Familienglieder;

$x =$ ursprüngl. monatl. Ersparniss des Vaters in fl.;

$y =$ Anzahl Gulden, um welches jedes Familienglied ursprüngl. monatlich weniger erspart als das vorhergehende Mitglied;

$x-2y =$ ursprüngl. monatl. Ersparniss d. ältesten Kinds in fl.;

$x-6y =$ „ „ „ „ fünften „ „ „

$x-8y =$ „ „ „ „ siebent. „ „ „

$x-2y+x-6y = 2x-8y =$ ursprüngl. monatl. Ersparniss des ersten und fünften Kindes in fl.;

$2x-8y+1\frac{2}{5} =$ Preis eines Scheffels Weizen vor dem Aufschlagen seines Preises in fl.;

$20(x-8y) =$ Anzahl Groschen, die das siebente Kind ursprüngl. monatlich erspart;

$\frac{20(x-8y)}{6} = \frac{10}{3}(x-8y) =$ Anzahl Scheffel, die ursprünglich gekauft werden konnten, wenn zur monatl. Ersparniss der Familie noch 2 fl. 45 krz. gelegt w.;

$\frac{10}{3}(x-8y).(2x-8y+\frac{7}{5}) =$ Preis dieses Quantums Weizen in fl.;

$\frac{10}{2}[2x-(10-1)y] = 5(2x-9y) =$ ursprüngl. monatl. Ersparniss der ganzen Familie in fl., nach der allgemeinen Summenformel $S = \frac{1}{2}n[2a \pm (n-1)d]$;

$5(2x-9y)+2\frac{3}{4} =$ Preis obigen Quantums Weizen in fl.

I. $\frac{10}{3}(x-8y).(2x-8y+\frac{7}{5}) = 5(2x-9y)+2\frac{3}{4}$

$2x-8y+\frac{7}{5}+1 = 2x-8y+\frac{12}{5} =$ nachheriger Preis eines Schfls. Weizen in fl.;

$\frac{10}{3}(x-8y)-2 =$ nachherige Anzahl Scheffel Weizen, die gekauft werden können;

$[2x-8y+\frac{12}{5}][\frac{10}{3}(x-8y)-2] =$ Preis dieses Quant. Weizen in fl.;

$5(2x-9y)-\frac{21}{4} =$ nachher. monatl. Ersparniss der ganzen Familie in fl., da sie jährlich um 63 fl. weniger erspart.

II. $[2x-8y+\frac{12}{5}].[\frac{10}{3}(x-8y)-2] = 5(2x-9y)-\frac{21}{4}$

III. $\frac{10}{3}(x-8y).(2x-8y)+\frac{14}{3}(x-8y) = 5(2x-9y)+\frac{11}{4}$

(aus I.)

$$\text{IV.}\quad \tfrac{10}{3}(x-8y).(2x-8y)-2(2x-8y)+8(x-8y)-\tfrac{24}{5} = 5(2x-9y)-\tfrac{21}{4}\ \text{(aus II.)}$$

$$2(2x-8y)-\tfrac{10}{3}(x-8y)+\tfrac{24}{5} = 8\ \text{(aus III. und IV.)}$$

$$2x-8y-\tfrac{5}{3}x+\tfrac{40}{3}y+\tfrac{12}{5} = 4$$

$$\tfrac{16}{3}y = \tfrac{8}{5}-\tfrac{1}{3}x$$

$$\text{V.}\quad y = \tfrac{3}{10}-\tfrac{1}{16}x$$

$$\tfrac{10}{3}(x-\tfrac{12}{5}+\tfrac{1}{2}x).(2x-\tfrac{12}{5}+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{7}{5}) = 5(2x-\tfrac{27}{10}+\tfrac{9}{16}x)+\tfrac{11}{4}\ \text{(V. in I.)}$$

$$\tfrac{10}{3}(\tfrac{3}{2}x-\tfrac{12}{5}).(\tfrac{5}{2}x-1) = 5(\tfrac{41}{16}x-\tfrac{27}{10})+\tfrac{11}{4}$$

$$\tfrac{25}{2}x^2-20x-5x+8 = \tfrac{205}{16}x-\tfrac{27}{2}+\tfrac{11}{4}$$

$$\tfrac{25}{2}x^2-\tfrac{605}{16}x = -\tfrac{75}{4}$$

$$x^2-\tfrac{121}{40}x = -\tfrac{3}{2}$$

$$x^2-\tfrac{121}{40}x+(\tfrac{121}{80})^2 = \tfrac{14641}{6400}-\tfrac{3}{2} = \tfrac{5041}{6400}$$

$$x-\tfrac{121}{80} = \pm\tfrac{71}{80}$$

$$x = \frac{121\pm 71}{80}$$

$${}^*\text{VI.}\quad = \tfrac{12}{5}\ \text{oder} = \tfrac{5}{8}$$

$${}^*\text{VII.}\quad y = \tfrac{3}{20}\ \text{oder} = \tfrac{167}{640}\ \text{(VI. in V.).}$$

Von den beiden Werthen von x und y können nur die ersten gelten, indem ausserdem das letzte Familienglied $x-9y=\frac{1103}{640}$ fl. einzahlen müsste; daher

$x = \frac{12}{5}$ fl. $= 48$ Groschen, die der Vater ursprünglich monatl. erspart;

$y = \frac{3}{20}$ fl. $= 3$ Groschen, um welche jedes Familienglied weniger erspart, als das vorhergehende.

Die einzelnen Ersparnisse sind daher der Reihe nach 48, 45, 42, 39, 36, 33, 30, 27, 24, 21 Groschen; ferner ist:

$5(2x-9y) = 17\frac{1}{4}$ fl. = ursprüngliche Ersparniss der ganzen Familie per Monat,

$5(2x-9y)-\frac{21}{4} = 12$ „ = nachherige monatl. Ersparniss der ganzen Familie,

$2x-8y+\frac{7}{5} = 5$ „ = ursprünglicher Preis eines Scheffels Weizen,

$2x-8y+\frac{12}{5} = 6$ „ = nachheriger Preis eines Scheffels Weizen.

Anmerkung. Aus der Gleichung V. ergiebt sich auch:

$$\tfrac{1}{16}x = \tfrac{3}{10}-y$$

$$\text{VIII.}\quad x = \tfrac{24}{5}-16y$$

$$\tfrac{10}{3}\left(\tfrac{24}{5} - 16y - 8y\right).\left(\tfrac{48}{5} - 32y - 8y + \tfrac{7}{5}\right) = 5\left(\tfrac{48}{5} - 32y - 9y\right) + \tfrac{11}{4}$$

(VIII. in I.)

$$y^2 - \tfrac{263}{640}y = -\tfrac{501}{12800}$$

$$y = \frac{263 \pm 71}{1280}$$

IX. $$= \tfrac{167}{640} \text{ oder } = \tfrac{3}{20}$$

X. $$x = \tfrac{24}{5} - 16y = \tfrac{5}{8} \text{ oder } = \tfrac{12}{5}$$

woraus nun das Uebrige von selbst wie oben folgt.

Miles Bland's

sämmtliche

algebraische Gleichungen

des I. und II. Grades,

theils mit, theils ohne Auflösungen,

mit einem Anhange,

enthaltend

Aufgaben aus der höheren Mathematik.

Nach dem
englischen Originale mit Benutzung von Dr. Nagel's deutscher
Ausgabe bearbeitet

von

Celsus Girl,
königl. bayerischem Artillerie-Oberlieutenant und
Lehrer der Chemie am Cadeten-Corps.

Zweiter Band.

Aufgaben ohne Auflösungen
und **Anhang** von
Aufgaben aus der höheren Mathematik.

Halle a/S.,
Druck und Verlag von H. W. Schmidt
1857.

Vorrede.

Die günstige Aufnahme, welche dem ersten Bande vorliegen-
ı Werkes in so reichem Maasse zu Theil wurde, lässt mich auf
e gleich freundliche Beachtung des zweiten hoffen. Derselbe
hält zunächst jene algebraischen Gleichungen und Aufgaben I.
l II. Grades, welche in dem englischen Original und Herrn
Nagel's Ausgabe bereits gelöst sind und von denen ich daher
r nur die Angaben und Resultate aufgenommen habe. Ferner
hält er aber auch noch einen aus der achten Auflage des eng-
hen Originals entnommenen Anhang von Aufgaben und Lehr-
;en aus der Theorie der Reihen und der höheren Gleichungen,
cher neben manchem Bekannten doch auch vieles Neue und
ıressante enthalten dürfte.

Recht dankbar würde ich's anerkennen, wenn geehrte Fach-
ossen mich auf etwaige Mängel des Buches hinweisen wollten,
es bereits Herr Dr. Nagel in Ulm gethan, dem ich sowohl
(ausser den aus dem Excurs des Herrn Prof. Könitzer ent-
ımenen) Bemerkungen zu einigen Aufgaben des ersten Bandes,
auch das Druckfehler-Verzeichniss verdanke.

Es hat mich dieses warme Interesse des Herrn Dr. Nagel
meiner Arbeit um so freudiger überrascht, als ich den genannten
rrn nur aus seinen vortrefflichen Schriften kannte und nie in

irgend welchem persönlichen Verkehr zu ihm stand. Möge derselbe auch an diesem Orte meinen wärmsten Dank entgegen nehmen. —

Ein gleiches Dankgefühl beseelt mich gegen den Herrn Dr. Wiegand, technischen Director der Lebens-Versicherungs-Gesellschaft Iduna in Halle a/S., der mich als einen ihm vorher ebenfalls ganz Fremden bei der Herausgabe des Werkes mit Rath und That auf das Wohlwollendste und Freundlichste unterstützt hat. Möchte meine Schrift ein würdiges Seitenstück zu der vom Herrn Dr. Wiegand besorgten vortrefflichen „Sammlung von Aufgaben aus Prof. Jacobi's Anhängen zu van Swinden's Geometrie, mit Beweisen und Auflösungen, Halle 1847" bilden und überhaupt den Nutzen stiften, den der Verfasser dabei bezweckt hat.

München im August 1857.

C. Orri,
Oberlieutenant.

Inhalts - Verzeichniss

des zweiten Bandes.

Gleichungen und Aufgaben ohne Auflösungen.

Anhang von Aufgaben aus der höheren Mathematik.

Anmerkungen zu einigen Aufgaben
des ersten Bandes.

Zu Seite 135 *Gleichung Nr.* 23.

Einfacher ist folgende Lösung: Aus II. folgt: $(x^2+y^2)(x^3+y^3) = [(x+y)^2-2xy].[(x+y)^3-3xy(x+y)] = 455$ und wenn man hierin aus I. den Werth $x+y = 5$ substituirt: $(25-2xy)(125-15xy) = 455$ oder $x^2y^2 - \frac{125}{6}xy = -89$, woraus das Uebrige von selbst wie dort folgt.

Zu Seite 144 *Gleichung Nr.* 30.

Einfacher ist folgende Lösung: Aus III. folgt: $4y^2 = 3(4-x^2)$ und aus II. folgt: $4y^2 = 18-(4-x^2)^2$. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich $3(4-x^2) = 18-(4-x^2)^2$ oder $4-x^2 = 3$ oder $= -6$, woraus das Uebrige von selbst folgt.

Zu Seite 163 *Gleichung Nr.* 41.

Eine andere Auflösung ist folgende: Aus der obersten Zeile der 164sten Seite folgt: $x-2\sqrt{xy} = 2$ oder $\sqrt{x} = \sqrt{y} \pm \sqrt{y+2}$. Aus IV. folgt aber $\sqrt{x} = \frac{-5 \pm 4\sqrt{y+2}}{\sqrt{y}}$ und aus der Gleichstellung dieser beiden Werthe: $\sqrt{y} \pm \sqrt{y+2} = \frac{-5 \pm 4\sqrt{y+2}}{\sqrt{y}}$ oder $y+5 = \pm(4-\sqrt{y})\sqrt{y+2}$. Quadrirt und nach $\sqrt{y}$ aufgelöst ergiebt sich : $\sqrt{y} = \frac{8y+7}{8y+16}$. Hieraus folgt weiter durch Reduction und Quadriren: $64y^3+256y^2+256y = 64y^2+112y+$ $+49$ oder $64y^3+192y^2+144y = 49$ oder $4y(16y^2+48y+36)$ $= 7^2$ und $2(4y+6)\sqrt{y} = 7$ oder $\sqrt{y} = \frac{7}{8y+12}$. Setzt man die beiden Werthe von $\sqrt{y}$ einander gleich, so erhält man die Gleichung: $16y^2+24y = 7$, woraus das Uebrige von selbst folgt.

Zu Seite 170 *Gleichung Nr.* 45.

Einfacher ist folgende Auflösung: Setzt man I. und I.[2] in II. ein, so wird $(x^4+y^4)^2+9x^2y^2=325$. Aus I. ist aber $x^4+y^4-2x^2y^2=9$, also $(x^4+y^4)^2=(9+2x^2y^2)^2$ und wenn man beide Gleichungen verbindet: $(9+2x^2y^2)^2+9x^2y^2=325$ oder $4x^4y^4+45x^2y^2=244$.

(Obige vier Lösungen sind aus Herrn Prof. Kónitzer's Excurs über die Gleichungen II. Grades mit zwei Unbekannten entnommen.)

Zu Seite 247 *Aufgabe Nr.* 18.

Die Lösung dieser Aufgabe gestaltet sich noch einfacher, wenn man die erste Zahl $=2x-6$, die zweite $=3x-6$, und die dritte $=y$ annimmt; man erhält dann den Daten gemäss die beiden Gleichungen:

$(2x-1):(y+5)=7:11$ oder $22x-7y=46$ und

$(3x-42):(y-36)=6:7$ oder $7x-2y=26$,

woraus $x=18$, $y=50$ und das Uebrige von selbst folgt.

Zu Seite 298 *Aufgabe Nr.* 3 *und Nr.* 8, 13 *u.* 14 *desselben Abschnitts.*

Diese vier Aufgaben lassen sich sämmtlich auch mit einer einzigen Unbekannten auf rein quadratischem Wege lösen;

nimmt man nämlich in Nr. 3 die beiden Rechtecks-Seiten $=x+8$ und $=x-8$ an, so folgt $(x+8).(x-8)=960$ oder $x^2=1024$ und $x=\pm 32$ u. s. w.;

nimmt man in Nr. 8 die Anzahl grosser Münzen $=20+x$ und jene kleiner Münzen $=20-x$, so folgt $2(20+x)(20-x)=600$ oder $x^2=100$ und $x=\pm 10$ u. s w.;

nimmt man in Nr. 13 in der einen Heerde $\frac{2x+5}{2}$ und in der andern $\frac{2x-5}{2}$ Schafe an, so folgt: $\frac{(2x+5)^2}{8}+\frac{(2x-5)^2}{8}=$ $=656\frac{1}{4}$ oder $x^2=\frac{2601}{4}$ und $x=\pm\frac{51}{2}$ u. s. w.; und

nimmt man endlich in Nr. 14 die beiden Zahlen zu $x+2$ und $x-2$ an, so folgt $2x^2+8=1066$ oder $x^2=529$ und $x=\pm 23$ u. s. w.

(Diese letzteren fünf Anmerkungen sind mir von Herrn Rector Nagel zugekommen.)

Druckfehler im ersten Bande.

Seite	Stelle		lese		statt
Seite IV	Zeile 6 von oben	lese	Ansicht	statt	Aussicht.
„ V	„ 11 von unten	„	Cadeten	„	Cadetten.
„ 16	Nr. 64	„	$\frac{\sqrt{6x}-2}{\sqrt{6x}+2}$	„	$\frac{\sqrt{6x}+2}{\sqrt{6x}+2}$.
„ 18	Nr. 1. V.	„	$x = 53 - 15y$	„	$x = 53 = 15y$.
„ 24	Nr. 15. I.	„	$(4x + y)$	„	$(4x +) y$.
„ 37	Zeile 2 von oben	„	die I. Gleichung	„	die II. Gleichung.
„ 41	Nr. 11. V.	„	$y = 9$	„	$y = 16$.
„ 50	Nr. 24. II.	lese	$(\frac{3}{4}\sqrt{x^2-6y}+\sqrt{y^2-9x})$	„	$\frac{3}{4}(\sqrt{x^2-6y}+\sqrt{y^2-9x})$.
„ 79	Zeile 10 von unten	lese	$x = -\frac{14}{3}$	„	$x = -\frac{11}{13}$.
„ 84	„ 4 von oben	„	$\frac{4826809}{4096}$	„	$\frac{4816669}{4096}$.
„ 92	Nr. 61.	„	$\frac{23x - 46\sqrt{x}}{6 + \sqrt{x}}$	„	$\frac{23x + 46\sqrt{x}}{6 + \sqrt{x}}$.
„ 98	Zeile 2 von unten	„	$\frac{a+b}{a-b}$	„	$\frac{a+b}{a-c}$.
„ 99	Nr. 73	„	$\frac{135}{176}$	„	$\frac{125}{176}$.
„ 106	Zeile 2 u. 3 von oben	„	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{109}{3}}$	„	$+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{103}{3}}$.
„ 129	Nr. 16. VII.	„	$-12 \mp \sqrt{58}$	„	$-12 \pm \sqrt{58}$.
„ 131	Nr. 18. VII.	„	$x = \frac{3364}{289}$	„	$x = \frac{2364}{289}$.
„ 140	Zeile 10 von unten setze III.				
„ 141	Nr. 27. I.	lese	$9 - \frac{1}{2}\sqrt{y}$	„	$9 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$.
„ 154	Zeile 3 von oben	„	$\frac{3}{2}\sqrt{x+y}$	„	$\frac{3}{2}\sqrt{x-y}$.
„ 156	Nr. 36. I.	„	$\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}}$	„	$\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}$.
„ 157	Zeile 10 von unten	„	$\frac{61}{3}$	„	$6\frac{1}{3}$.
„ 163	Zeile 7 von oben	„	II.	„	III.
„ 174	Zeile 15 von unten	„	$\frac{788 \pm 48\sqrt{161}}{25}$	„	$\frac{788 \pm 48\sqrt{161}}{5}$.
„ 175	Zeile 4 von unten	„	$-(2y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})$	„	$-(2y^{\frac{2}{3}} + x^{1} + y^{\frac{1}{3}})$.
„ 189	Zeile 12 von oben	„	Nr. 30	„	Nr. 36.
„ 207	Zeile 1 „ „	„	Nr. 62	„	Nr. 52.

Gleichungen und Aufgaben ohne Auflösungen.

I. Abschnitt.

Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

r. 1. $$4x+36 = 5x+34$$
$$x = 2.$$

r. 2. $$x-7 = \tfrac{1}{5}x+\tfrac{1}{3}x$$
$$x = 15.$$

r. 3. $$3ax-4ab = 2ax-6ac$$
$$x = 4b-6c.$$

r. 4. $$3x^2-10x = 8x+x^2$$
$$x = 9.$$

r. 5. $$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x = \tfrac{1}{4}x+7$$
$$x = 12.$$

r. 6. $$\frac{x-5}{4}+6x = \frac{284-x}{5}$$
$$x = 9.$$

r. 7. $$x+\frac{11-x}{3} = \frac{19-x}{2}$$
$$x = 5.$$

r. 8. $$3x+\frac{2x+6}{5} = 5+\frac{11x-37}{2}$$
$$x = 7.$$

r. 9. $$\frac{6x-4}{3}-2 = \frac{18-4x}{3}+x$$
$$x = 4.$$

r. 10. $$21+\frac{3x-11}{16} = \frac{5x-5}{8}+\frac{97-7x}{2}$$
$$x = 9.$$

Nr. 11. $$x+\frac{3x-5}{2} = 12-\frac{2x-4}{3}$$
$$x = 5.$$

Nr. 12. $$3x-\frac{x-4}{4}-4 = \frac{5x+14}{3}-\frac{1}{12}$$
$$x = 7.$$

Nr. 13. $$\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5} = 7-\frac{4+x}{4}$$
$$x = 8.$$

Nr. 14. $$\frac{7x+5}{3}-\frac{16+4x}{5}+6 = \frac{3x+9}{2}$$
$$x = 1.$$

Nr. 15. $$\frac{3x+4}{5}-\frac{7x-3}{2} = \frac{x-16}{4}$$
$$x = 2.$$

Nr. 16. $$\frac{17-3x}{5}-\frac{4x+2}{3} = 5-6x+\frac{7x+14}{3}$$
$$x = 4.$$

Nr. 17. $$x-\frac{3x-3}{5}+4 = \frac{20-x}{2}-\frac{6x-8}{7}+\frac{4x-4}{5}$$
$$x = 6.$$

Nr. 18. $$\frac{4x-21}{9}+3\tfrac{3}{4}+\frac{57-3x}{4} = 241-\frac{5x-96}{12}-11x$$
$$x = 21.$$

Nr. 19. $$\frac{6x+18}{13}-4\tfrac{5}{6}-\frac{11-3x}{36} = 5x-48-\frac{13-x}{12}-\frac{21-2x}{18}$$
$$x = 10.$$

Nr. 20. $$ax-\frac{a^2-3bx}{a}-ab^2 = bx+\frac{6bx-5a^2}{2a}-\frac{bx+4a}{4}$$
$$x = \frac{4ab^2-10a}{4a-3b}.$$

Nr. 21. $$\frac{7x+16}{21}-\frac{x+8}{4x-11} = \frac{x}{3}$$
$$x = 8.$$

Nr. 22. $$\frac{6x+7}{9}+\frac{7x-13}{6x+3} = \frac{2x+4}{3}$$
$$x = 4.$$

Nr. 23. $$\frac{4x+3}{9}+\frac{7x-29}{5x-12} = \frac{8x+19}{18}$$
$$x = 6.$$

Nr. 24. $$(12-x):\tfrac{1}{2}x = 4:1$$
$$x = 4.$$

Nr. 25. $$\frac{5x+4}{2} : \frac{18-x}{4} = 7:4$$
$$x = 2.$$

Nr. 26. $$\sqrt{4x+16} = 12$$
$$x = 32.$$

Nr. 27. $$\sqrt[3]{(2x+3)}+4 = 7$$
$$x = 12.$$

Nr. 28. $$\sqrt{12+x} = 2+\sqrt{x}$$
$$x = 4.$$

Nr. 29. $$\sqrt{(x+40)} = 10-\sqrt{x}$$
$$x = 9.$$

Nr. 30. $$\sqrt{x-16} = 8-\sqrt{x}$$
$$x = 25.$$

Nr. 31. $$\sqrt{(x-24)} = \sqrt{x}-2$$
$$x = 49.$$

Nr. 32. $$\sqrt{x-a} = \sqrt{x}-\tfrac{1}{2}\sqrt{a}$$
$$x = \frac{25a}{16}.$$

Nr. 33. $$\sqrt{5}.\sqrt{(x+2)} = \sqrt{5x}+2$$
$$x = \tfrac{9}{20}.$$

Nr. 34. $$\sqrt{4a+x} = 2\sqrt{b+x}-\sqrt{x}$$
$$x = \frac{(b-a)^2}{2a-b}.$$

Nr. 35. $$x+a+\sqrt{(2ax+x^2)} = b$$
$$x = \frac{(b-a)^2}{2b}.$$

Nr. 36. $$\frac{x-ax}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$
$$x = \frac{1}{1-a}.$$

Nr. 37. $$\frac{\sqrt{x}+28}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}+38}{\sqrt{x}+6}$$
$$x = 4.$$

Nr. 38. $$\frac{\sqrt{x}+2a}{\sqrt{x}+b} = \frac{\sqrt{x}+4a}{\sqrt{x}+3b}$$
$$x = \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2.$$

Nr. 39. $$\frac{\sqrt{ax}-b}{\sqrt{ax}+b} = \frac{3\sqrt{ax}-2b}{3\sqrt{ax}+5b}$$
$$x = \frac{9b^2}{a}.$$

Nr. 40.
$$\frac{3x-1}{\sqrt{3x}+1} = 1 + \frac{\sqrt{3x}-1}{2}$$
$$x = 3.$$

Nr. 41.
$$\frac{ax-b^2}{\sqrt{ax}+b} = c + \frac{\sqrt{ax}-b}{c}$$
$$x = \frac{1}{a}\left(b + \frac{c^2}{c-1}\right)^2.$$

Nr. 42.
$$x = \sqrt{[a^2 + x\sqrt{(b^2+x^2)}]} - a$$
$$x = \frac{b^2-4a^2}{4a}.$$

Nr. 43.
$$\sqrt{(2+x)} + \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{(2+x)}}$$
$$x = \tfrac{2}{3}.$$

Nr. 44.
$$\sqrt{5+x} + \sqrt{x} = \frac{15}{\sqrt{5+x}}$$
$$x = 4.$$

Nr. 45.
$$\sqrt{(x+\sqrt{x})} - \sqrt{(x-\sqrt{x})} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$
$$x = \tfrac{25}{16}.$$

Nr. 46.
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \sqrt{\frac{4}{a^2x^2} + \frac{9}{x^4}}}$$
$$x = 2a.$$

II. Abschnitt.

Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Nr. 1.
$$\begin{cases} 5x+4y = 58 \\ 3x+7y = 67 \end{cases}$$
$$x = 6, \quad y = 7.$$

Nr. 2.
$$\begin{cases} ax+by = m \\ cx+dy = n \end{cases}$$
$$x = \frac{md-nb}{ad-bc}, \quad y = \frac{na-mc}{ad-bc}.$$

Nr. 3.
$$\begin{cases} 11x+3y = 100 \\ 4x-7y = 4 \end{cases}$$
$$x = 8, \quad y = 4.$$

Nr. 4.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8 \end{cases}$$

$x = 6, \quad y = 12.$

Nr. 5.

$$\begin{cases} \frac{x}{7} + 7y = 99 \\ \frac{y}{7} + 7x = 51 \end{cases}$$

$x = 7, \quad y = 14.$

Nr. 6.

$$\begin{cases} \frac{x+2}{3} + 8y = 31 \\ \frac{y+5}{4} + 10x = 192 \end{cases}$$

$x = 19, \quad y = 3.$

Nr. 7.

$$\begin{cases} \frac{2x-y}{2} + 14 = 18 \\ \frac{2y+x}{3} + 16 = 19 \end{cases}$$

$x = 5, \quad y = 2.$

Nr. 8.

$$\begin{cases} \frac{2x+3y}{6} + \frac{x}{3} = 8 \\ \frac{7y-3x}{2} - y = 11 \end{cases}$$

$x = 6, \quad y = 8.$

Nr. 9.

$$\begin{cases} 3x + \frac{7y}{2} = 22 \\ 11y - \frac{2x}{5} = 20 \end{cases}$$

$x = 5, \quad y = 2.$

Nr. 10.

$$\begin{cases} (x+1) : y = 5 : 3 \\ \frac{2x}{3} - \frac{5-y}{2} = \frac{41}{12} - \frac{2x-1}{4} \end{cases}$$

$x = 4, \quad y = 3.$

Nr. 11.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{5} - \frac{10-x}{3} = \frac{y-10}{4} \\ \frac{2y+4}{3} - \frac{2x+y}{8} = \frac{x+13}{4} \end{cases}$$

$x = 7, \quad y = 10.$

Nr. 12.
$$\begin{cases} 2y - \dfrac{x+3}{4} = 7 + \dfrac{3x-2y}{5} \\ 4x - \dfrac{8-y}{3} = 24\frac{1}{2} - \dfrac{2x+1}{2} \end{cases}$$
$$x = 5, \quad y = 5.$$

Nr. 13.
$$\begin{cases} \dfrac{2y}{18} - \dfrac{8x-2}{36} = 1 - \dfrac{4+y}{3} + \dfrac{x-y}{6} \\ x : 3y = 4 : 7 \end{cases}$$
$$x = 12, \quad y = 7.$$

Nr. 14.
$$\begin{cases} x - \dfrac{3y-2+x}{11} = 1 + \dfrac{15x+\frac{4}{3}y}{33} \\ \dfrac{3x+2y}{6} - \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{11x+152}{12} - \dfrac{3y+1}{2} \end{cases}$$
$$x = 8, \quad y = 9.$$

Nr. 15.
$$\begin{cases} \dfrac{80+3x}{15} = 18\frac{1}{3} - \dfrac{4x+3y-8}{7} \\ 10y + \dfrac{6x-35}{5} = 55+10x \end{cases}$$
$$x = 10, \quad y = 15.$$

Nr. 16.
$$\begin{cases} y + \dfrac{5x+2y}{6} - \dfrac{3y-12+8x}{5} = 4 - \dfrac{15+2x-4y}{3} \\ \dfrac{7x+13-5y}{4} + x = 2y - \dfrac{3x+2y-16}{3} \end{cases}$$
$$x = 4, \quad y = 5.$$

Nr. 17.
$$\begin{cases} 1 + \dfrac{25+5y}{6} - \dfrac{7x-6}{3} = 10 - \dfrac{3x-10+7y}{12} \\ \dfrac{12-x}{9} : \left(5x - \dfrac{14+y}{3}\right) = 1 : 8 \end{cases}$$
$$x = 3, \quad y = 7.$$

Nr. 18.
$$\begin{cases} \dfrac{4x}{x^2} + \dfrac{5y}{y^2} = \dfrac{9}{y} - 1 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{7}{x} + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$
$$x = 4, \quad y = 2.$$

Nr. 19.
$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = m \\ \dfrac{c}{x} + \dfrac{d}{y} = n \end{cases}$$
$$x = \frac{bc-ad}{nb-md}, \quad y = \frac{bc-ad}{mc-na}.$$

Nr. 20.

$$\begin{cases} x - \dfrac{2y-x}{23-x} = 20 - \dfrac{59-2x}{2} \\ y + \dfrac{y-3}{x-18} = 30 - \dfrac{73-3y}{3} \end{cases}$$

$x = 21, \quad y = 20.$

Nr. 21.

$$\begin{cases} 8x - \dfrac{16+60x}{3y-1} = \dfrac{16xy-107}{5+2y} \\ 2+6y+9x = \dfrac{27x^2-12y^2+38}{3x-2y+1} \end{cases}$$

$x = 2, \quad y = 3.$

Nr. 22.

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2y}{5} - \dfrac{5x-\frac{3}{4}y+1}{3} = x + \dfrac{y-2x}{10} - \dfrac{4x-y}{7} \\ (y+2x):(y-2x) = (12x+6y-3):(6y-12x-1) \end{cases}$$

$x = 1, \quad y = 4.$

Nr. 23.

$$\begin{cases} 3 - \dfrac{7+\frac{2x}{y}}{5} = 5 - \dfrac{5x+9}{3y} \\ y - \dfrac{4+15y}{6x-2} = \dfrac{2xy-\frac{107}{8}}{2x+5} \end{cases}$$

$x = 3, \quad y = 2.$

Nr. 24.

$$\begin{cases} x+y+z = 31 \\ x+y-z = 25 \\ x-y-z = 9 \end{cases}$$

$x = 20, \; y = 8, \; z = 3.$

Nr. 25.

$$\begin{cases} x+y+z = 29 \\ x+2y+3z = 62 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4} = 10 \end{cases}$$

$x = 8, \; y = 9, \; z = 12.$

Nr. 26.

$$\begin{cases} \dfrac{4x+3y+z}{10} - \dfrac{2y+2z-x+1}{15} = 5 + \dfrac{x-z-5}{5} \\ \dfrac{9x+5y-2z}{12} - \dfrac{2x+y-3z}{4} = \dfrac{7y+z+3}{11} + \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{5y+3z}{4} - \dfrac{2x+3y-z}{12} + 2z = y - 1 + \dfrac{3x+2y+7}{6} \end{cases}$$

$x = 9, \; y = 7, \; z = 3.$

III. Abschnitt.

Reine quadratische Gleichungen und solche Gleichungen höherer Grade, die ohne Ergänzung des Quadrats gelöst werden können.

Nr. 1. $$x^2-17 = 130-2x^2$$
$$x = \pm 7.$$

Nr. 2. $$x^2+ab = 5x^2$$
$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

Nr. 3. $$\begin{cases} xy = a \\ \dfrac{x}{y} = b \end{cases}$$
$$x = \pm\sqrt{ab}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Nr. 4. $$\begin{cases} (x+y):x = 5:3 \\ xy = 6 \end{cases}$$
$$x = \pm 3, \quad y \pm 2.$$

Nr. 5. $$\begin{cases} (x+y):(x-y) = 3:1 \\ x^3-y^3 = 56 \end{cases}$$
$$x = 4, \quad y = 2.$$

Nr. 6. $$\begin{cases} xy = a^2 \\ x^2+y^2 = s^2 \end{cases}$$
$$x = \pm\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{s^2+2a^2}+\sqrt{s^2-2a^2}\right]$$
$$y = \pm\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{s^2+2a^2}-\sqrt{s^2-2a^2}\right]$$

Nr. 7. $$\begin{cases} (x-y):x = 5:6 \\ xy^2 = 384 \end{cases}$$
$$x = 24, \quad y = 4.$$

Nr. 8. $$\begin{cases} (x+y):x = 7:5 \\ xy+y^2 = 126 \end{cases}$$
$$x = \pm 15, \quad y = \pm 6.$$

Nr. 9. $$\begin{cases} (x+y)^2:(x-y)^2 = 64:1 \\ xy = 63 \end{cases}$$
$$x = \pm 9 \text{ oder } = \pm 7, \quad y = \pm 7 \text{ oder } = \pm 9.$$

Nr. 10. $$\begin{cases} x^2+xy = 12 \\ y^2+xy = 24 \end{cases}$$
$$x = \pm 2, \quad y = \pm 4.$$

. 11.
$$\begin{cases} x+y = s \\ x^2-y^2 = d^2 \end{cases}$$
$$x = \frac{s^2+d^2}{2s}, \quad y = \frac{s^2-d^2}{2s}.$$

. 12.
$$\begin{cases} x+y = s \\ xy = a^2 \end{cases}$$
$$x = \tfrac{1}{2}(s \pm \sqrt{s^2-4a^2}), \quad y = \tfrac{1}{2}(s \mp \sqrt{s^2-4a^2}).$$

. 13.
$$\begin{cases} x+y = s \\ x^2+y^2 = a^2 \end{cases}$$
$$x = \tfrac{1}{2}(s \pm \sqrt{2a^2-s^2}), \quad y = \tfrac{1}{2}(s \mp \sqrt{2a^2-s^2}).$$

. 14.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1 \end{cases}$$
$$x = 27, \quad y = 8.$$

r. 15.
$$x+\sqrt{a^2+x^2} = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

. 16.
$$\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+b^2} - \sqrt{\frac{a^2}{x^2}-b^2} = b$$
$$x = \pm\frac{2a}{b\sqrt{5}}.$$

. 17.
$$\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{x}{b}$$
$$x = \pm\sqrt{2ab-b^2}.$$

. 18.'
$$\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{13}{x-y} \\ xy = \dfrac{6}{x-y} \end{cases}$$
$$x = 3 \text{ oder } = -2, \quad y = 2 \text{ oder } = -3.$$

. 19.
$$\begin{cases} x^2-xy = 48y \\ xy-y^2 = 3x \end{cases}$$
$$x = 16 \text{ oder } = -\tfrac{48}{5}, \quad y = 4 \text{ oder } = \tfrac{12}{5}.$$

. 20.
$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x^{\frac{1}{2}}.y^{-\frac{1}{2}}} = 48 \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x}} = 24 \end{cases}$$
$$x = 36, \quad y = 4.$$

---

* Bei dieser Aufgabe und bei allen auf gleiche Weise bezeichneten setze n auch die gefundenen Wurzelwerthe in der Hauptgleichung ein.

Nr. 21. $$\frac{x^2+3x-7}{x+2+\frac{18}{x}} = 1$$
$$x = \pm 3.$$

* Nr. 22. $$\sqrt{\frac{x+a}{x}} + 2\sqrt{\frac{a}{x+a}} = b^2\sqrt{\frac{x}{x+a}}$$
$$x = \frac{a}{(b \mp 1)^2}.$$

Nr. 23. $$\frac{\sqrt{a+x}}{a} + \frac{\sqrt{a+x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{c}$$
$$x = \frac{ac^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}}}.$$

Nr. 24. $$\frac{(a+x)^{\frac{1}{n}}}{a} + \frac{(a+x)^{\frac{1}{n}}}{x} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{c}.$$
$$x = \frac{a}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1}.$$

Nr. 25. $$\frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{r}{s} \cdot x^{\frac{r}{s}-1}$$
$$x = \left(\frac{nr}{ms}\right)^{\frac{ns}{ms-nr}}$$

Nr. 26. $$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 13 \\ x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 5 \end{cases}$$
$x = 27$ oder $= 8$, $y = 8$ oder $= 27$.

Nr. 27. $$\begin{cases} xy^2 + y = 21 \\ x^2y^4 + y^2 = 333 \end{cases}$$
$x = 2$ oder $= \frac{1}{108}$, $y = 3$ oder $= 18$.

Nr. 28. $$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 180 \\ x^3 + y^3 = 189 \end{cases}$$
$x = 5$ oder $= 4$, $y = 4$ oder $= 5$.

Nr. 29. $$\begin{cases} x + \sqrt{xy} + y = 19 \\ x^2 + xy + y^2 = 133 \end{cases}$$
$x = 9$ oder $= 4$, $y = 4$ oder $= 9$.

Nr. 30. $$\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = b$$
$$x = \pm\frac{2a\sqrt{b}}{1+b}$$

31. $$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a}} = \frac{n^2a}{x-a}$$
$$x = \frac{a(1\pm n)^2}{1\pm 2n}.$$

32. $$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$$
$$x = \frac{2ab}{b^2+1}.$$

33. $$\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a+x} = b$$
$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{2b-b^2}} - a.$$

34. $$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x}{b}}$$
$$x = \pm 2\sqrt{ab-b^2}.$$

35. $$\begin{cases} 3x - \dfrac{3x}{y} = y^2 - y \\ y^2 + x = 4 \end{cases}$$
$x = 1$ oder $= 3$, $y = \pm\sqrt{3}$ oder $= 1$.

36. $$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 9 \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 18 \end{cases}$$
$x = \pm 1$, $y = \pm 4$.

37. $$\begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{y}} = x + 2xy \\ x^2 - 2y^2 = 256 - x\sqrt{y} \end{cases}$$
$x = \pm 16$, $y = 4$.

38. $$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$
$x = 3$ oder $= 2$ oder $= 1$ oder $= -6$,
$y = 2$ oder $= 3$ oder $= -6$ oder $= 1$.

39. $$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ x^3y^2 + x^2y^3 = 12 \end{cases}$$
$x = 2$ oder $= 1$, $y = 1$ oder $= 2$.

40. $$\begin{cases} (x^3-y^3):(x-y)^3 = 61:1 \\ xy = 320 \end{cases}$$
$x = \pm 20$ oder $= \pm 16$, $y = \pm 16$ oder $= \pm 20$.

41. $$\begin{cases} (x^2+y^2)\cdot(x+y) = 2336 \\ (x^2-y^2)\cdot(x-y) = 576 \end{cases}$$
$x = 11$ oder $= 5$, $y = 5$ oder $= 11$.

Nr. 42. $\begin{cases} x^3+y^3 = (x+y)xy \\ x^2y+xy^2 = 4xy \end{cases}$

$x = 2, \quad y = 2.$

Nr. 43. $\begin{cases} (x^2+y^2).(x+y) = \dfrac{15xy}{2} \\ (x^4-y^4).(x^2+y^2) = \dfrac{75x^2y^2}{4} \end{cases}$

$x = 2, \quad y = 1.$

Nr. 44. $\begin{cases} (x^2-y^2).(x-y) = 3xy \\ (x^4-y^4).(x^2-y^2) = 45x^2y^2 \end{cases}$

$x = 4$ oder $= 2, \quad y = 2$ oder $= 4.$

IV. Abschnitt.

Unreine quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Nr. 1. $x^2+8x = 33$

$x = 3$ oder $= -11.$

Nr. 2. $x^2+6x+4 = 59$

$x = 5$ oder $= -11.$

Nr. 3. $x^2-8x+10 = 19$

$x = 9$ oder $= -1.$

Nr. 4. $x^2-2px = q$

$x = p \pm \sqrt{p^2+q}.$

Nr. 5. $x^2-px = q$

$x = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2+4q}}{2}.$

Nr. 6. $x^2-x+3 = 45$

$x = 7$ oder $= -6.$

Nr. 7. $3x^2+2x-9 = 76$

$x = 5$ oder $= -\frac{17}{3}.$

Nr. 8. $5x^2-4x+3 = 159$

$x = 6$ oder $= -\frac{26}{5}.$

Nr. 9. $ax^2-bx = c$

$x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}.$

Nr. 10. $$6x+\frac{35-3x}{x}=44$$
$$x=7 \text{ oder } =\tfrac{5}{6}.$$

Nr. 11. $$4x-\frac{14-x}{x+1}=14$$
$$x=4 \text{ oder } =-\tfrac{7}{4}.$$

Nr. 12. $$3x-\frac{1121-4x}{x}=2$$
$$x=19 \text{ oder } =-\tfrac{59}{3}.$$

Nr. 13. $$\frac{8-x}{2}-\frac{2x-11}{x-3}=\frac{x-2}{6}$$
$$x=6 \text{ oder } =\tfrac{1}{2}.$$

Nr. 14. $$5x-\frac{3x-3}{x-3}=2x+\frac{3x-6}{2}$$
$$x=4 \text{ oder } =-1.$$

Nr. 15. $$\frac{16}{x}-\frac{100-9x}{4x^2}=3$$
$$x=4 \text{ oder } =\tfrac{25}{12}.$$

Nr. 16. $$3x-\frac{169-3x}{x}=29$$
$$x=13 \text{ oder } =-\tfrac{13}{3}.$$

Nr. 17. $$16-\frac{2x^2}{3}=\frac{4x}{5}+7\tfrac{3}{5}$$
$$x=3 \text{ oder } =-\tfrac{21}{5}.$$

Nr. 18. $$\frac{10}{x}-\frac{14-2x}{x^2}=\frac{22}{9}$$
$$x=3 \text{ oder } =\tfrac{21}{11}.$$

Nr. 19. $$\frac{3x-4}{x-4}+1=10-\frac{x-2}{2}$$
$$x=12 \text{ oder } =6.$$

Nr. 20. $$\frac{3x+4}{5}-\frac{30-2x}{x-6}=\frac{7x-14}{10}$$
$$x=36 \text{ oder } =12.$$

Nr. 21. $$3x-\frac{3x-10}{9-2x}=2+\frac{6x^2-40}{2x-1}$$
$$x=\tfrac{23}{2} \text{ oder } =4.$$

Nr. 22. $$\frac{x}{5+x}+\frac{7}{6-4x}=\frac{11x}{11x-8}$$
$$x=1 \text{ oder } =-\tfrac{40}{47}.$$

Nr. 12.
$$\begin{cases} 2y-\dfrac{x+3}{4}=7+\dfrac{3x-2y}{5} \\ 4x-\dfrac{8-y}{3}=24\tfrac{1}{2}-\dfrac{2x+1}{2} \end{cases}$$
$$x=5,\quad y=5.$$

Nr. 13.
$$\begin{cases} \dfrac{2y}{18}-\dfrac{8x-2}{36}=1-\dfrac{4+y}{3}+\dfrac{x-y}{6} \\ x:3y=4:7 \end{cases}$$
$$x=12,\quad y=7.$$

Nr. 14.
$$\begin{cases} x-\dfrac{3y-2+x}{11}=1+\dfrac{15x+\frac{1}{2}y}{33} \\ \dfrac{3x+2y}{6}-\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{11x+152}{12}-\dfrac{3y+1}{2} \end{cases}$$
$$x=8,\quad y=9.$$

Nr. 15.
$$\begin{cases} \dfrac{80+3x}{15}=18\tfrac{1}{2}-\dfrac{4x+3y-8}{7} \\ 10y+\dfrac{6x-35}{5}=55+10x \end{cases}$$
$$x=10,\quad y=15.$$

Nr. 16.
$$\begin{cases} y+\dfrac{5x+2y}{6}-\dfrac{3y-12+8x}{5}=4-\dfrac{15+2x-4y}{3} \\ \dfrac{7x+13-5y}{4}+x=2y-\dfrac{3x+2y-16}{3} \end{cases}$$
$$x=4,\quad y=5.$$

Nr. 17.
$$\begin{cases} 1+\dfrac{25+5y}{6}-\dfrac{7x-6}{3}=10-\dfrac{3x-10+7y}{12} \\ \dfrac{12-x}{9}:\left(5x-\dfrac{14+y}{3}\right)=1:8 \end{cases}$$
$$x=3,\quad y=7.$$

Nr. 18.
$$\begin{cases} \dfrac{4x}{x^2}+\dfrac{5y}{y^2}=\dfrac{9}{y}-1 \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{2} \end{cases}$$
$$x=4,\quad y=2.$$

Nr. 19.
$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=m \\ \dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{y}=n \end{cases}$$
$$x=\frac{bc-ad}{nb-md},\quad y=\frac{bc-ad}{mc-na}.$$

Nr. 20.

$$\begin{cases} x - \dfrac{2y-x}{23-x} = 20 - \dfrac{59-2x}{2} \\ y + \dfrac{y-3}{x-18} = 30 - \dfrac{73-3y}{3} \end{cases}$$

$$x = 21, \quad y = 20.$$

Nr. 21.

$$\begin{cases} 8x - \dfrac{16+60x}{3y-1} = \dfrac{16xy-107}{5+2y} \\ 2+6y+9x = \dfrac{27x^2-12y^2+38}{3x-2y+1} \end{cases}$$

$$x = 2, \quad y = 3.$$

Nr. 22.

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2y}{5} - \dfrac{5x-\frac{3}{4}y+1}{3} = x + \dfrac{y-2x}{10} - \dfrac{4x-y}{7} \\ (y+2x):(y-2x) = (12x+6y-3):(6y-12x-1) \end{cases}$$

$$x = 1, \quad y = 4.$$

Nr. 23.

$$\begin{cases} 3 - \dfrac{7+\frac{2x}{y}}{5} = 5 - \dfrac{5x+9}{3y} \\ y - \dfrac{4+15y}{6x-2} = \dfrac{2xy-\frac{107}{8}}{2x+5} \end{cases}$$

$$x = 3, \quad y = 2.$$

Nr. 24.

$$\begin{cases} x+y+z = 31 \\ x+y-z = 25 \\ x-y-z = 9 \end{cases}$$

$$x = 20, \; y = 8, \; z = 3.$$

Nr. 25.

$$\begin{cases} x+y+z = 29 \\ x+2y+3z = 62 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4} = 10 \end{cases}$$

$$x = 8, \; y = 9, \; z = 12.$$

Nr. 26.

$$\begin{cases} \dfrac{4x+3y+z}{10} - \dfrac{2y+2z-x+1}{15} = 5 + \dfrac{x-z-5}{5} \\ \dfrac{9x+5y-2z}{12} - \dfrac{2x+y-3z}{4} = \dfrac{7y+z+3}{11} + \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{5y+3z}{4} - \dfrac{2x+3y-z}{12} + 2z = y-1+\dfrac{3x+2y+7}{6} \end{cases}$$

$$x = 9, \; y = 7, \; z = 3.$$

III. Abschnitt.

Reine quadratische Gleichungen und solche Gleichungen höherer Grade, die ohne Ergänzung des Quadrats gelöst werden können.

Nr. 1.

$$x^2 - 17 = 130 - 2x^2$$
$$x = \pm 7.$$

Nr. 2.

$$x^2 + ab = 5x^2$$
$$x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

Nr. 3.

$$\begin{cases} xy = a \\ \dfrac{x}{y} = b \end{cases}$$
$$x = \pm\sqrt{ab}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Nr. 4.

$$\begin{cases} (x+y):x = 5:3 \\ xy = 6 \end{cases}$$
$$x = \pm 3, \quad y \pm 2.$$

Nr. 5.

$$\begin{cases} (x+y):(x-y) = 3:1 \\ x^3 - y^3 = 56 \end{cases}$$
$$x = 4, \quad y = 2.$$

Nr. 6.

$$\begin{cases} xy = a^2 \\ x^2 + y^2 = s^2 \end{cases}$$
$$x = \pm\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{s^2+2a^2} + \sqrt{s^2-2a^2}\right]$$
$$y = \pm\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{s^2+2a^2} - \sqrt{s^2-2a^2}\right]$$

Nr. 7.

$$\begin{cases} (x-y):x = 5:6 \\ xy^2 = 384 \end{cases}$$
$$x = 24, \quad y = 4.$$

Nr. 8.

$$\begin{cases} (x+y):x = 7:5 \\ xy + y^2 = 126 \end{cases}$$
$$x = \pm 15, \quad y = \pm 6.$$

Nr. 9.

$$\begin{cases} (x+y)^2:(x-y)^2 = 64:1 \\ xy = 63 \end{cases}$$
$$x = \pm 9 \text{ oder } = \pm 7, \quad y = \pm 7 \text{ oder } = \pm 9.$$

Nr. 10.

$$\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ y^2 + xy = 24 \end{cases}$$
$$x = \pm 2, \quad y = \pm 4.$$

Nr. 11.
$$\begin{cases} x+y = s \\ x^2-y^2 = d^2 \end{cases}$$
$$x = \frac{s^2+d^2}{2s}, \quad y = \frac{s^2-d^2}{2s}.$$

Nr. 12.
$$\begin{cases} x+y = s \\ xy = a^2 \end{cases}$$
$$x = \tfrac{1}{2}(s \pm \sqrt{s^2-4a^2}), \quad y = \tfrac{1}{2}(s \mp \sqrt{s^2-4a^2}).$$

Nr. 13.
$$\begin{cases} x+y = s \\ x^2+y^2 = a^2 \end{cases}$$
$$x = \tfrac{1}{2}(s \pm \sqrt{2a^2-s^2}), \quad y = \tfrac{1}{2}(s \mp \sqrt{2a^2-s^2}).$$

Nr. 14.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1 \end{cases}$$
$$x = 27, \quad y = 8.$$

*Nr. 15.
$$x + \sqrt{a^2+x^2} = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Nr. 16.
$$\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+b^2} - \sqrt{\frac{a^2}{x^2}-b^2} = b$$
$$x = \pm \frac{2a}{b\sqrt{5}}.$$

Nr. 17.
$$\frac{a}{x} + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{x}{b}$$
$$x = \pm \sqrt{2ab-b^2}.$$

Nr. 18.
$$\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{13}{x-y} \\[2ex] xy = \dfrac{6}{x-y} \end{cases}$$
$$x = 3 \text{ oder } = -2, \quad y = 2 \text{ oder } = -3.$$

Nr. 19.
$$\begin{cases} x^2-xy = 48y \\ xy-y^2 = 3x \end{cases}$$
$$x = 16 \text{ oder } = -\tfrac{48}{5}, \quad y = 4 \text{ oder } = \tfrac{12}{5}.$$

Nr. 20.
$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x^{\frac{1}{2}} . y^{-\frac{1}{2}}} = 48 \\[2ex] \dfrac{xy}{\sqrt{x}} = 24 \end{cases}$$
$$x = 36, \quad y = 4.$$

---

* Bei dieser Aufgabe und bei allen auf gleiche Weise bezeichneten setze man auch die gefundenen Wurzelwerthe in der Hauptgleichung ein.

Nr. 2.

$$\begin{cases} \dfrac{10x+y}{xy} = 3 \\ 9y - 9x = 18 \end{cases}$$

$$x = 2 \text{ oder } = -\tfrac{1}{3}$$
$$y = 4 \text{ oder } = \tfrac{5}{3}.$$

Nr. 3.

$$\begin{cases} (x+y):(x-y) = 13:5 \\ y^2 + x = 25 \end{cases}$$

$$x = 9 \text{ oder } = -\tfrac{225}{16},$$
$$y = 4 \text{ oder } = -\tfrac{25}{4}.$$

Nr. 4.

$$\begin{cases} 4xy = 96 - x^2y^2 \\ x+y = 6 \end{cases}$$

$$x = 4 \text{ oder } = 2 \text{ oder } = 3 \pm \sqrt{21},$$
$$y = 2 \text{ oder } = 4 \text{ oder } = 3 \mp \sqrt{21}.$$

Nr. 5.

$$\begin{cases} x^n + y^n = 2a^n \\ xy = c^2 \end{cases}$$

$$x = \left(a^n \pm \sqrt{a^{2n} - c^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}},$$
$$y = \left(a^n \mp \sqrt{a^{2n} - c^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Nr. 6.

$$\begin{cases} x^2 + x + y = 18 - y^2 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$x = 3 \text{ oder } = 2 \text{ oder } = -3 \pm \sqrt{3},$$
$$y = 2 \text{ oder } = 3 \text{ oder } = -3 \mp \sqrt{3}.$$

Nr. 7.

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 120 - 2y \\ xy - y^2 = 8 \end{cases}$$

$$x = 6 \text{ oder } = 9 \text{ oder } = -9 \pm \sqrt{5},$$
$$y = 4 \text{ oder } = 1 \text{ oder } = -3 \mp \sqrt{5}.$$

Nr. 8.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 78 \\ xy + x + y = 39 \end{cases}$$

$$x = 9 \text{ oder } = 3 \text{ oder } = \frac{-13 \pm \sqrt{-39}}{2},$$
$$y = 3 \text{ oder } = 9 \text{ oder } = \frac{-13 \mp \sqrt{-39}}{2}.$$

Nr. 9.

$$\begin{cases} x^2y^4 - 7xy^2 - 945 = 765 \\ xy - y = 12 \end{cases}$$

$$x = 5 \text{ oder } = \tfrac{1}{5} \text{ oder } = \frac{-17 \pm 6\sqrt{-2}}{19},$$
$$y = 3 \text{ oder } = -15 \text{ oder } = -6 \mp \sqrt{-2}.$$

10. $\begin{cases} x-2\sqrt{xy}+y-\sqrt{x}+\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} = 5 \end{cases}$

$\therefore x = 9$ oder $= \frac{25}{4}$,
$y = 4$ oder $= \frac{25}{4}$.

11. $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2}+\frac{4x}{y} = \frac{85}{9} \\ x-y = 2 \end{cases}$

$x = 5$ oder $= \frac{17}{10}$,
$y = 3$ oder $= -\frac{3}{10}$.

12. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{3x}} = 2 \\ xy-(x+y) = 54 \end{cases}$

$x = 6$ oder $= -\frac{9}{2}$,
$y = 12$ oder $= -9$.

13. $\begin{cases} x^4-2x^2y+y^2 = 49 \\ x^4-2x^2y^2+y^4-x^2+y^2 = 20 \end{cases}$

$x = \pm 3$ oder $= \pm\sqrt{6}$ oder $= \pm\sqrt{\frac{-13\pm\sqrt{-47}}{2}}$

oder $= \pm\sqrt{\frac{15\pm 3\sqrt{5}}{2}}$ oder $= \pm\sqrt{\frac{-13\pm\sqrt{-11}}{2}}$,

$y = 2$ oder $= -1$ oder $= \frac{1\pm\sqrt{-47}}{2}$

oder $= \frac{1\pm 3\sqrt{5}}{2}$ oder $= \frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$.

14. $\begin{cases} xy+xy^2 = 12 \\ x+xy^3 = 18 \end{cases}$

$x = 2$ oder $= 16$,
$y = 2$ oder $= \frac{1}{2}$.

15. $\begin{cases} x-x^{\frac{1}{2}} = 3-y \\ 4-x = y-y^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

$x = 4$ oder $= \frac{1}{4}$
$y = 1$ oder $= \frac{9}{4}$.

16. $\begin{cases} (x^2+1)y = xy+126 \\ (x^2+1)y = x^2y^2-744 \end{cases}$

$x = 5$ oder $= \frac{1}{5}$ oder $= \frac{-97\pm\sqrt{6045}}{58}$,

$y = 6$ oder $= 150$ oder $= \frac{97\pm\sqrt{6045}}{2}$.

*Nr. 17.

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y} = 12 \\ x^3+y^3 = 189 \end{cases}$$

$x = 5$ oder $= 4$ oder $= 8 \pm \frac{1}{4}\sqrt{-\frac{835}{3}}$,

$y = 4$ oder $= 5$ oder $= 8 \mp \frac{1}{4}\sqrt{-\frac{835}{3}}$.

Nr. 18.

$$\begin{cases} x^2+y^2+x-y = 132 \\ (x^2+y^2).(x-y) = 1220 \end{cases}$$

$x = 11$ oder $= -1$ oder $= 61 \pm \sqrt{-3716}$,

$y = 1$ oder $= -11$ oder $= -61 \pm \sqrt{-3716}$.

Nr. 19.

$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}}.y^{\frac{3}{2}} = 2y^2 \\ 8x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{2}} = 14 \end{cases}$$

$x = 2744$ oder $= 8$,

$y = 9604$ oder $= 4$.

*Nr. 20.

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{2}{3}} = 3x \\ x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}} = x \end{cases}$$

$x = 4$ oder $= 1$,

$y = 8$.

*Nr. 21.

$$\begin{cases} x+x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{y^2+y+2}{x^{\frac{1}{2}}}+4 \\ y+xy = y^2+4y \end{cases}$$

$x = 4$ oder $= 1$,

$y = 1$ oder $= -2$.

Nr. 22.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y} = 6\frac{3}{4}-\dfrac{y^2}{x^2} \\ x-y = 2 \end{cases}$$

$x = 4$ oder $= -2$ oder $= 1 \pm \sqrt{\frac{3}{11}}$,

$y = 2$ oder $= -4$ oder $= -1 \pm \sqrt{\frac{3}{11}}$.

*Nr. 23.

$$\begin{cases} 2x+y = 26-7\sqrt{2x+y+4} \\ \dfrac{2x+\sqrt{y}}{2x-\sqrt{y}} = \dfrac{16}{15}+\dfrac{2x-\sqrt{y}}{2x+\sqrt{y}} \end{cases}$$

$x = 2$ oder $= -10$ oder $= 16$ oder $= -24$

oder $= \dfrac{-1 \mp \sqrt{321}}{64}$ oder $= \dfrac{-1 \mp \sqrt{6145}}{64}$,

$y = 1$ oder $= 25$ oder $= 64$ oder $= 144$

oder $= \dfrac{161 \pm \sqrt{321}}{32}$ oder $= \dfrac{3073 \pm \sqrt{6145}}{32}$.

*Nr. 24.
$$\begin{cases} (\sqrt{y}+\sqrt{x}):(\sqrt{y}-\sqrt{x}) = (\sqrt{x}+2):1 \\ \dfrac{\sqrt{y}+2}{\sqrt{x}}-1 = \dfrac{3\sqrt{x}+1+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{y}} \end{cases}$$
$x = 1$ oder $= \frac{1}{9}$,
$y = 4$ oder $= \frac{16}{9}$.

*Nr. 25.
$$\begin{cases} y+\sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{42}{x} \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x}{2\sqrt{y}} = \dfrac{54}{y} \end{cases}$$
$x = 4$ oder $= \frac{144}{49}$ oder $= \frac{81}{16}$ oder $= \frac{729}{196}$,
$y = 9$ oder $= \frac{2401}{144}$ oder $= \frac{64}{9}$ oder $= \frac{9604}{729}$.

*Nr. 26.
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{2x+y}{\sqrt{y}} = 20-\dfrac{y^2+x}{y} \\ x+8 = 4y \end{cases}$$
$x = 8$ oder $= 152 \mp 64\sqrt{6}$ oder $= -4$,
$y = 4$ oder $= 40 \mp 16\sqrt{6}$ oder $= 1$.

Nr. 27.
$$\begin{cases} 8x+23y = 2x^3+2y^3 \\ 34y+6x^2-5y^2 = 13xy+24 \end{cases}$$
$x = 3$ oder $= -\frac{181}{133}$ oder $= \dfrac{55 \mp \sqrt{1114}}{26}$,
$y = 2$ oder $= \frac{34}{133}$ oder $= \dfrac{-9 \pm 3\sqrt{1114}}{26}$.

*Nr. 28.
$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}-8\sqrt{x^2-9xy^2} = 9y-16xy \\ 5x = 4+25y^2 \end{cases}$$
$x = 1$ oder $= -\frac{9}{20}$,
$y = \pm\frac{1}{5}$ oder $= \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}$.

*Nr. 29.
$$\begin{cases} 16x-y^{\frac{1}{2}} = 6y^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}} \\ \dfrac{x^4}{y}-\dfrac{12}{x^2} = \dfrac{x}{\sqrt{y}} \end{cases}$$
$x = \pm 4$ oder $= \pm 16$ oder $= \pm 2\sqrt{-3}$ oder $= \pm 8\sqrt{-3}$,
$y = 256$ oder $= 65536$ oder $= -192$ oder $= -50331648$.

Nr. 30.
$$\begin{cases} y^2-64 = 8x^{\frac{1}{2}}y \\ y-4 = 2y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$
$x = \frac{9}{4}$,
$y = 16$.

Nr. 31. $\begin{cases} \sqrt{5\sqrt{x}+5\sqrt{y}+\sqrt{y}} = 10-\sqrt{x} \\ \sqrt{x^5}+\sqrt{y^5} = 275 \end{cases}$

$$x = 9 \text{ oder } = 4 \text{ oder } = \frac{-13\pm5\sqrt{-51}}{2}$$

$$\text{oder} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{32011} \pm 10\sqrt{-400-2\sqrt{32011}}$$

$$\text{oder} = +\tfrac{1}{2}\sqrt{32011} \pm 10\sqrt{-400+2\sqrt{32011}},$$

$$y = 4 \text{ oder } = 9 \text{ oder } = \frac{-13\mp5\sqrt{-51}}{2}$$

$$\text{oder} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{32011} \mp 10\sqrt{-400-2\sqrt{32011}}$$

$$\text{oder} = +\tfrac{1}{2}\sqrt{32011} \mp 10\sqrt{-400+2\sqrt{32011}}.$$

Anmerkung. Die Aufgaben Nr. 5, 10 und 18 dieses Abschnittes lassen sich auch rein quadratisch, d. h. ohne Ergänzung des Quadrats lösen.

V. Abschnitt.

Aufgaben, welche auf Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten führen.

Nr. 1. Von welcher Zahl giebt das Doppelte zu 18 addirt, die Summe 82?

Antw. *Von* 32.

Nr. 2. Von welcher Zahl giebt das Doppelte zu 44 addirt eine Summe, welche dem Vierfachen der gesuchten Zahl gleich ist?

Antw. *Von* 22.

Nr. 3. Von welcher Zahl übertrifft das Doppelte ihre Hälfte um 6.

Antw. *Von* 4.

Nr. 4. Von zwei Städten, deren Entfernung 187 Meilen beträgt, gehen zwei Reisende zu gleicher Zeit ab, um einander entgegen zu reisen. Der eine macht täglich 8, der andere 9 Meilen. Nach wie viel Tagen werden sie sich begegnen?

Antw. *Nach* 11 *Tagen.*

Nr. 5. Unter vier Arme vertheilt Jemand 1 fl. Dem zweiten giebt er das Doppelte, dem dritten das Dreifache, dem vierten das Vierfache von dem, was der erste erhält. Wie viel bekömmt Jeder?

Antw. *Die vier Armen erhalten bezüglich* 6, 12, 18, 24 *krz.*

Nr. 6. Ein Buchhändler verkaufte von einem gewissen Werke das eine Mal 10, das andere Mal 15 Exemplare, und löste das zweite Mal 35 fl. mehr als das erste Mal. Was kostet ein Exemplar des Werkes?

Antw. 7 *fl.*

Nr. 7. Ein Sterbender hinterlässt drei Dienern zusammen ein Legat von 1400 fl. mit der Bestimmung, dass *A* das Doppelte von *B*, und *B* das Dreifache von *C* erhalten solle. Wie viel bekömmt Jeder?

Antw. *A erhält* 840 *fl.*, *B* 420 *fl. und C* 140 *fl.*

Nr. 8. Vier Kaufleute legen zu einer gemeinschaftlichen Speculation 47550 fl. zusammen, und zwar giebt *B* dreimal so viel als *A*, *C* so viel als *A* und *B* zusammen, und *D* so viel als *B* und *C* zusammen. Wie viel beträgt der Beitrag eines Jeden?

Antw. *Jener des A* 3170 *fl.*, *jener des B* 9510 *fl.*, *jener des C* 12680 *fl. und jener des D* 22190 *fl.*

Nr. 9. Ein Tuchhändler erhält drei Stücke Tuch, deren Länge zusammen 159 Ellen beträgt. Wenn nun das zweite Stück um 15 Ellen länger ist als das erste, und das dritte um 24 Ellen länger als das zweite, wie lang ist jedes?

Antw. *Das erste Stück ist* 35, *das zweite* 50, *das dritte* 74 *Ellen lang.*

Nr. 10. Ein Gefäss, welches 146 Maass hält, ist mit einer Mischung von Branntwein, Wein und Wasser gefüllt, und zwar befinden sich in ihm 15 Maass Wein mehr als Branntwein und ebenso viel Wasser als Wein und Branntwein zusammen. Wie viel also von jeder Flüssigkeit?

Antw. 29 *Maass Branntwein*, 44 *Maass Wein und* 73 *Maass Wasser.*

Nr. 11. Es beschäftigt Jemand vier Arbeiter; dem ersten zahlt er 2 fl. mehr als dem zweiten, diesem 3 mehr als dem dritten und dem dritten 4 mehr als dem vierten; zusammen aber hat er allen vieren 32 fl. zu bezahlen. Wie viel bekömmt jeder?

Antw. *Die vier Arbeiter erhalten bezüglich* 12, 10, 7 *und* 3 *fl.*

Nr. 12. Ein Vater schickt nach den Ferien seine vier Söhne wieder in die Erziehungs-Anstalt zurück, und vertheilt beim Abschied eine gewisse Summe unter sie; dabei giebt er dem dritten 9 fl. weiter als dem jüngsten, dem zweiten 12 weiter als dem

dritten, und dem ältesten 18 weiter als dem zweiten; zusammen aber erhalten sie 6 fl. mehr als das Siebenfache von dem, was der jüngste erhält. Wie viel bekömmt jeder?

Antw. *Die vier Söhne erhalten bezüglich* 60, 42, 30 *und* 21, *zusammen aber* 153 fl.

Nr. 13. Eine gewisse Geldsumme wird unter sechs Arme so getheilt, dass der zweite 15, der dritte 16, der vierte 25, der fünfte 26, der sechste 28 krz. weniger bekommen soll, als der erste; zusammen bekommen sie 10 krz. mehr als das Dreifache des ersten. Wie viel bekömmt jeder?

Antw. *Sie erhalten bezüglich* 40, 25, 24, 15, 14, 12 *krz. zusammen* 2 *fl.* 10 *krz.*

Nr. 14. Man soll die Zahl 99 so in fünf Theile zerlegen, dass der erste grösser ist als der zweite um 3, kleiner als der dritte um 10, grösser als der vierte um 9 und endlich kleiner als der fünfte um 16. Wie gross ist jeder Theil?

Antw. *Die fünf Theile sind* $17+14+27+8+33 = 99$.

Nr. 15. Von welchen zwei Zahlen ist die Summe 59 und die Differenz 17?

Antw. *Von* 21 *und* 38.

Nr. 16. Welche Zahl ist es, deren Dreifaches um 12 vermehrt ebenso viel über 54 ist, als das Dreifache allein unter 144?

Antw. 31.

Nr. 17. Zwei Personen traten mit gleichen Geldsummen in eine Spielgesellschaft ein. Nachdem die erste 14 fl. verloren, die zweite 24 fl. gewonnen hatte, befand sich die zweite im Besitz von doppelt so viel Geld als die erste. Wie viel hatte jede ursprünglich?

Antw. 52 *fl.*

Nr. 18. Bei der Wahl eines städtischen Beamten, bei welcher sich 943 Wähler und 2 Bewerber befanden, hatte der gewählte Candidat eine Majorität von 65 Stimmen erhalten. Wie viele hatten für ihn gestimmt?

Antw. 504 *Wähler.*

Nr. 19. Zwei Diebe hatten aus einem Hause zusammen eine Summe von 35 fl. geraubt; hätte der zweite 4 fl. weiter gefunden, als wirklich geschah, so hätte sein Raub gerade das Doppelte des ersten betragen. Wie viel hatte jeder bekommen?

Antw. *Sie hatten bezüglich* 13 *und* 22 *fl. geraubt.*

Nr. 20. Ein Kaufmann hat vier Stücke Seidenzeug von gleicher Länge. Nachdem er von jedem der drei ersten Stücke 19 Ellen und von dem vierten 17 Ellen verkauft hat, behält er im Ganzen 142 Ellen übrig. Wie gross war ursprünglich jedes Stück?

Antw. 54 *Ellen lang.*

Nr. 21. Ein Landwirth hat zwei gleich grosse Schafheerden. Nachdem er von der ersten 39, von der zweiten 93 Stücke verkauft hat, ist der Ueberrest der ersten Heerde doppelt so gross als jener der zweiten. Wie gross war ursprünglich jede Heerde?

Antw. 147 *Stück.*

Nr. 22. Es kauft Jemand 12 Ellen Leinwand für 3 fl. 34 krz., und zwar zahlt er bei einem Theile für die Elle 19 krz., bei einem andern Theile für die Elle 17 krz. Wie viele Ellen kaufte er von jeder Sorte?

Antw. 5 *Ellen à* 19 *und* 7 *Ellen à* 17 *krz.*

Nr. 23. Die Zahl 197 soll so in zwei Theile getheilt werden, dass das Vierfache des grössern um 50 grösser ist, als das Fünffache des kleinern. Wie heissen die Theile?

Antw. 82 *und* 115.

Nr. 24. Einem Courier, der täglich 12 Meilen macht, wird nach 5 Tagen vom nämlichen Orte aus ein anderer nachgeschickt, der, um jenen einzuholen, täglich 15 Meilen machen soll. Nach wie viel Tagen werden beide Couriere zusammentreffen?

Antw. 20 *Tage nach Abreise des zweiten.*

Nr. 25. *A* und *B* haben mit einander 60 fl. Nachdem *A* an *B* 10 fl. verloren hat, fehlen ihm noch 8 fl., um ebenso viel zu haben als *B*. Wie viel hatte Jeder ursprünglich?

Antw. *A* 36 *und B* 24 *fl.*

Nr. 26. *A* und *B* begannen ihr Handelsgeschäft mit gleichem ursprünglichem Capitale. Im ersten Jahre wuchs das Capital des *A* auf 270 fl. mehr als das Dreifache; jenes von *B* auf 1530 fl. mehr als das Doppelte des ursprünglichen Capitals an; die Vermehrung der beiderseitigen Capitalien zusammen betrug dadurch das Fünffache des ursprünglichen Capitals jedes Einzelnen. Wie gross war das letztere?

Antw. 900 *fl.*

Nr. 27. Zwei Arbeiter wurden auf 50 Tage angestellt, jeder mit einem Tagelohn von 1 fl. *A* gab von seinem Tagelohn täglich 6 krz. weniger aus als *B*, und hatte dadurch am Ende des 50sten

Tages nicht bloss das Doppelte von *B*, sondern ausserdem noch so viel, als er in zwei Tagen ausgab, übrig behalten. Wie viel gab jeder täglich aus?

Antw. *A täglich* 50, *B täglich* 56 *krz.*

Nr. 28. *A* und *B* begannen ihr Handelsgeschäft mit gleichen ursprünglichen Capitalien. Im ersten Jahre gewann *A* 400 fl., und *B* verlor ebenso viel. Im zweiten Jahr verlor *A* den dritten Theil seines jetzigen Vermögens, und *B* gewann 400 fl. weniger als das Doppelte dessen, das *A* verloren hatte. Dadurch sah sich *B* im Besitze von doppelt so viel Vermögen als *A*. Wie viel hatte jeder ursprünglich?

Antw. 3200 *fl.*

Nr. 29. Die Zahl 68 soll in zwei solche Theile getheilt werden, dass die Differenz zwischen dem grössern und 84 gleich sei der dreifachen Differenz zwischen dem kleinen Theil und 40. Wie heissen die Theile?

Antw. 42 *und* 26.

Nr. 30. *A* und *B* spielten Karten und zwar jeder mit einem besondern Spiel von 52 Karten. *A* hob zuerst ab, hierauf *B*. *A* hatte doppelt so viel Karten abgehoben, als *B* liegen liess, und *B* siebenmal so viel abgehoben als *A* liegen gelassen hatte. Wie viel hob jeder ab?

Antw. *A hob* 48, *B* 28 *Karten ab.*

Nr. 31. Von welcher Zahl ist der dritte Theil um 16 grösser als der vierte Theil?

Antw. *Von* 192.

Nr. 32. Ein Kornfeld lieferte bei der Ernte ein Drittel mehr als die Aussaat betragen hatte. Wenn nun die Ernte 48 Scheffe betrug, wie viel die Aussaat?

Antw. 36 *Scheffel.*

Nr. 33. Ein Landwirth verkauft an zwei Personen Heu, an die erste die Hälfte, an die zweite den vierten Theil seines ganzen Vorraths, an beide zusammen 96 Centner. Wie gross war sein Heu-Vorrath?

Antw. 128 *Centner.*

Nr. 34. Ein Herr vermachte zwei Dienern ein Legat von 210 fl. und zwar so, dass der zweite die Hälfte von dem Antheile des erstern bekommen sollte. Wie viel erhielt jeder?

Antw. *Der erste* 140, *der zweite* 70 *fl.*

Nr. 35. Eine Beute von 2329 fl. sollte unter zwei Personen nach dem Verhältniss von 5 : 12 getheilt werden. Wie viel bekam Jeder?

Antw. 685 *und* 1644 *fl.*

Nr. 36. Eine gewisse Geldsumme wurde unter zwei Personen so getheilt, dass, so oft *A* 9 fl. bekam, ebenso oft *B* 4 fl. erhielt. Wenn nun *A* dadurch 15 fl. mehr erhielt als *B*, welches war die zu vertheilende Summe und der Antheil eines Jeden?

Antw. *A erhielt* 27, *B* 12 *fl. und die ganze Summe betrug* 39 *fl.*

Nr. 37. Es vertheilt Jemand 98 fl. so unter drei Personen, dass *B* $\frac{5}{8}$ von *A*, und *C* $\frac{1}{5}$ von *B* erhält. Wie viel bekömmt Jeder?

Antw. *A erhält* 56, *B* 35 *und C* 7 *fl.*

Nr. 38. Es kauft Jemand zwei Fässer mit Wein, von denen das erste dreimal so viel hält als das zweite. Nachdem er aus jedem 4 Eimer abgelassen, bleibt in jenem viermal so viel Wein zurück als in diesem. Wie viel Wein hält jedes Fass?

Antw. *Das erste* 36, *das zweite* 12 *Eimer.*

Nr. 39. Bei einem Spiele setzt Jemand 3 krz. gegen 2 auf jede Partie. Nach 20 Partien hat er 5 krz. gewonnen. Wie viel Partieen gewann, wie viele verlor er?

Antw, *Er gewann* 13, *verlor* 7 *Partieen.*

Nr. 40. Zwei Zahlen verhalten sich zu einander wie 2 : 3; addirt man zu jeder 4, so verhalten sich die Summen zu einander wie 5 : 7. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 16 *und* 24.

Nr. 41. Eine Geldsumme wird unter zwei Personen vertheilt. Der Antheil des *A* verhält sich zu dem des *B* wie 5 : 3, und ist um 50 fl. grösser als $\frac{5}{9}$ der ganzen Summe. Wie gross ist der Antheil eines Jeden, und wie gross die ganze Summe?

Antw. *Von* 720 *fl. erhält A* 450 *und B* 270.

Nr. 42. Es will Jemand Fleisch einkaufen. Kauft er Ochsenfleisch, das Pfund zu 4 Batzen, so braucht er alles Geld, welches er bei sich hat; kauft er aber Hammelfleisch, das Pfund zu $3\frac{1}{2}$ Batzen, so behält er 1 fl. 36 krz. übrig. Wie viel Pfund will er kaufen?

Antw. 48 *Pfund.*

Nr. 43. Man fing einen Fisch, dessen Schwanz 9 Pfund wog; sein Kopf wog so viel als der Schwanz und die Hälfte des

Leibs zusammen; der Leib so viel als der Kopf und der Schwanz zusammen. Wie viel wog der Fisch?

Antw. *Das Gewicht des ganzen Fisches betrug* 72 *Pfund, wovon* 36 *auf den Leib*, 27 *auf den Kopf und* 9 *auf den Schwanz kamen.*

Nr. 44. Zwei Männer vereinigten sich zu einem gemeinschaftlichen Geschäft. Der eine legte 400 fl. mehr ein als der andere, und die ganze Einlage verhielt sich zur kleinern Einlage wie 14 : 5. Wie viel legte Jeder ein?

Antw. *Die beiden Einlagen betrugen* 900 *und* 500 *fl.*

Nr. 45. Ein Bankerottier schuldete an zwei Gläubiger zusammen 1400 fl. Der Unterschied ihrer beiden Forderungen verhielt sich zur Forderung des stärkern Gläubigers wie 4 : 9. Wie viel hatte jeder zu fordern?

Antw. *Die beiden Forderungen betrugen* 900 *und* 500 *fl.*

Nr. 46. Zwei Arbeiter arbeiteten zusammen 40 Tage, der eine täglich um 24, der andere täglich um 40 krz. Beide verdienten gleich viel. Wie lange arbeitete jeder?

Antw. *Der erste* 25, *der zweite* 15 *Tage lang.*

Nr. 47. Eine Gesellschaft miethete zu einer Wasserfahrt ein Schiff unter der Bedingung, dass jedes Mitglied 6 Batzen an den Schiffer bezahlen müsse, dass jedoch für jede weitere Person, welche letzterer in sein Schiff bei der Fahrt aufnehme, von dem ganzen Fahrgeld 3 Batzen abgezogen werden sollten. Da die Zahl der von dem Schiffer noch weiter aufgenommenen Personen 3 mehr als den vierten Theil der erstern Gesellschaft betrug, so hatte jede Person derselben nur 5 Batzen zu bezahlen. Aus wie viel Personen bestand jene Gesellschaft?

Antw. *Aus* 36 *Personen.*

Nr. 48. Eine Mischung von Wein und Aepfelmost enthält 25 Maass weiter als die Hälfte an Wein, und 5 Maass weniger als den dritten Theil an Aepfelmost. Wie viel Maass von jeder Sorte waren in der Mischung?

Antw. 85 *Maass Wein und* 35 *Maass Most.*

Nr. 49. Zwei Personen hatten zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte zusammengelegt, *A* 2400 fl., *B* 960 fl. *A* hatte dabei doppelt so viel verloren als *B*, aber nach Abschluss der Rechnung noch dreimal so viel als *B* übrig behalten. Wie gross war der Verlust eines Jeden?

Antw. *A verlor* 960, *B* 480 *fl.*

Nr. 50. Vier Orte, *A*, *B*, *C*, *D*, liegen in der Ordnung der genannten Buchstaben hinter einander. *A* ist von *D* 34 Meilen entfernt, die Entfernung von *A* und *B* verhält sich zur Entfernung von *C* und *D* wie 2 : 3, und $\frac{1}{4}$ der Entfernung von *A* und *B* vermehrt um die Hälfte der Entfernung von *C* und *D* ist gleich dem Dreifachen der Entfernung von *B* und *C*. Wie gross sind die Entfernungen der genannten Orte von einander?

Antw. $AB = 12$, $BC = 4$, $CD = 18$ *Meilen.*

Nr. 51. Die Bebauung eines aus 20 Morgen bestehenden, theils mit Weizen, theils mit Hafer angesäten Stückes Feld erforderte im Ganzen eine Auslage von 126 fl., und zwar jeder mit Weizen angesäte Morgen 7 fl., jeder mit Hafer angesäte 5 fl. Wie viel betrug die Auslage für das Weizenfeld, und wie viel jene für das Haferfeld?

Antw. *Das Weizenfeld kostete* 91, *das Haferfeld* 35 *fl.*

Nr. 52. Nach einer verlornen Schlacht waren nur noch 3600 Mann mehr als die Hälfte der geschlagenen Armee dienstfähig, 600 mehr als ein Achtel derselben waren verwundet, und die übrigen, nämlich ein Fünftel der Armee, theils getödtet, theils gefangen, theils wurden sie sonst vermisst. Wie stark war die Armee?

Antw. 24000 *Mann.*

Nr. 53. Zu einem gemeinschaftlichen Handelsgeschäfte legen *A*, *B* und *C* die nöthigen Fonds zusammen, und zwar ist die Einlage des *A* gleich der Einlage des *B* und dem dritten Theil der Einlage des *C*, die Einlage von *B* gleich der von *C* und einem Drittel der Einlage von *A*, endlich die Einlage von *C* 1000 fl. mehr als ein Drittel der Einlage von *A*. Wie viel hat Jeder eingelegt?

Antw. *A* 6000, *B* 5000, *C* 3000 *fl.*

Nr. 54. Man soll 91 so in zwei Theile theilen, dass der grössere dividirt durch den Unterschied beider Theile den Quotienten 7 giebt. Wie heissen die Theile?

Antw. 49 *und* 42.

Nr. 55. Es hatte Jemand 16 gleiche Goldmünzen und feilte von jeder einen Werth von 1 fl. ab, um sie nachher zu ihrem vollen Werthe auszugeben. Als der Betrug entdeckt wurde, fand man, dass die 16 Münzen zusammen nur 168 fl. werth waren. Was war der ursprüngliche Werth einer jeden?

Antw. $11\frac{1}{2}$ *fl.*

Nr. 56. Bei einem gemeinschaftlichen Geschäfte, zu welchem *A* und *B* zusammen 8330 fl. eingelegt hatten, ergab sich ein Gewinn von 1530 fl. *B* bekam von demselben 450 fl. mehr als *A*. Wie viel hatte Jeder eingelegt?

Antw. *A 2940 und B 5390 fl.*

Nr. 57. Man verkaufte eine Quantität Taback für 19 fl. und zwar theils zu 1 fl., theils zu 1 fl. 15 krz. das Pfund. Der erste Theil verhielt sich zum zweiten wie $\frac{3}{4}$: $\frac{2}{3}$. Wie viel von jeder Sorte wurde verkauft?

Antw. *9 Pfund à 1 fl. und 8 Pfund à* $1\frac{1}{4}$ *fl.*

Nr. 58. Es vertheilte Jemand 46 fl. unter 5 arme Männer und 7 arme Frauen so, dass alle Männer gleiche Portionen, und ebenso auch alle Frauen unter sich gleiche Portionen, ein Mann und eine Frau zusammen aber 8 fl. erhalten sollten. Wie viel von obiger Summe kam auf den Antheil der Männer, und wie viel auf jenen der Frauen?

Antw. *25 fl. auf die Männer. 21 fl. auf die Frauen.*

Nr. 59. Wenn auf je 10 Schafe 1 Morgen Ackerland, und ausserdem noch auf 4 Schafe 1 Morgen Weideland gerechnet werden, wie viel Schafe kann ein Pächter halten, welcher ein Pachtgut von 700 Morgen hat, und wie viel muss darunter Acker- und Weideland sein, wenn beide zu obigem Zweck in richtigem Verhältniss stehen sollen.

Antw. *Er kann 2000 Schafe halten und braucht hiezu 200 Morgen Ackerland und 500 Morgen Weideland.*

Nr. 60. Es fragte Jemand, wie viel Uhr es sei, und erhielt zur Antwort, es sei zwischen 5 und 6 Uhr und der Stunden- und Minutenzeiger stünden gerade über einander. Wie viel Uhr war es?

Antw. *5 Uhr 27 Minuten* $16\frac{4}{11}$ *Secunden.*

Nr. 61. Die Zahl 49 soll so in zwei Theile getheilt werden, dass sich der grössere Theil um 6 vermehrt, zum kleinern, um 11 verminderten Theil wie 9 : 2 verhalte. Wie heissen die Theile?

Antw. 30 *und* 19.

Nr. 62. *A*, *B* und *C* vereinigen sich zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte. *A* legt 600 fl. weniger ein als *B* und 680 fl. mehr als *C*. Die Summe der Einlagen des *A* und *B* verhält sich zur Summe der Einlagen von *B* und *C* wie 5 : 4. Wie gross ist die Einlage eines Jeden?

Antw. *A legt 1400, B 2000 und C 720 fl. ein.*

Nr. 63. Man soll 34 so in zwei Theile theilen, dass der Ueberschuss des grössern Theils über 18 sich zum Ueberschuss von 18 über den kleinern Theil verhalte wie 2 : 3. Wie heissen die Theile?

Antw. *Die Theile sind* 22 *und* 12.

Nr. 64. Ein Buchhändler verkauft zwei Bände eines Werks und zwar den ersten von 100 Bogen um 10 fl., den zweiten von 50 Bogen um 6 fl. Beide waren ganz gleich und prachtvoll gebunden. Der Preis der ungebundenen Bücher selbst aber richtete sich nach der Bogenzahl. Wie theuer war der Einband und was kostete jeder Band ungebunden?

Antw. *Der Preis des Einbandes betrug* 2 *fl.*, *also jener der ungebundenen Bände* 8 *und* 4 *fl.*

Nr. 65. Es will Jemand sein Grundstück einzäunen. Setzt er die vorräthigen Pfosten 1 Fuss auseinander, so fehlen ihm zu seinem Bedürfnisse noch 150 Stück, setzt er sie aber 3 Fuss auseinander, so bleiben ihm 70 Stück übrig. Wie viel hat er?

Antw. 180 *Pfosten.*

Nr. 66. Ein Bedienter erhielt contractmässig jährlich 80 fl. und eine Livrée. Nach 7 Monaten trat er aus dem Dienste, und erhielt 21 fl. 40 krz. nebst der Livrée zum Lohne. Wie hoch wurde letztere gerechnet?

Antw. *Zu* 60 *fl.*

Nr. 67. Welche Zahl hat die Eigenschaft, dass wenn man zu ihr 1, 5 und 13 addirt, die erste Summe sich zur zweiten verhält wie die zweite zur dritten?

Antw. 3.

Nr. 68. Ein Gutsbesitzer verpachtet sein Besitzthum gegen eine jährliche Korn-Rente nebst 200 fl. an baarem Gelde. Wenn der Scheffel Korn 10 fl. kostet, so erhält er dadurch von jedem Morgen einen Ertrag von 10 fl., kostet aber der Scheffel 13 fl. 30 krz., so beträgt die Rente 13 fl. auf jeden Morgen. Aus wie viel Scheffeln bestand die jährliche Korn-Rente?

Antw. *Aus* 120 *Scheffeln.*

Nr. 69. Der Preis eines Scheffels Gerste verhielt sich zu dem eines Scheffels Hafer wie 8 : 5. Nachdem ersterer um 6 Batzen abgeschlagen hatte, war der Werth von 9 Scheffeln Hafer um 12 fl. grösser als der Werth von 4 Scheffeln Gerste. Was war ursprünglich der Werth jedes Scheffels?

Antw. *Der Scheffel Hafer kostete 4 fl., der Scheffel Gerste 6 fl. 24 krz.*

Nr. 70. Ein Bauer hatte zwei Schafheerden, von denen die kleinere aus lauter Schafmüttern bestand, deren jede ihm 2 Lämmer brachte. Die Anzahl dieser Lämmer war gleich dem Unterschiede beider Heerden. Wären alle seine Schafe Schafmütter gewesen, und hätte ihm jede 3 Lämmer gebracht, so würde die Zahl seiner Schafe auf 432 gestiegen sein. Wie viel Schafe hatte er?

Antw. *In der einen Heerde waren* 27, *in der andern* 81 *Schafe.*

Nr. 71. Eine Eierhändlerin kauft eine Anzahl Eier, je 5 Stück um 2 Batzen, und verkauft davon die Hälfte, je 2 Stück um 1 Batzen, die andere Hälfte aber muss sie je 3 Stück um 1 Batzen geben. Sie gewinnt im Ganzen 4 Batzen. Wie viel Eier hatte sie gekauft?

Antw. 120 *Eier.*

Nr. 72. Ein Mann und seine Frau tranken gewöhnlich ein Fässchen Bier mit einander in 12 Tagen aus; die Frau allein reichte mit diesem Fässchen 30 Tage lang; wie lange der Mann allein?

Antw. 20 *Tage.*

Nr. 73. Ein Brunnen kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Durch beide zusammen geschieht dies in 12 Stunden, durch *A* allein in 20 Stunden; in welcher Zeit also durch *B* allein?

Antw. *In* 30 *Stunden.*

Nr. 74. In ein Schiff waren 442 Maass Wasser eingedrungen, und wurden durch zwei Gefässe ausgeschöpft, von denen das grössere doppelt so viel Inhalt hatte als das kleinere. Da das grössere in 3 Minuten zweimal, das kleinere in 2 Minuten dreimal geleert wurde, so wurde die Entleerung des Schiffes in 12 Minuten vollzogen. Wie gross war der Inhalt jedes Gefässes?

Antw. 13 *und* 26 *Maass.*

Nr. 75. Ein Windhund verfolgt einen Hasen. Der Hase hat 50 Sprünge voraus und macht 4 Sprünge, während der Hund 3 macht; es sind jedoch 2 Hundssprünge so gross als 3 Hasensprünge. Wie viel Sprünge kann sowohl der Hund als der Hase noch machen, bis der erstere den letztern einholt?

Antw. *Der Hund* 300, *der Hase* 400.

Nr. 76. Wenn man 10 Aepfel um 1 Sechser und 25 Birnen um 12 krz. kauft, und ich erhalte 100 Aepfel und Birnen für 57 krz., wie viel von jeder Sorte werde ich bekommen?

Antw. 75 *Aepfel und* 25 *Birnen.*

Nr. 77. Es hat Jemand zweierlei Weine, von der ersten Sorte kostet der Schoppen 20, von der zweiten der Schoppen 12 krz. Er will daraus eine Mischung machen, den Schoppen zu 14 krz. Wie viel muss er von jeder Sorte nehmen?

Antw. *Für jeden Schoppen der Mischung $\frac{1}{4}$ Schoppen der bessern und $\frac{3}{4}$ Schoppen der geringern Sorte.*

Nr. 78. Es besitzt Jemand ein Gut von 35 Morgen, welches theils mit Weizen, theils mit Roggen angebaut ist. Das Einernten, Ausdreschen u. s. w. kostet ihm im Ganzen 130 fl., und zwar der Morgen Roggenfeld $2\frac{1}{2}$ fl., und die Kosten für einen Morgen Weizenfeld um $\frac{1}{2}$ fl. vermehrt verhalten sich zu den Kosten eines Morgens Roggenfeld wie 7 : 3. Wie viel Morgen waren mit jeder Fruchtgattung angepflanzt?

Antw. 15 *Morgen mit Weizen und* 20 *Morgen mit Roggen.*

Nr. 79. Von zwei Stücken Tuch von gleicher Güte, aber von ungleicher Länge kostet das erste 100 fl., das zweite 130 fl. Wenn die Länge jedes Stücks um 10 Ellen grösser wäre, so würden sich die beiden Längen verhalten wie 5 : 6. Wie lang ist jedes Stück, und wie viel Gulden kostet jede Elle?

Antw. *Das erste Stück hält* 20, *das zweite* 26 *Ellen, und jede Elle kostet* 5 *fl.*

Nr. 80. Die Mannschaft eines Generals bestand aus dreimal so viel Infanterie als Cavallerie. Davon desertirten vor einer Schlacht 120 Mann weniger als $\frac{1}{12}$ der Infanterie und 120 Mann mehr als $\frac{1}{12}$ der Cavallerie; $\frac{1}{4}$ der ganzen Mannschaft blieb als Besatzung einer Festung zurück, und $\frac{3}{8}$ derselben blieben nach der Schlacht übrig; der Rest aber wurde theils gefangen, theils getödtet. Dieser Rest, um 300 Mann vermehrt, war so gross, als die Hälfte der ursprünglichen Zahl der Infanterie. Wie viel Mann commandirte der General?

Antw. 3600 *Mann, worunter* 900 *Cavalleristen und* 2700 *Infanteristen.*

Nr. 81. *A* und *B* haben gleiches jährliches Einkommen. *A* legt jährlich $\frac{1}{5}$ desselben zurück; *B* aber, der jährlich 800 fl. mehr

als *A* aufwendet, hat in 4 Jahren 2200 fl. Schulden. Wie gross ist das Einkommen eines Jeden?

Antw. *Das jährliche Einkommen betrug* 1250 *fl.*

Nr. 82. Es spielt Jemand und gewinnt doppelt so viel als er Geld bei sich hat; hierauf verliert er 16 fl.; bei dem nächsten Spiel verliert er wieder $\frac{4}{5}$ des übrig gebliebenen Geldes, und gewinnt hierauf wieder so viel als ursprünglich sein Geld betrug. Dadurch sieht er sich im Besitz von 80 fl. Wie viel hatte er ursprünglich?

Antw. 52 *fl.*

Nr. 83. Nachdem ich beim Spiele zuerst den dritten Theil meines Geldes verloren, hierauf das Dreifache meines übrig gebliebenen Geldes, dazu noch die Hälfte des ursprünglichen und ausserdem 50 fl. gewonnen hatte, hatte ich gerade so viel über 100 fl. als ich anfangs unter 100 fl. gehabt hatte. Wie viel hatte ich ursprünglich?

Antw. 36 *fl.*

Nr. 84. Das Vermögen des *A* beträgt $\frac{2}{3}$ von dem des *B*, die Schulden des *A* 100 fl. weniger als $\frac{2}{3}$ seines Vermögens, die des *B* 100 fl. mehr als $\frac{7}{8}$ des seinigen. Nach Bezahlung ihrer beiderseitigen Schulden behält *B* halb so viel übrig als *A*. Wie viel hat Jeder ursprünglich im Vermögen?

Antw. *Vor Bezahlung der Schulden hat A* 7200 *fl. und B* 10800 *fl.*

Nr. 85. Die Zahl 36 soll so in drei Theile getheilt werden, dass $\frac{1}{2}$ des ersten, $\frac{1}{3}$ des zweiten, und $\frac{1}{4}$ des dritten Theils einander gleich seien. Wie heissen die Theile?

Antw. 8, 12, 16.

Nr. 86. Die Zahl 116 soll so in vier Theile getheilt werden, dass wenn der erste um 5 vermehrt, der zweite um 4 vermindert, der dritte mit 3 multiplizirt und der vierte mit 2 dividirt wird, die Resultate gleich werden. Wie heissen die Theile?

Antw. 22, 31, 9, 54.

Nr. 87. Ein Edelmann hat einen Theil seiner Pferde auf der Weide, einen Theil im Stalle. Von der ersten Abtheilung kostet ihm das Stück wöchentlich $1\frac{1}{2}$ fl., von der letztern 5 fl. Die Pferde im Stalle kosten ihm überhaupt doppelt so viel als die auf der Weide. Schickt er aber drei seiner Pferde aus dem Stalle auf die Weide, so beträgt die Ausgabe für den Stall wöchentlich 3 fl.

im Ganzen mehr als für die Weide. Wie viel Pferde hatte der Edelmann?

Antw. *16 auf der Weide, 9 im Stalle.*

Nr. 88. Ein Silber-Arbeiter erhielt für ein Silber-Geschirr, welches 100 fl. werth war, dem Gewichte nach ebenso viel unverarbeitetes Silber und ausserdem noch 37½ fl. Bei gleichen Preisen erhielt er für ein Silbergeschirr, welches 12 Unzen wog, 8 Unzen unverarbeitetes Silber und 28 fl. Wie schwer war das erste Silbergeschirr, und wie hoch wurde die Unze des verarbeiteten und des unverarbeiteten Silbers berechnet?

Antw. *Das erste Silbergeschirr wog 25 Unzen; der Preis einer Unze unverarbeiteten Silbers war 2½ fl., verarbeiteten Silbers hingegen 4 fl.*

Nr. 89. Die Rechnungsmünze ist in England das Pfund à 20 Schilling, die Zahlungsmünzen aber sind Guinéen à 21 Schilling, jeder Schilling ist wieder getheilt in 12 pence. Es wechselt nun Jemand in London ein Bankbillet von 85 Pfund in Guinéen und Schillinge um, wobei er viermal so viel Guinéen als Schillinge erhält. Er findet bei der Prüfung, dass sämmtliche Münzen nicht vollwichtig sind, und dass er dadurch einen Verlust von 8 Pfund 5 Schillingen erleide. Zur Ausgleichung erhält er noch 9 Guinéen derselben Art, wogegen er 4 eben solche Schillinge, und ausserdem noch 3 vollwichtige zurückgiebt. Wie viel Schillinge und Guinéen sind ursprünglich bezahlt worden, und wie viel beträgt im Durchschnitt der Werth einer solchen nicht vollwichtigen Guinée und eines derartigen Schillings?

Antw. *80 Guinéen und 20 Schillinge wurden ursprünglich bezahlt und zwar die Guinée à 19 Schillinge und der Schilling à 9 pence.*

Nr. 90. Eine Uhr, welche bedeutend vorging, und schon eine Nachmittagsstunde angab, während es noch Vormittag war, musste um 5 Stunden und 40 Minuten zurückgerückt werden, um die wahre Zeit anzugeben. Da sich die von der Uhr angegebene Zeit zur wahren Zeit verhielt wie 29 : 105, welches war die wahre Zeit?

Antw. *8 Uhr 45 Minuten Vormittags.*

Nr. 91. Die Besatzung eines Schiffes bestand aus Seeleuten und Soldaten. Es kamen je 22 Seeleute auf 3 Kanonen, und ausserdem noch 10 Mann im Ganzen darüber. Die ganze Mann-

schaft betrug an Zahl das Fünffache der Anzahl von Soldaten und Kanonen zusammen. Wenn bei einem Kampfe, welchen das Schiff zu bestehen hatte, und in welchem die Zahl der Todten $\frac{1}{4}$ von der Zahl der Ueberlebenden betrug, 5 Mann weniger getödtet worden wären, so kämen im Ganzen je 13 Mann auf 2 Kanonen. Wie viel Kanonen, Seeleute und Soldaten hatte das Schiff?

Antw. 90 *Kanonen*, 670 *Seeleute und* 55 *Soldaten*.

Nr. 92. Einem Schafhirten wurde von einem Haufen von Nachzüglern einer Armee $\frac{1}{4}$ seiner Heerde und $\frac{1}{4}$ Schaf geraubt; von einem zweiten Haufen $\frac{1}{3}$ des Ueberrestes und $\frac{1}{3}$ Schaf; von einem dritten Haufen die Hälfte des Restes und $\frac{1}{2}$ Schaf. Dadurch blieben ihm nur noch 25 Schafe übrig. Wie viel hatte er ursprünglich?

Antw. 103 *Schafe*.

Nr. 93. Es verspielte Jemand $\frac{1}{4}$ seines Geldes und gewann hierauf 3 fl. Hierauf verspielte er wieder $\frac{1}{3}$ seines jetzigen Geldes und gewann nachher 2 fl.; endlich verspielte er $\frac{1}{7}$ dessen, was er jetzt hatte, wodurch er 12 fl. übrig behielt. Wie viel hatte er ursprünglich?

Antw. 20 *fl*.

Nr. 94. Ein Kaufmann nahm aus seinem Geschäfte am Anfang eines jeden Jahres 500 fl. zur Bestreitung seiner eigenen Bedürfnisse. Das, was er jedes Jahr im Geschäfte liess, vermehrte sich in demselben um $\frac{1}{3}$. Dadurch sah er sich am Ende des dritten Jahres im Besitze von doppelt so viel Vermögen, als er am Anfange des Geschäfts hatte. Wie viel hatte er anfangs?

Antw. 7400 *fl*.

Nr. 95. Ein Kaufmann kauft ein Fass mit Wein für 1440 fl. und verkauft 12 Maass mehr als $\frac{3}{4}$ desselben mit einem Gewinn von 25 Procent. Den Ueberrest verkauft er zu einem solchen Preise, dass er dadurch an dem ganzen Quantum 60 Procent gewinnt. Hätte er aber Alles zu dem letzten Preise verkauft, so hätte er 175 Procent gewonnen. Wie viel Maass hält das Fass?

Antw. 720 *Maass*.

Nr. 96. In einen leeren Behälter, welcher 720 Eimer fasste, floss durch eine Röhre gleichförmig Wasser ein; zu gleicher Zeit wurde dasselbe aber durch eine Pumpe ausgepumpt, welche durch 3 Mann in Bewegung gesetzt, 4 Stösse in der Minute machte. Da dies nicht hinreichte, so füllte sich der Behälter in 6 Stunden. Es

wurde daher noch eine zweite Pumpe eingesetzt, deren Ausgussmenge an Wasser sich zu der Leistung der ersten Pumpe verhielt wie 2 : 3, und ein Mann von der ersten Pumpe weggenommen, um die zweite zu treiben. Dadurch machte die erste Pumpe nur noch 10 Stösse in 3 Minuten, die zweite aber 5 Stösse in 2 Minuten. Nun wurde der Behälter in 12 Stunden entleert. Wie viel Wasser gab jede Pumpe bei einem Stosse, und wie viel Wasser floss durch die Röhre in jeder Minute?

Antw. *Die erste Pumpe pumpt mit jedem Stoss* 3, *die zweite hingegen* 2 *Eimer aus, und die Röhre giebt* 14 *Eimer in jeder Minute.*

Nr. 97. Ein armer Mann mit einem Weibe und 7 Kindern konnte während einer Theuerung nur so viel erwerben, dass er für jedes Glied seiner Familie, sich selbst mit eingeschlossen, ¼ Laib Brod kaufen konnte. Er sprach die Armenbehörde um Beistand an, und erhielt dadurch täglich als Unterstützung halb so viel als er selbst verdiente, nebst der Bewilligung, von dem auf städtische Kosten gebackenen Brode nach Bedürfniss kaufen zu dürfen, und zwar zu einem im Verhältniss von 4 : 5 verminderten Preise. Dadurch war er in den Stand gesetzt, für sich und seine Familie zur Befriedigung der täglichen Bedürfnisse ⅓ Laib auf die Person kaufen zu können; und noch täglich 19½ krz. übrig zu behalten. Welches war die tägliche Unterstützung, welche er erhielt?

Antw. 22½ *krz.*

VII. Abschnitt.

Aufgaben, welche auf Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten führen.

Nr. 1. Gewinnt *A* von *B* 4 fl., so hat er halb so viel als *B* behält. Gewinnt jedoch *B* von *A* 6 fl., so hat er das Dreifache von dem, was *A* übrig bleibt. Wie viel hat Jeder?

Antw. *A hat* 36, *B* 84 *fl.*

Nr. 2. Es kauft Jemand zweierlei Weine, von der ersten Sorte den Eimer zu 90 fl., von der zweiten zu 60. Im Ganzen zahlt er 3840 fl. Hätte er ebenso viele Eimer vom bessern ge-

kauft, als er vom schlechtern wirklich kaufte, und umgekehrt, so hätte er 330 fl. weniger zu bezahlen gehabt. Wie viel kaufte er von jeder Sorte?

Antw. 30 *Eimer der bessern,* 19 *der schlechtern Sorte.*

Nr. 3. Welcher Bruch erhält, wenn man zum Zähler 4 addirt, den Werth $\frac{1}{2}$, wenn man aber zum Nenner 7 addirt, den Werth $\frac{1}{5}$?

Antw. $\frac{5}{18}$.

Nr. 4. Es sollen zwei Zahlen gefunden werden, deren grössere sich zur kleinern verhalte, wie ihre Summe zu 42 und wie ihre Differenz zu 6. Wie heissen sie?

Antw. 32 *und* 24.

Nr. 5. Von welchen zwei Zahlen verhalten sich die Differenz, die Summe und das Product wie die drei Zahlen 2, 3 und 5?

Antw. *Von* 10 *und* 2.

Nr. 6. *A* und *B* schieben Kegel mit einander. *A* sagt zu *B*: wenn du mir zum Voraus 5 fl. giebst, so setze ich in jedem Spiele 1 fl. gegen 36 krz., und spiele mit dir 36 Spiele. *B* geht auf diesen Vorschlag ein, und gewinnt dadurch nicht blos seine 5 fl. wieder, sondern noch ausserdem 3 fl. 48 krz. Wie viel Spiele hat jeder gewonnen?

Antw. *A gewann* 17, *B* 19 *Spiele.*

Nr. 7. Es vertauscht Jemand 12 Scheffel Weizen, und erhält dafür 8 Scheffel Gerste um 56 fl. Zu derselben Zeit bietet er ein gewisses Quantum von Weizen für ein ebenso grosses Quantum von Gerste nebst einem Aufgeld von 75 fl., oder gegen 200 fl. baares Geld an. Welches war der Preis des Weizens und der Gerste?

Antw. *Der Scheffel Weizen kostete* 8 *fl., Gerste* 5 *fl.*

Nr. 8. Ein Weinhändler verkauft zweierlei Weine, von der ersten Sorte 20 Eimer, von der zweiten 30 Eimer, und löst zusammen 2400 fl. Zu anderer Zeit verkauft er um gleiche Preise von der ersten Sorte 30, von der zweiten 25 Eimer um 2800 fl. Was kostete der Eimer von jeder Sorte?

Antw. *Von der ersten* 60, *von der zweiten* 40 *fl.*

Nr. 9. *A* und *B* spielen Karten und zwar jeder mit einem besondern Spiel von 52 Karten. *A* hebt zuerst ab, hierauf *B*. Die Zahl der Karten, welche *A* liegen liess, macht mit der Zahl der Karten, welche *B* abhob, zusammen 50 aus., und die Zahl der

Karten, welche beide zusammen liegen liessen, ist um 64 grösser als die Summe der von beiden abgehobenen Karten. Wie viel hat Jeder abgehoben?

Antw. *A hob* 11, *B* 9 *Karten ab.*

Nr. 10. Ein Geflügelhändler treibt eine Heerde von Gänsen und welschen Hühnern zu Markte, und zwar ist die dreifache Zahl der welschen Hühner um 15 grösser als die doppelte Zahl seiner Gänse. Nachdem er unterwegs 10 Gänse gekauft, und 15 welsche Hühner verkauft hat, verhält sich die Zahl der Gänse zur Zahl der Hühner wie 7 : 3. Wie viel hatte er ursprünglich von jeder Gattung?

Antw. 45 *Hühner und* 60 *Gänse.*

Nr. 11. Ein Fruchthändler mischt mit 28 Scheffeln Gerste, den Scheffel zu 4 fl. 40 krz., Roggen, den Scheffel zu 6 fl., und Weizen, den Scheffel zu 8 fl., und erhält hiedurch 100 Scheffel, den Scheffel zu 6 fl. 40 krz. Wie viel Scheffel Roggen und Weizen verwendete er zur Mischung?

Antw. 20 *Scheffel Roggen und* 52 *Scheffel Weizen.*

Nr. 12. *A* und *B* haben verschiedene Capitalien. *A* gewinnt mit dem seinigen 1500 fl.; *B* verliert mit dem seinigen 500 fl., und jetzt verhält sich das Geld des *A* zu dem des *B* wie 3 : 2. Hätte jedoch *A* 500 fl. verloren und *B* 1000 fl. gewonnen, so würde sich das Geld des *A* zu dem des *B* verhalten wie 5 : 9. Wie viel hatte Jeder ursprünglich?

Antw. *A* 3000, *B* 3500 *fl.*

Nr. 13. Es mischt Jemand eine gewisse Menge Branntwein mit Wasser, und findet, dass, wenn er von jeder Gattung 6 Maass mehr genommen hätte, 7 Maass Branntwein auf 6 Maass Wasser kämen; hätte er jedoch von jeder Sorte 6 Maass weniger genommen, so kämen 6 Maass Branntwein auf 5 Maass Wasser. Wie viel nahm er von jeder Gattung?

Antw. 78 *Maass Branntwein und* 66 *Maass Wasser.*

Nr. 14. Auf einem Fruchtkasten liegen eine Anzahl Scheffel Roggen à 6 fl. 40 krz. der Scheffel, und Gerste à 4 fl. 36 krz. der Scheffel, zusammen im Werthe von 430 fl. Nachdem vom Roggen $\frac{1}{6}$ und von der Gerste $\frac{2}{5}$ verkauft worden, beträgt der Werth des Vorraths noch 258 fl. 40 krz. Wie viel Scheffel von jeder Fruchtgattung waren ursprünglich vorräthig?

Antw. 30 *Scheffel Roggen und* 50 *Scheffel Gerste.*

Nr. 15. Es bestellt Jemand 6 Dutzend Bouteillen Moselwein und 3 Dutzend Bouteillen Rheinwein zusammen für 126 fl. Da aber unterdessen der Preis jeder Bouteille um $\frac{1}{2}$ fl. gefallen ist, so erhält er für dieselbe Summe 20 Bouteillen Moselwein und 3 Dutzend und 8 Bouteillen Rheinwein mehr als er bestellt hatte. Was war zuerst der Preis jeder Bouteille?

Antw. *Moselwein* 1 *fl.*, *Rheinwein* $1\frac{1}{2}$ *fl.*

Nr. 16. Wenn die Länge eines Rechtecks um 4 und die Breite um 5 Fuss grösser wäre, so würde sein Inhalt um 116 Quadratfuss mehr betragen. Wäre aber die Länge um 5 und die Breite um 4 Fuss grösser, so wäre der Inhalt nur um 113 Quadratfuss grösser. Wie lang und breit ist das Reckteck?

Antw. 12 *Fuss lang und* 9 *Fuss breit.*

Nr. 17. Zwei Zahlen verhalten sich zu einander wie 5 : 7 und ein anderes Zahlenpaar wie 3 : 5. Die Summe der ersten Zahlen von jedem Paare verhält sich zur Summe der zweiten Zahlen wie 9 : 13, und der Unterschied zwischen diesen beiden Summen ist = 16. Wie heissen die vier Zahlen?

Antw. *Das erste Zahlenpaar* 30 *und* 42, *das zweite* 6 *und* 10.

Nr. 18. Ein Weinhändler hat zweierlei Weine. Mischt er beide unter einander im Verhältniss von 2 : 1, so kommt die Maass auf 39 krz., mischt er sie aber im Verhältniss von 7 : 2, so kommt die Maass auf $39\frac{1}{2}$ krz. Wie hoch kommt ihm die Maass jeder einzelnen Sorte?

Antw. *Von der ersten Sorte* $40\frac{1}{2}$, *von der zweiten* 36 *krz.*

Nr. 19. Ein Mehlhändler mischt Weizenmehl, welches er den Centner zu 10 fl. gekauft hat, mit Gerstenmehl, den Centner zu 4 fl., in solchem Verhältniss, dass er $43\frac{3}{4}$ Procent gewinnt wenn er den Centner zu 11 fl. verkauft. In welchem Verhältniss geschah die Mischung?

Antw. 14 *Centner Weizenmehl auf* 9 *Centner Gerstenmehl.*

Nr. 20. Eine zweiziffrige Zahl giebt bei der Division mit 4 einen gewissen Quotienten und den Rest 3, bei der Division mit 9 einen andern Quotienten und den Rest 8. Die Ziffer in der Stelle der Zehner ist gleich diesem zweiten Quotienten, und die Ziffer in der Stelle der Einheiten gleich dem 17ten Theile des ersten Quotienten. Wie heisst die Zahl?

Antw. 71.

Nr. 21. Ein Mann und seine Frau können ein Fässchen
ar in 15 Tagen mit einander austrinken. Nachdem sie jedoch
Tage gemeinschaftlich getrunken, macht der Mann eine Reise,
d die Frau reicht daher mit dem Reste noch 30 Tage lang aus.
ie lange würde das Fässchen für jedes Einzelne ausreichen?

Antw. *Für den Mann* $21\frac{3}{7}$, *für die Frau* 50 *Tage lang?*

Nr. 22. In einer gefüllten Börse befinden sich 57 preussi-
ne Thaler und 18 französische Zwanzig-Frankenstücke. Durch
Thaler und 15 Zwanzig-Frankenstücke sind $\frac{11}{63}$ der Börse ge-
lt. Wie viel von jeder Münzsorte gehen in die Börse?

Antw. 63 *Thaler oder* 189 *Zwanzig-Frankenstücke.*

Nr. 23. Einige Schmuggler hatten am Ufer ein verborgenes
wölbe, welches genau ihre Schiffsladung von Schmuggelwaaren
ste, nämlich 13 Ballen Baumwollenzeug und 33 Fässchen mit
anntwein. Während sie mit dem Ausladen und Füllen des Ge-
lbes beschäftigt sind, werden sie von einem Zollschiffe über-
scht, und lassen das Gewölbe zu zwei Drittheilen gefüllt zurück,
lem sie mit 5 Ballen und 9 Fässchen davon segeln. Wie viele
llen allein, oder wie viele Fässchen allein fasst das Gewölbe?

Antw. 24 *Ballen oder* 72 *Fässchen.*

Nr. 24. Auf zwei Räder, deren Umfänge sich wie 5 : 3 ver-
lten, sind zwei Seile aufgewickelt, deren Längen-Unterschied um
0 Fuss grösser ist als der Unterschied der Umfänge beider Rä-
r. Das längere Seil schlingt sich um das grössere Rad 12mal
er als das kürzere Seil um das kleinere Rad, und wenn sich
s grössere Rad 3mal so schnell umdreht als das kleinere, so
rden beide Seile zu gleicher Zeit abgewickelt. Wie gross sind
Umfänge beider Räder, und wie lang beide Seile?

Antw. *Die Umfänge der beiden Räder betragen* 20 *und*
, *die Längen der beiden Seile* 72 *und* 360 *Fuss.*

Nr. 25. Zwei Bauern, *A* und *B*, haben zusammen 63 fl.
euern zu bezahlen, und zwar nach Verhältniss des Ertrags ihrer
iter. *A*, welcher 4 Morgen mehr besitzt als *B*, wovon jeder
rgen aber 6 fl. weniger erträgt, zahlt an obiger Steuer 35 fl.
tte *A* 6 Morgen mehr, und würde der Morgen des *B* 9 fl. we-
ger als jetzt tragen, so müsste *A* 45 fl. bezahlen. Wie viel Mor-
n Güter hat Jeder, und was ist der Ertrag derselben?

Antw. *A hat* 12 *Morgen, die* 360 *fl. ertragen, B* 8 *Mor-
n mit* 288 *fl. Ertrag.*

Nr. 26. Auf einem Dampfschiffe, welches von *A* nach *B* fuhr, waren bei der Abfahrt 24 Passagiere mehr auf dem Vorderdeck als auf dem Hinterdeck. Die Einnahme des Schiffs für die ganze Fahrt betrug für alle Passagiere zusammen 540 fl. und zwar machte die Fahrtaxe für je 7 Passagiere des Vorderdecks zusammen 1 fl. weniger als für 4 auf dem Hinterdeck. Auf der Hälfte des Weges kamen noch 18 Passagiere auf das Vorderdeck und 6 auf das Hinterdeck, wodurch die Einnahme des Schiffes im Verhältniss von 17 : 15 wuchs. Wie gross war die Zahl der Passagiere und was betrug die Fahrtaxe?

Antw. 30 *Hinterdeck- und* 54 *Vorderdeck-Passagiere; jeder der erstern zahlt* 9, *jeder der letztern* 5 *fl. für seinen Platz.*

Nr. 27. In einer von den Ecken eines rechtwinkligen Gartens befindet sich ein ebenfalls rechtwinkliger Fischteich, dessen Seiten sich ebenso zu einander verhalten, wie jene des Gartens, dessen Inhalt der neunte Theil von dem Inhalt des Gartens ist, und dessen Umfang um 600 Fuss kleiner ist als der Umfang des Gartens. Wenn die eine Seite des Gartens um 9, die andere um 15 Fuss grösser wäre, so wäre der Garten selbst um 5805 Quadratfuss grösser. Wie gross ist jede Seite des Gartens?

Antw. *Die Länge beträgt* 270, *die Breite* 180 *Fuss.*

Nr. 28. *A* und *B* kauften jeder für 3000 fl. Staats-Papiere, *A* 3procentige, *B* 4procentige. Der Cours dieser Papiere stand so, dass *B* 10 fl. Interesse mehr bekam als *A*. Als die Papiere beiderseits um 10 Procent stiegen, so verkauften sie dieselben wieder, und *A* erhielt dafür 100 fl. mehr als *B*. Welches war der ursprüngliche Cours der Papiere?

Antw. *Die 3procentigen hatten einen Cours von* 60, *die 4procentigen von* 75.

Nr. 29. 5000 fl. waren zu einfachen Zinsen in zwei Posten ausgeliehen, der kleinere zu 2 Procent höher als der grössere. Später wuchs der Zins des grösseren um 1 Procent, der des kleinern nahm um 1 Procent ab. Dadurch wurde der ganze bezogene Zins um $\frac{1}{4}$ des ursprünglichen Zinses vermehrt. Wäre der Zins des grössern Theiles auf gleiche Art gewachsen, ohne dass sich der Zins des kleinern vermindert hätte, so hätte der ganze Zins um $\frac{1}{2}$ zugenommen. Wie gross waren die ausgeliehenen Posten, und welchen Zins trugen sie?

Antw. 4000 *fl. zu* 2 *Procent*, 1000 *fl. zu* 4 *Procent.*

VIII. Abschnitt.

Aufgaben, welche auf reine quadratische oder auf solche Gleichungen höherer Grade führen, die ohne Ergänzung des Quadrats gelöst werden können.

Nr. 1. Welche zwei Zahlen haben die Eigenschaft, dass ihre Summe sich zur grössern verhält wie 10 : 7 und dass das Product dieser Summe und der kleinern 270 ist?

Antw. ± 21 *und* ± 9.

Nr. 2. Von zwei Zahlen, die sich wie 4 : 5 verhalten, ist der Unterschied der Quadrate 81. Wie heissen sie?

Antw. ± 12 *und* ± 15.

Nr. 3. Welche zwei Zahlen haben die Eigenschaft, dass sich ihre Differenz zur grössern verhält wie 2 : 9, und dass die Differenz ihrer Quadrate 128 ist?

Antw. ± 18 *und* ± 14.

Nr. 4. Ein Seidenhändler kauft ein Stück Seidenzeug für 162 fl. Die Zahl der Gulden, welche er für jede Elle bezahlt, verhält sich zur Zahl der Ellen wie 2 : 9. Wie viel Ellen hält das Stück, und was kostet die Elle?

Antw. 27 *Ellen à* 6 *fl.*

Nr. 5. Die Zahl 18 soll so in zwei Theile getheilt werden, dass sich die Quadrate dieser Theile verhalten wie 25 : 16. Wie heissen diese Theile?

Antw. 10 *und* 8.

Nr. 6. Es sollen drei Zahlen gefunden werden, die sich verhalten wie $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ und deren Quadrat-Summe 724 ist. Wie heissen sie?

Antw. ± 12, ± 16, ± 18.

Nr. 7. Die Zahl 14 soll so in zwei Theile getheilt werden, dass, wenn man den grössern Theil durch den kleinern und ebenso umgekehrt den kleinern Theil durch den grössern dividirt, die Quotienten sich verhalten wie 16 : 9. Wie heissen die Theile?

Antw. 8 *und* 6.

Nr. 8. Welche zwei Zahlen haben die Eigenschaft, dass sich ihre Differenz zur kleinern verhält wie 4 : 3, und dass ihr Product multiplicirt mit der kleinern = 504 ist?

Antw. 14 *und* 6.

Nr. 9. Von zwei Zahlen, die im Verhältniss von 5 : 4 stehen, ist die Summe der Kuben = 5103. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 15 *und* 12.

Nr. 10. Eine Anzahl Knaben zog aus, um einen Baumgarten zu plündern. Jeder hatte so viele Säckchen bei sich, als es Knaben waren, und in jedes Säckchen gingen viermal so viele Aepfel als die Zahl der Knaben betrug. Sie füllten alle ihre Säckchen und nahmen hiedurch im Ganzen 2916 Aepfel. Wie gross war die Anzahl der Knaben?

Antw. 9.

Nr. 11. Es kauft Jemand für eine Anzahl Vereinsthaler à 3 fl. 30 krz. Zucker, und erhält für jeden solchen Thaler halb so viel Pfund, als er im Ganzen Vereinsthaler zum Einkaufe verwendet. Er verkauft den Zucker wieder, und löst für je 48 Pfund ebenso viele Vereinsthaler, als er für das Ganze bezahlt hat, und löst dadurch 18 Vereinsthaler. Wie viel solcher Thaler hat er ausgegeben, und wie theuer hat er das Pfund gekauft?

Antw. *Er gab* 12 *Vereinsthaler aus und kaufte das Pfund um* 35 *krz.*

Nr. 12. Eine Truppen-Abtheilung marschirte in einer geschlossenen Colonne und hatte 5 Mann mehr in der Tiefe als in der Fronte. Vor dem Feind jedoch wurde die Fronte um 845 Mann vergrössert, wodurch die Abtheilung nur noch 5 Mann tief aufgestellt war. Wie stark war die Abtheilung?

Antw. 4550 *Mann stark.*

Nr. 13. Welche Zahl verhält sich zu derselben, um ihre Quadratwurzel vermehrten Zahl wie 4 : 5?

Antw. 16.

Nr. 14. Eine gewisse Summe wird wöchentlich unter Arme gleichmässig vertheilt. In einer Woche war die Zahl der Armen gerade die Quadratwurzel dieser Summe; in der nächsten hingegen waren es 2 Arme mehr, welche an jener Summe Theil erhielten, wodurch der Antheil jedes Einzelnen um $1\frac{1}{2}$ krz. vermindert wurde. Wie gross war die zu vertheilende Summe?

Antw. 36 *Kreuzer.*

Nr. 15. *A* und *B* hatten bei einem gemeinschaftlichen Geschäft 600 fl. gewonnen, wovon *A* 400, *B* 200 fl. erhielt. *A* hatte sein Geld 4 Monate lang dazu hergegeben, und wenn man die Zahl 500 durch die Summe, welche *A* in das Geschäft verwendet hatte,

dividirt, so erhält man die Zahl der Monate, während welcher *B* bei dem Geschäfte mit seinem Capital von 1000 fl. betheiligt war. Wie gross war das Capital des *A*, und wie lange hatte *B* sein Geld hergegeben?

Antw. *A gab* 500 *fl. her. B liess sein Geld* 1 *Monat in in dem Geschäft.*

Nr. 16. *A* und *B* stehen beide eine gleiche Zahl von Tagen, aber zu verschiedenem Lohne in Arbeit. *A* arbeitet 4 von diesen Tagen nicht, und erhält am Ende 18 fl. 45 krz. Lohn. *B* arbeitet 7 Tage nicht und erhält 12 fl. Hätte *A* 7 Tage und *B* 4 Tage nicht gearbeitet, so hätten beide gleich viel erhalten. Wie viel Tage standen beide in Arbeit, und was war der Tagelohn eines Jeden?

Antw. *Sie standen* 19 *Tage in Arbeit, A mit einem Tagelohn von* 1 *fl.* 15 *krz., B mit einem solchen von* 1 *fl.*

Nr. 17. Zwei Reisende, *A* und *B*, gehen zu gleicher Zeit von zwei Städten, *C* und *D*, aus, *A* um von *C* nach *D*, *B* um von *D* nach *C* zu reisen. Als sie einander begegnen, hat *A* 18 Meilen mehr gemacht als *B*, und hatte noch $15\frac{3}{4}$ Tage zu reisen, um nach *D* zu kommen, *B* aber 28 Tage, um *C* zu erreichen. Wie weit sind *C* und *D* von einander entfernt?

Antw. 126 *Meilen.*

Nr. 18. *A* kauft eine gewisse Waare auf Speculation, *B* eine andere. *A* verkauft seine Waare wieder um 11 fl., und gewinnt so viele Procente als *B* Gulden für seine Waare bezahlt hat; und *B*, welcher an seiner Waare 36 fl. gewinnt, hat nur den vierten Theil der Procente des *A* gewonnen. Wie viel Gulden hat Jeder ausgegeben?

Antw. *A gab* 5, *B* 120 *fl. aus.*

Nr. 19. Der Capitän eines Caper-Schiffes erblickt 7 Seemeilen vor sich ein Handelsschiff, und verfolgt es zunächst in gerader Linie 20 Seemeilen weit. Da er nun bemerkt, dass das Handelsschiff seinen Cours geändert hat, und genau unter einem rechten Winkel gegen seinen bisherigen Lauf fortsteuert, so ändert er ebenfalls seine Richtung, so dass er auf der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks fortsegelt, dessen eine Kathete der Cours des Handelsschiffes bildet, und dass er genau an der durch beide Fahrlinien gebildeten Winkelspitze dieses Dreiecks das Handelsschiff erreicht. Wenn er nun in einer Stunde 10 Knoten segelt, während

das Handelsschiff nur 8 zurücklegt, welchen Weg hat er im Ganzen zu machen, bis er letzteres erreicht?

Antw. 25 *Seemeilen.*

Nr. 20. Ein Weinhändler lässt aus einem vollen Weinfasse, welches 256 Maass hält, eine gewisse Quantität Wein heraus, und füllt es wieder mit Wasser auf. Hierauf lässt er wieder zum zweiten Male dieselbe Quantität von Flüssigkeit heraus, und füllt es wieder mit Wasser auf. Nachdem er das gleiche Verfahren noch zweimal wiederholt, und so im Ganzen viermal Flüssigkeit herausgelassen hat, bleiben nur noch 81 Maass reinen Weins in der Flüssigkeit zurück. Wie viel lässt er jedesmal heraus?

Antw. 64 *Maass.*

Nr. 21. Die Differenz zweier Zahlen mit der grössern multiplicirt giebt das Product 40, mit der kleinern multiplicirt aber das Product 15. Wie heissen beide Zahlen?

Antw. ± 8 *und* ± 3.

Nr. 22. Wenn man die Differenz zweier Zahlen mit der kleinern multiplicirt, so ist das Product 42, wenn man dieselbe aber mit der Summe beider Zahlen multiplicirt, so ist das Product 133. Wie heissen die Zahlen?

Antw. ± 13 *und* ± 6.

Nr. 23. Die Differenz zweier Zahlen verhält sich zur kleinern wie 100 zur grössern, und zur grössern wie 4 zur kleinern. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 25 *und* 5 *oder* $-\frac{50}{3}$ *und* $\frac{10}{3}$.

Nr. 24. Wenn man die Differenz zweier Zahlen mit der grössern multiplicirt, und das Product mit der kleinern dividirt, so ist der Quotient 24; multiplicirt man aber diese Differenz mit der kleinern und dividirt mit der grössern, so ist der Quotient 6. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 24 *und* 12 *oder* -8 *und* 4.

Nr. 25. Wenn man die grössere von zwei Zahlen mit der Quadratwurzel der kleinern multiplicirt, so ist das Product 48; multiplicirt man aber die kleinere mit der Quadratwurzel der grösseren, so ist das Product 36. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 16 *und* 9.

Nr. 26. Wenn man die kleinere von zwei Zahlen mit dem Quadrate der grössern multiplicirt, so ist das Product 448; mul-

tiplicirt man aber die grössere mit dem Quadrate der kleinern, so ist das Product 392. Wie heissen die Zahlen?

Antw. *8 und 7.*

Nr. 27. *A* und *B* führen 100 Eier mit einander zu Markte, verkaufen sie zu verschiedenen Preisen, und lösen doch beide gleich viel. Hätte *A* die Eier des *B* gehabt, so hätte er 36 krz. gelöst, hätte aber *B* die Eier des *A* gehabt, so hätte er nur 16 krz. erhalten. Wie viel Eier hatte jeder?

Antw. *A hatte 40, B 60 Eier.*

Nr. 28. Wenn man jede von zwei Zahlen mit 27 multiplicirt, so ist das erste Product gleich dem Quadrat des zweiten; multiplicirt man aber jede mit 8, so ist das erste Product der Kubus des zweiten. Wie heissen beide Zahlen?

Antw. *243 und 3.*

Nr. 29. Die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sollen aus folgenden Angaben bestimmt werden. Der Inhalt des Dreiecks enthält ebenso viel Quadratfuss als der Umfang desselben Fuss enthält, und die Quadratzahl der Summe beider Katheten ist grösser als die Quadratzahl der Hypothenuse um das halbe Product aus den Zahlen, durch welche der Flächeninhalt und die eine Kathete ausgedrückt sind.

Antw. *Die drei Seiten sind 6, 8 und 10 Längeneinheiten lang.*

Nr. 30. Von zwei Würfeln ist die Seite des einen um 3 Fuss grösser als die des andern, und der Inhalt des ersten um 117 Kubikfuss grösser als der des zweiten. Wie gross ist jede Seite?

Antw. *Die eine 5, die andere 2 Fuss lang.*

Nr. 31. Ein Rechteck und ein rechtwinkliges Dreieck stehen so in Beziehung zu einander, dass die grössere Seite des Rechtecks gleich der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks, und die kleinere Seite des erstern halb so gross als die grössere Kathete des letztern ist. Die Summe der Flächeninhalte beider Figuren ist gleich dem Quadrate der grössern Kathete des Dreiecks und die Summe der Umfänge beider Figuren um 10 Fuss grösser als der Umfang des letztgenannten Quadrats. Wie gross sind die Seiten und die Flächeninhalte beider Figuren?

Antw. *Die beiden Seiten des Rechtecks betragen 2 und 5 Fuss, die drei Seiten des Dreiecks 3, 4 und 5 Fuss; die Inhalte der beiden Figuren 10 und 6 Quadratfuss.*

IX. Abschnitt.

Aufgaben, welche auf unreine quadratische Gleichungen führen.

Nr. 1. Es verkauft Jemand für 39 fl. Wein, und gewinnt dabei so viele Procente, als ihm der Wein Gulden kostete. Wie theuer hat er den Wein gekauft?

Antw. *Um* 30 *fl.*

Nr. 2. Die Differenz zweier Zahlen ist 9; ihre Summe mit der grössern multiplicirt = 266. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 14 *und* 5 *oder* $-\frac{19}{2}$ *und* $-\frac{37}{2}$.

Nr. 3. Von zwei Zahlen verhält sich die erste zur zweiten wie die zweite zu 16, und die Summe ihrer Quadrate beträgt 225. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 9 *und* 12 *oder* -25 *und* $20\sqrt{-1}$.

Nr. 4. Es kauft Jemand Tuch zu einem Rock und 28 Ellen Leinwand, und bezahlt im Ganzen 30 fl. Für jede Elle Tuch zahlt er so viele Gulden als er Ellen kauft, und 8 Ellen Leinwand kosten zusammen so viel als eine Elle Tuch. Wie viel Ellen Tuch kauft er, und was kostet die Elle Tuch und die Elle Leinwand?

Antw. *Er kauft* 4 *Ellen Tuch, die Elle à* 4 *fl., und von der Leinwand kostet die Elle* ½ *fl.*

Nr. 5. *A* und *B* gewannen bei einer gemeinschaftlichen Speculation 180 fl. *A* hatte sein Geld 12 Monate lang dazu hergegeben, und an Capital und Geld 260 fl. zurückerhalten; *B* hatte 300 fl. 16 Monate lang hergegeben. Was hatte *A* eingelegt?

Antw. 200 *fl.*

Nr. 6. Es kauft Jemand eine Anzahl Schafe für 360 fl.; hätte er für denselben Preis 6 Stücke mehr bekommen, so wäre jedes Stück 5 fl. wohlfeiler gewesen. Wie viel Stück hat er gekauft?

Antw. 18 *Stück.*

Nr. 7. Ein Spiegel, welcher 18 Zoll hoch und 12 Zoll breit ist, hat eine überall gleich breite Goldrahme, deren Fläche der Fläche des Spiegels gleich ist. Wie breit ist die Rahme?

Antw. 3 *Zoll breit.*

Nr. 8. Zwei quadratische Höfe werden mit Steinplatten belegt, von denen jede einen Quadratfuss hält. Die Seite des einen Quadrats ist um 12 Fuss grösser als die des andern und zur Pfla-

sterung beider bedarf man 2120 Platten. Wie lang ist jeder Hof?

Antw. *Der eine* 26, *der andere* 38 *Fuss lang.*

Nr. 9. Es lässt Jemand zwei Gräben graben, von denen der eine 6 Ruthen länger ist als der andere. Bei jedem kostet das Grabenneiner Ruthe nur halb so viel Gulden, als der Graben Ruthen in der Länge misst. Im Ganzen hat er 178 fl. zu bezahlen. Wie lang ist jeder Graben?

Antw. *Der eine* 16, *der andere* 10 *Fuss lang.*

Nr. 10. In einem Gasthofe hatte eine Gesellschaft für eine gemeinschaftliche Zeche 87½ fl. zu bezahlen. Ehe die Rechnung bezahlt war, schlichen sich zwei von der Gesellschaft davon, wodurch der von jedem der Zurückgebliebenen zu bezahlende Antheil um 5 fl. grösser wurde. Wie stark war die Gesellschaft ursprünglich?

Antw. 7 *Mitglieder stark.*

Nr. 11. Es kauft Jemand eine Anzahl Schafe für 120 fl., behält davon 15 und verkauft die übrigen zusammen um 1080 fl. Wenn er nun dadurch an jedem Schafe 2 fl. gewinnt, wie viel waren es Schafe, und was war der Einkaufs-Preis eines Stücks?

Antw. *Es waren* 75 *Schafe, deren jedes um* 16 *fl. gekauft wurde.*

Nr. 12. *A* und *B* reisen von zwei, um 247 Meilen von einander entfernten Städten einander entgegen. *A* macht täglich 9 Meilen, und die Zahl der Tage, welche beide bis zum Zusammentreffen brauchen, ist um 3 grösser als die Zahl der Meilen, welche *B* täglich macht. Welchen Weg hat Jeder beim Zusammentreffen zurückgelegt?

Antw. *A* 117 *und B* 130 *Meilen.*

Nr. 13. Es kauft Jemand zweierlei Tuch. Von dem feinern kostet die Elle 1 fl. mehr als von dem andern. Für das feinere bezahlt er im Ganzen 90 fl., für das gröbere, welches um 2 Ellen länger war, 80 fl. Wie lang war jedes Stück, und was kostete die Elle von jedem?

Antw. *Das feinere Tuch hält* 18 *Ellen, die Elle zu* 5 *fl., das gröbere* 20 *Ellen, die Elle zu* 4 *fl.*

Nr. 14. *A* reist von *C* nach *D*, und macht täglich 7 Meilen. Nachdem er 32 Meilen zurückgelegt hat, geht *B* von *D* nach *C*, und macht täglich den 19ten Theil des ganzen Weges. Nachdem

B so viele Tage gereist ist, als er täglich Meilen macht, trifft er mit *A* zusammen. Wie weit ist *C* von *D* entfernt?

Antw. 152 *oder* 76 *Meilen.*

Nr. 15. *A* verkauft 40, *B* 90 Ellen Leinwand; sie lösen zusammen 42 fl. *A* giebt für 1 fl. um $\frac{1}{3}$ Elle mehr als *B*. Wie theuer verkauft Jeder seine Leinwand?

Antw. *A verkauft die Elle um* 18, *B um* 20 *krz.*

Nr. 16. Drei Kaufleute, *A*, *B*, *C*, legen zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung Geld zusammen, und gewinnen damit 800 fl. weniger als die ganze Einlage beträgt. *A* erhält für seinen Antheil 600 fl. vom Gewinn, er hatte 170 fl. mehr als *B* beigetragen; *B* und *C* aber hatten zusammen 3250 fl. eingelegt. Wie gross war die Einlage eines Jeden?

Antw. *A hatte* 750, *B* 580 *und C* 2670 *fl. eingelegt.*

Nr. 17. *A* und *B* hatten zusammen 4160 fl. zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte eingelegt, *A* seine Einlage auf 9 Monate, *B* die seinige auf 6 Monate. An Capital und Gewinn erhielt *A* 2280 fl., *B* 2520 fl. Wie viel hatte Jeder eingelegt?

Antw. *A* 1920 *und B* 2240 *fl.*

Nr. 18. Eine Anzahl Soldaten war 3 Mann tief in einem hohlen Quarré aufgestellt. Wären es 25 Mann mehr gewesen, so hätte sich diese Mannschaft in einem vollen Quarré aufstellen lassen, und die Anzahl Mann der äussersten Reihe dieses letzten Quadrats hätte um 22 mehr betragen als die Quadratwurzel der Anzahl Mann der äussersten Reihe des ersten Quadrats. Wie viel Mann stehen in dem hohlen Quarré?

Antw. 936 *Mann.*

Nr. 19. Ein Kaufmann kauft eine Anzahl Stücke Seidenzeug von zwei verschiedenen Sorten. Von jeder Sorte kauft er so viele Stücke und zahlt für jede Elle halb so viel Gulden als ein Stück dieser Sorte Ellen hat. Im Ganzen kauft er 19 Stücke, und zahlt $921\frac{1}{2}$ fl. Wie viel Stücke von jeder Sorte hat er gekauft?

Antw. *Von der einen* 8, *von der andern* 11 *Stücke.*

Nr. 20. Ein Gras-Garten, der die Form eines Quadrats hat, ist im Innern ganz mit Gras bewachsen, an seinem Umfang aber hat er rings herum einen überall gleich breiten, mit Sand bestreuten Weg. Wenn die Seite des ganzen Gartens um 2 Fuss länger wäre, so wäre sie 22mal so gross als die Breite des Wegs. Die Anzahl der Quadratfusse, welche der Sandweg enthält, ist um 476

grösser als der Umfang des ganzen Gartens. Wie gross ist die Fläche des ganzen Gartens?

Antw. 4096 *Quadratfuss.*

Nr. 21. Ein Weinhändler kauft 54 Eimer Wein, und dazu noch eine gewisse Anzahl Eimer von einer geringern Sorte. Für jeden Eimer der ersten Sorte zahlt er so viel Gulden, als er Eimer von der zweiten Sorte kauft, und für jeden Eimer dieser zweiten Sorte 8 fl. weniger. Er mischt beide Weine unter einander, ist aber genöthigt, diese Mischung den Eimer um 30 fl. zu verkaufen, und verliert dadurch an der ganzen Speculation 252 fl. Wie viel Eimer von der zweiten Sorte kaufte er, und was zahlte er für jeden Eimer?

Antw. *Er kaufte* 36 *Eimer von der zweiten Sorte, den Eimer zu* 28 *fl. und ein Eimer der bessern Sorte kostete* 36 *fl.*

Nr. 22. Während der Zeit, dass der Schatten einer Sonnen-Uhr, welche die wahre Zeit angiebt, sich von 1 Uhr bis 5 Uhr fortbewegt, thut der Hammer des Schlagwerks einer andern Uhr, welche um eine gewisse Anzahl von Stunden und Minuten vorgeht, so viele Schläge, als die Zahl der Stunden und die der Minuten zusammen addirt beträgt. Die Zahl der erwähnten Minuten ist um 41 kleiner als das Quadrat der Zahl von Schlägen, welche die Uhr das letzte Mal schlägt. Wie weit geht die Uhr vor, unter der Bedingung, dass sie während der genannten Zeit nie 12 Uhr schlägt?

Antw. *Sie geht um* 3 *Stunden* 23 *Minuten vor.*

Nr. 23. Ein Weinhändler verkauft 7 Eimer geringern Weins und 12 Eimer bessern zusammen um 1000 fl. Für 200 fl. giebt er 3 Eimer geringern Weins mehr, als er für 120 fl. vom bessern giebt. Wie theuer verkauft er den Eimer von jeder Sorte?

Antw. *Den Eimer geringerer Sorte um* 40, *besserer Sorte um* 60 *fl.*

Nr. 24. *A* und *B* miethen mit einander eine Weide um eine bestimmte wöchentliche Summe; *A* schickt 4 Pferde darauf, *B* so viel, dass er an Weidegeld $4\frac{1}{2}$ fl. wöchentlich zu bezahlen hat. Nachdem aber *B* später noch 2 Pferde auf die Weide geschickt hat, beträgt sein Antheil am Weidegeld 5 fl. Wie gross war das wöchentlich im Ganzen zu bezahlende Weidegeld?

Antw. $7\frac{1}{2}$ *fl.*

Nr. 25. Es hat Jemand zwei Fussteppiche, welche vollkommene Quadrate bilden, und von denen der eine um 2 Fuss

länger ist als der andere. Wenn man von der Zahl der Quadratfusse, welche der kleinere misst, die Zahl der Fusse abzieht, welche eine Seite des grössern misst, so ist das Quadrat der dadurch erhaltenen Zahl um 88 grösser als die Zahl, welche man erhält, wenn man von der Zahl der Quadratfusse des kleinern die Zahl der Fusse abzieht, welche eine Seite des kleinern misst. Wie lang ist jeder Teppich?

Antw. *Der eine* 4, *der andere* 6 *Fuss lang.*

Nr. 26. Es spielt Jemand Hazard, und gewinnt bei dem ersten Wurfe so viel als er Geld bei sich hat. Bei dem zweiten Wurfe gewinnt er 5 fl. mehr als die Quadratwurzel des Geldes, welches er jetzt besitzt, bei dem dritten endlich gewinnt er das Quadrat des Geldes, in dessen Besitz er sich nach dem zweiten Wurfe befindet. Er trägt dadurch 2256 fl. mit sich fort. Wie viel hatte er ursprünglich?

Antw. 18 *fl.*

Nr. 27. Welche zweiziffrige Zahl hat die Eigenschaft, dass, wenn man sie mit dem Product ihrer Ziffern dividirt, der Quotient 2 wird, und dass die Ziffern in umgekehrter Ordnung erscheinen, wenn man 27 zur Zahl addirt?

Antw. 36.

Nr. 28. Man hat drei Zahlen, deren Summe 41 ist; die Summe ihrer Quadrate ist 699, und die Differenz der Differenzen zwischen der ersten und zweiten, und der zweiten und dritten Zahl ist 8. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 7, 11 *und* 23.

Nr. 29. Man hat drei Zahlen, deren Summe 44 ist; das Product dieser drei Zahlen ist 1950 und die Differenz der Differenzen zwischen der ersten und zweiten und der zweiten und dritten Zahl ist 5. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 6, 13 *und* 25.

Nr. 30. In einer Baumschule stehen zwei Reihen von Bäumen, von denen die erste einen Baum mehr enthält als die zweite. Als aus der ersten Reihe eine bestimmte Anzahl von Bäumen verkauft worden war, und ebenso aus der zweiten Reihe so viele, als in der ersten Reihe übrig geblieben, fand man, dass das Quadrat der Zahl von Bäumen, welche in der zweiten Reihe übrig geblieben, vermehrt um die Quadrat-Wurzel aus derselben Zahl gleich sei dem Quotienten, den man erhält, wenn man 72 dividirt durch die um

1 verminderte Zahl der aus der ersten Reihe verkauften Bäume. Wie viel Bäume wurden aus der ersten Reihe verkauft?

Antw. 5 *Bäume*

Nr. 31. Ein Specereihändler verkauft 80 Pfund Muskatblüthe und 100 Pfund Gewürznelken zusammen um 1300 fl., und zwar giebt er für 400 fl. 60 Pfund Gewürznelken mehr als er für 200 fl. Pfunde von Muskatblüthe giebt. Wie theuer verkauft er das Pfund von jeder Sorte?

Antw. *Das Pfund Muskatblüthe für* 10, *das Pfund Gewürznelken für* 5 *fl.*

Nr. 32. *A* und *B* machen sich anheischig, eine bestimmte Arbeit um 90 fl. zu besorgen, und zwar versprechen sie die Vollendung dieser Arbeit in 5 Tagen, da *A* allein dieselbe in 9 Tagen hätte fertigen können. Sie fanden sich jedoch genöthigt, für die letzten 2 Tage noch einen dritten Arbeiter *C* zu Hülfe zu nehmen, wodurch *B* an obigem Lohne 3 fl. 45 krz. weniger bekam, als er sonst erhalten hätte. In welcher Zeit hätte *B* oder *C* allein die Arbeit vollenden können?

Antw. *B in* 15 *und C in* 18 *Tagen, oder B in* 72 *und C in* $5\frac{1}{3}$ *Tagen.*

Nr. 33. Das Vorderrad eines Wagens macht auf einem Wege von 360 Fuss 6 Umdrehungen mehr als das Hinterrad. Wenn aber der Umfang jedes Rades 3 Fuss grösser wäre, so würde auf demselben Wege das Vorderrad nur 4 Umdrehungen mehr machen als das Hinterrad. Wie gross ist der Umfang jedes Rades?

Antw. *Der des Vorderrades* 12, *der des Hinterrades* 15 *Fuss.*

Nr. 34. Es vertheilt Jemand unter eine Anzahl von Armen, welche aus Männern, Weibern und Kindern besteht, 5 fl. 24 krz. so, dass jedes Kind eine gewisse Anzahl von Kreuzern, jedes Weib einen Kreuzer mehr als ein Kind, und jeder Mann wieder einen Kreuzer mehr als ein Weib bekömmt. Die Zahl der Weiber war um $\frac{1}{4}$ grösser als die Zahl der Männer, und die Zahl der Kinder gleich der doppelten Quadratzahl der Differenz zwischen der Zahl der Weiber und Männer. Hätte jedes Kind so viel bekommen als ein Weib, so würde die ganze Ausgabe für die Kinder vermehrt um den 9fachen Unterschied zwischen der ganzen Ausgabe für die Weiber und für die Männer 3 fl. 16 krz. betragen haben. Wie gross war die Zahl der Männer, Weiber und Kinder, und wie viel erhielt jedes Einzelne?

Antw. 16 *Männer, deren jeder* 6 *krz.*, 20 *Frauen, deren jede* 5 *krz., und* 32 *Kinder, deren jedes* 4 *krz. erhielt, oder auch* 64 *Männer, deren jeder* $\frac{357}{164}$ *krz.*, 80 *Frauen, deren jede* $\frac{133}{164}$ *krz. und* 512 *Kinder, deren jedes* $\frac{29}{164}$ *krz. erhielt.*

Nr. 35. *A* bringt eine Anzahl Gurken zu Markte, und *B* eine dreimal grössere Zahl von Eiern. *B* bietet dem *A* einen Tausch zwischen beiden Waaren an, wodurch aber *A* bei dem gegenwärtigen Preise 5 krz. verlieren würde. *A* giebt daher dem *B* nur $\frac{2}{3}$ seiner Gurken für sämmtliche Eier, wodurch *B* 3 krz. verlieren würde, wenn der Preis beider Waaren geblieben wäre; da aber der Preis einer Gurke indessen auf 3 krz. gestiegen ist, so gewinnt *B* so viel, als er bei unverändertem Preis der Eier aus 6 Stücken derselben lösen würde. Wie viel hatte *A* Gurken und *B* Eier, und was war ursprünglich der Preis eines Stücks von jeder Waare?

Antw. *A hatte* 10 *Gurken*, *B* 30 *Eier; eine Gurke kostete ursprünglich* 2, *ein Ei* $\frac{1}{3}$ *krz.*

Nr. 36. Es kauft Jemand eine gewisse Anzahl von Citronen und Aepfeln zusammen für 1 fl. 12 krz. Er zahlt für ein Dutzend Citronen so viele Kreuzer, als er Aepfel erhält, und für je 20 Stück Aepfel so viele Kreuzer, als er Citronen kauft. Hätte er von jeder Sorte 10 Stück mehr gekauft, und für die Citronen den gleichen Preis bezahlt, dagegen aber für ein Dutzend Aepfel so viel als er für 20 Citronen zu bezahlen hat, so hätte er 5 fl. 5 krz. bezahlen müssen. Wie viel Citronen und Aepfel kaufte er?

Antw. 15 *Citronen und* 36 *Aepfel.*

Nr. 37. Es kauft Jemand eine gewisse Anzahl Gänse und 18 wälsche Hühner zusammen für 55 fl., jedes einzelne Huhn kostet $\frac{1}{4}$ fl. weniger als 3 Gänse. Später kauft er eine zweite Anzahl von Gänsen und Hühnern, und zwar 5 Gänse und 2 Hühner mehr als das erste Mal, und zahlt für jedes Stück $\frac{1}{4}$ fl. mehr als vorher. Wenn er nun für diesen zweiten Kauf 82$\frac{1}{2}$ fl. zu bezahlen hat, wie viel Gänse hat er jedes Mal gekauft, und wie theuer jede Gans und jedes Huhn bezahlt?

Antw. *Das erste Mal wurden* 10, *das zweite Mal* 15 *Gänse gekauft; der Preis einer Gans betrug erst* 1 *fl., später* 1$\frac{1}{4}$ *fl.; der Preis eines Huhnes erst* 2$\frac{3}{4}$, *dann* 3 *fl.*

Nr. 38. Drei durch gerade Strassen verbundene Städte, *A*, *B* und *C*, liegen so, dass die von *B* nach *C* führende Strasse mit

der von B nach A führenden einen rechten Winkel macht. Zwischen A und B liegt ein vierter Ort D, und zwischen A und C ein fünfter Ort E. Von D nach E führt ebenfalls eine gerade Strasse, welche auf die von A nach C über E führende Strasse rechtwinklig einmündet. E ist von A 3 Meilen und von C 7 Meilen entfernt. Wer von B über D und E nach A reist, anstatt von B nach A auf der geraden Strasse zu reisen, macht einen Umweg, welcher um den vierten Theil des von B nach C führenden Wegs grösser ist als die gerade Strasse von B nach A. Wie weit sind die genannten Orte von einander entfernt?

Antw. *$AB = 6$ oder 8 Meilen, $AC = 10$ Meilen, $BC = 8$ oder 6 Meilen, $AD = 5$ oder $3\frac{3}{4}$ Meilen, $BD = 1$ oder $4\frac{1}{4}$ Meilen, $ED = 4$ oder $2\frac{1}{4}$ Meilen.*

Nr. 39. In einem Garten befindet sich ein Spielplatz in der Form eines Quadrats, von welchem jede Seite 30 Fuss lang ist, und daneben ein kleines Gartenhäuschen, dessen Grundfläche die Form eines Rechteckes hat. Diese Grundfläche, in Quadratfussen ausgedrückt, ist die mittlere Proportionalzahl zwischen $\frac{192}{79}$ und zwischen der Summe der Quadratfusse, welche die Grundfläche des Gartenhäuschens und der Spielplatz zusammen halten. Ferner ist das Quadrat auf der Diagonale der Grundfläche des genannten Gartenhäuschens, wieder in Quadratfussen ausgedrückt, die mittlere Proportionalzahl zwischen 10 und der Summe der Quadratfusse, welche eben dieses auf der Diagonale der Grundfläche des Gartenhäuschens errichtete Quadrat und der Spielplatz zusammen betragen. Wie gross ist jede Seite des Gartenhäuschens?

Antw. *Die beiden Dimensionen sind 8 oder 6 Fuss Länge und 6 oder 8 Fuss Breite.*

Nr. 40. Ein Behälter von der Tiefe von 3 Fuss hat die Form eines rechtwinkligen Parallelepipedons. Wenn er nur 2 Fuss hoch gefüllt ist, so fasst er so viele Kubikfuss weniger als wenn er ganz gefüllt ist, so viel die Zahl beträgt, die man erhält, wenn man zum halben Umfange der Grundfläche 24 addirt. Ferner enthält ein auf der Diagonale der Grundfläche errichtetes Quadrat 8mal so viel Quadratfuss, als eine von einer Ecke der obern Fläche nach der entgegengesetzten Ecke der Grundfläche gezogene Diagonale Längenfuss enthält. Wie gross ist die Länge und Breite des Behälters?

Antw. *Länge und Breite sind einander gleich und betragen 6 Fuss.*

Nr. 41. In einem Steinbruche kauft Jemand zwei Steine, welche die Form vollständiger Würfel haben. Bei jedem derselben zahlt er für den Kubikfuss halb so viel Gulden als eine Seite des andern Fuss misst. Die Grundfläche des einen Steins ist um 9 Quadratfuss grösser als die des andern. Wenn nun der Käufer für beide Steine zusammen 410 fl. zu bezahlen hat, wie lang und wie theuer ist jeder Stein?

Antw. *Der erste ist* 5 *Fuss lang und kostet* 250 *fl.*, *der zweite ist* 4 *Fuss lang und kostet* 160 *fl.*

Nr. 42. *A* und *B* leihen zusammen 2000 fl. auf einfache Zinsen aus. *A* bezieht aus seinem Antheile 1 Procent weniger als *B*. In 5 Jahren bezieht *B* im Ganzen 40 fl. weniger als das Doppelte von den Interessen des *A*, und nach 10 Jahren ist das ausgeliehene Capital eines Jeden durch die während dieser Zeit eingenommenen Zinsen so angewachsen, dass sich Capital und Zinsen des *A* zusammen zu denen des *B* verhalten wie 5 : 8. Wie viel hat Jeder ausgeliehen, und zu wie viel Procent?

Antw. *A lieh* 800 *fl. zu* 5 *Procent*, *B* 1200 *fl. zu* 6 *Procent aus.*

Nr. 43. Ein Weinhändler hat zweierlei Weine, von denen die erste Sorte dreimal so theuer ist als die zweite. Er macht zwei Mischungen von diesen beiden Weinen, von der Art, dass der Preis einer Maass der ersten Mischung sich zum Preise einer Maass der zweiten verhält wie 9 : 10. Später macht er wieder zwei Mischungen, wobei er die Quantität der geringern Weinsorte unverändert lässt, aber die Quantität der bessern in jeder Mischung verdoppelt, und findet dabei, dass das Verhältniss zwischen den Preisen der einzelnen Maasse in beiden Mischungen dasselbe geblieben sei. In welchem Verhältnisse wurden die Quantitäten der beiden Weine zu den einzelnen Mischungen genommen?

Antw. *In den ersten zwei Mischungen verhielt sich das Quantum des geringern Weins zu dem des bessern wie* 3 : 1 *und wie* 2 : 1; *in den letzten zwei Mischungen aber wie* 5 : 2 *und wie* 2 : 2.

Anmerkung. Nr. 8, 9, 19, 28, 29 lassen sich auch rein quadratisch lösen.

X. Abschnitt.

Aufgaben über arithmetische und geometrische Progressionen.

Nr. 1. Es kaufte Jemand bei einem Buchhändler 7 Bücher, deren Preise in einer arithmetischen Progression standen. Der Preis desjenigen, welches dem wohlfeilsten am nächsten im Werthe stand, war 8 fl., der Preis des theuersten 23 fl. Wie theuer war jedes Buch?

Antw. *Die Preise der 7 Bücher sind bezüglich* 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 *fl.*

Nr. 2. Eine Zahl wird mit 3 Ziffern geschrieben, welche in arithmetischer Progression stehen. Dividirt man die Zahl durch die Ziffernsumme, so ist der Quotient 26; und addirt man 198 zu der Zahl, so erscheinen dieselben Ziffern in umgekehrter Ordnung. Wie heisst die Zahl?

Antw. 234.

Nr. 3. Zu einem milden Zwecke hatten drei Brüder, A, B, C, zusammen 27 fl. so unterschrieben, dass ihre Antheile in steigender arithmetischer Progression standen. Da aber C starb, ehe die unterschriebenen Summen eingezahlt wurden, übernahmen A und B mit einander auch die Bezahlung des Antheils von C, und zwar im Verhältniss von 3 : 2. Dadurch verhielt sich die ganze, von A bezahlte Summe zu der von B bezahlten wie 4 : 5. Wie viel hatte jeder der drei Brüder ursprünglich unterschrieben?

Antw. A 3 *fl.*, B 9 *fl.*, C 15 *fl.*

Nr. 4. Vier Zahlen stehen in arithmetischer Progression; ihre Summe ist 32 und die Summe ihrer Quadrate 276. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 5, 7, 9, 11 *oder* 11, 9, 7, 5.

Nr. 5. Vier Zahlen stehen in arithmetischer Progression; die Quadratsumme der beiden äussern Glieder ist 200, die Quadratsumme der beiden mittlern 136. Wie heissen die Zahlen?

Antw. $\pm$(2, 6, 10, 14 *oder* 14, 10, 6, 2).

Nr. 6. Vier Zahlen stehen in geometrischer Progression; die Summe der ersten und zweiten ist 15, die Summe der dritten und vierten 60. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 5, 10, 20, 40 *oder* -15, $+30$, -60, $+120$.

Nr. 7. Das erste Glied einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist $\frac{1}{17}$; die Summe aller 4 Glieder ist um 1 grösser als der Exponent der Progression. Wie heissen die vier Glieder?

Antw. $\frac{1}{17}$, $+\frac{4}{17}$, $\frac{16}{17}$, $\pm\frac{64}{17}$.

Nr. 8. Die gegenwärtige Mannschaft eines Regiments kann in der Form eines ausgefüllten gleichseitigen Dreiecks so aufgestellt werden, dass in der ersten Reihe 1 Mann, in der zweiten 2, in der dritten 3 u. s. f. stehen. Wenn jedoch dieselbe durch die Einberufung der Beurlaubten verdoppelt wird, so fehlen noch 385 Mann, um sie in einem vollen Quadrate aufstellen zu können, in dessen jeder Seite 5 Mann mehr stehen, als in der letzten Reihe des gleichseitigen Dreiecks. Wie gross ist die gegenwärtige Mannschaft?

Antw. 820 *Mann.*

Nr. 9. *A* reist von einem Orte ab, und legt in jeder Stunde eine Meile zurück. $2\frac{3}{4}$ Stunden später reist ihm *B* von demselben Orte aus nach, und legt in der ersten Stunde $1\frac{1}{8}$, in der zweiten $1\frac{3}{16}$, in der dritten $1\frac{1}{4}$ Meile zurück, und so überhaupt in jeder folgenden $\frac{1}{16}$ Meile mehr als in der vorangehenden. In wie viel Stunden wird *B* den *A* einholen?

Antw. *In* 8 *Stunden.*

Nr. 10. Die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen in arithmetischer Progression und zwar beträgt eine dieser Seiten 6 Fuss. Wie lang sind die beiden andern Seiten?

Antw. *Wenn die grössere Kathete zu* 6 *Fuss angenommen wird, so betragen die beiden andern Seiten* $\frac{9}{2}$ *und* $\frac{15}{2}$ *Fuss; wird die kleinere zu* 6 *Fuss angenommen, so betragen sie* 8 *und* 10 *Fuss.*

Nr. 11. Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen in arithmetischer Progression. Der Umfang des Dreiecks ist 84 Fuss. Wie gross sind die Seiten?

Antw. 21, 28 *und* 35 *Fuss.*

Nr. 12. Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen in arithmetischer Progression. Der Flächeninhalt ist 216 Quadratfuss. Wie gross sind die Seiten?

Antw. 18, 24 *und* 30 *Fuss.*

Nr. 13. Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen in arithmetischer Progression; der von dem rechten Winkel auf die Hypothenuse gefällte Perpendikel ist $21\frac{3}{5}$ Fuss lang. Wie gross sind die Seiten?

Antw. 27, 36 *und* 45 *Fuss.*

Nr. 14. *A* reist von einem gewissen Orte aus, und macht den ersten Tag 1, den zweiten 2, den dritten 3 Meilen, und so jeden folgenden Tag eine Meile mehr als den vorhergehenden. 5 Tage später reist ihm von demselben Orte aus *B* nach, um ihn einzuholen, und macht täglich 12 Meilen. Nach wie viel Tagen werden beide zusammentreffen?

Antw. *Das erste Mal* 3 *Tage, das zweite Mal* 10 *Tage nach Abreise des B.*

Nr. 15. *A* und *B* reisen zu gleicher Zeit von zwei um 165 Meilen von einander entfernten Orten *C* und *D* ab, um einander entgegen zu gehen. *A* macht am ersten Tage 1, am zweiten 2, am dritten 3 Meilen und so fort jeden folgenden Tag eine Meile mehr als den vorhergehenden; *B* macht am ersten Tage 20 Meilen, am zweiten 18, am dritten 16, und so jeden folgenden Tag 2 Meilen weniger als am vorhergehenden. Nach wie viel Tagen treffen sie zusammen?

Antw. *Das erste Mal nach* 10 *Tagen; das zweite Mal hingegen, wenn B wieder umkehrt und dem A nachreist, nach* 33 *Tagen.*

Nr. 16. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Differenz 4 ist. Das Product aller 4 Zahlen ist 1680. Wie heissen dieselben?

Antw. 2, 6, 10, 14 *oder* —14, —10, —6, —2 *oder* $\pm 2\sqrt{-6}-6$, $\pm 2\sqrt{-6}-2$, $\pm 2\sqrt{-6}+2$ *und* $\pm 2\sqrt{-6}+6$.

Nr. 17. Fünf Zahlen stehen in arithmetischer Progression; ihr Product ist 945, ihre Summe 25. Wie heissn dieselben?

Antw. 1, 3, 5, 7, 9 *oder* $5\pm\sqrt{109}$, $5\pm\frac{1}{2}\sqrt{109}$, 5, $5\mp\frac{1}{2}\sqrt{109}$ *und* $5\mp\sqrt{109}$.

Nr. 18. Ein Herr theilte unter drei Diener 210 fl. nach geometrischer Progression, wodurch der erste 90 fl. mehr bekam als der letzte. Wie viel bekam jeder?

Antw. *Sie erhielten bezüglich* 120, 60 *und* 30 *fl.*

Nr. 19. Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; ihre Summe ist 35, und das mittlere Glied verhält sich zur Differenz der beiden äussern wie 2 : 3. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 20, 10 *und* 5 *oder* $\frac{35}{3}$, $-\frac{70}{3}$ *und* $\frac{140}{3}$.

Nr. 20. Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; die Differenz zwischen der grössten und kleinsten ist 15; die Differenz zwischen den Quadraten der grössten und kleinsten verhält

sich zur Summe der Quadrate aller drei Zahlen wie 5 : 7. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 20, 10, 5 *oder* 9, $\pm 6\sqrt{-\frac{3}{2}}$ *und* -6.

Nr. 21. Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; ihre Summe ist = 13 und das Product aus dem mittlern Glied und aus der Summe der beiden äussern Glieder = 30. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 1, 3, 9 *oder* $\frac{3 \mp \sqrt{-391}}{2}$, 10 *und* $\frac{3 \pm \sqrt{-391}}{2}$.

Nr. 22. Drei Zahlen stehen in arithmetischer Progression; das Quadrat der ersten addirt zum Product der beiden andern giebt 16; das Quadrat der zweiten addirt zum Product der beiden andern giebt 14. Wie heissen die Zahlen?

Antw. $\pm$(1, 3 *und* 5) *oder* $\pm(6\sqrt{\frac{2}{7}}$, $5\sqrt{\frac{2}{7}}$ *und* $4\sqrt{\frac{2}{7}})$.

Nr. 23. Vier Zahlen stehen in arithmetischer Progression. Ihre Summe ist = 20, die Summe ihrer reciproken Werthe ist $\frac{25}{24}$. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 2, 4, 6, 8 *oder* $5 \pm \sqrt{145}$, $5 \pm \frac{1}{3}\sqrt{145}$, $5 \mp \frac{1}{3}\sqrt{145}$ *und* $5 \mp \sqrt{145}$.

Nr. 24. Eine Zahl wird mit 3 Ziffern geschrieben, welche in geometrischer Progression stehen; die Zahl selbst verhält sich zur Summe ihrer Ziffern wie 124 : 7; addirt man zu ihr die Zahl 594, so erscheint eine Zahl mit den nämlichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Ordnung. Wie heisst die Zahl?

Antw. 248.

Nr. 25. Von 5 Zahlen bilden die erste, zweite und dritte eine steigende geometrische Progression, die dritte, vierte und fünfte aber eine steigende arithmetische, deren Differenz gleich der zweiten Zahl ist. Die Summe der zweiten, dritten, vierten und fünften Zahl ist 40, und das Product der zweiten und fünften = 64. Wie heissen die Zahlen?

Antw. 2, 4, 8, 12, 16.

Nr. 26. Ein Fass *A*, welches 312 Maass hält, ist theilweise mit Wein gefüllt. Man füllt das Fass *A* aus einem andern Fasse *B* vollends in der Art auf, dass man zuerst 2 Maass weniger hinein giesst, als die Quadratwurzel der in *A* befindlichen Anzahl von Maassen beträgt, hierauf wieder 2 Maass weniger, und so fort in einer abnehmenden Progression, deren Differenz 2 ist. Man setzte dies so lange fort, bis *A* ganz voll wurde, und bemerkte dabei,

dass, als in obiger Reihe 8 Maass auf einmal eingefüllt worden waren, im Ganzen noch 12 Maass nachzugiessen waren, bis *A* voll wurde. Wie viel Wein war ursprünglich in *A*?

Antw. 256 *Maass.*

Nr. 27. Die Diagonalen von vier Quadraten bilden eine steigende geometrische Progression; das Product der Quadrate der ersten und vierten Diagonale verhält sich zum Producte der zweiten und dritten Diagonale, wie die Seite des dritten Quadrates zur Quadratwurzel des Exponenten der Progression, dividirt durch $4\sqrt{2}$. Die Anzahl Füsse der Diagonale des dritten Quadrats ist kleiner als der Exponent um 45. Wie gross sind die Diagonalen?

Antw. $\frac{4}{729}$, $\frac{4}{9}$, 36 *und* 2916 *Fuss.*

Nr. 28. *A* und *B* vereinigen sich zu einem gemeinschaftlichen Handels-Geschäfte, und legen jeder eine gewisse Summe ein. Mit dieser Einlage gewann *A* jedes folgende Jahr 300 fl. mehr als das vorangegangene, im letzten Jahre aber 1700 fl., und im Ganzen 5700 fl. *B* gewann in gleichem Verhältnisse mit seiner Einlage in den 4 ersten Jahren 5200 fl. Die Summe der ursprünglichen Einlage des *A* und des Gewinns von *B* im zweiten Jahre beträgt 1300 fl. Wie viel hat Jeder eingelegt, und wie lange bestand dieses gemeinschaftliche Geschäft?

Antw. *Das Geschäft dauerte* 6 *Jahre; A legte* 300, *B* 600 *fl. ein.*

Nr. 29. Ein Haufen von Kanonenkugeln, welcher in der Form einer Pyramide aufgehäuft war, und zur Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck hatte, wurde in einem Gefechte gänzlich verbraucht, ausgenommen die drei untersten Schichten und 4 Kugeln von der nächst unteren. Dieser Rest wurde hierauf in eine vollständige vierseitige Pyramide aufgeschichtet, deren Basis ein Rechteck bildete, dessen kürzere Seite 4 Kugeln, die längere Seite aber so viele Kugeln enthielt, als eine Seite der Basis der ursprünglichen dreiseitigen Pyramide Kugeln hatte. Wenn nun dazu dieser Rest gerade ausreichte, wie viel hatte man anfangs Kugeln und wie viel blieben übrig?

Antw. *Der ursprüngliche Kugelvorrath betrug* 56 *Kugeln. Nach dem Gefecht blieben* 50 *Kugeln übrig.*

Anmerkung. Die Aufgaben Nr. 11, 12 und 13 sind nicht in dem englischen Original enthalten.

Anhang

von

Aufgaben aus der höheren Mathematik.

I. Aufgaben über arithmetische Progressionen.

Nr. 1. Wie heisst das 28ste Glied der Reihe 13, $12\frac{2}{3}$, $12\frac{1}{3}$ u. s. w., . . . ?

Antw. 4.

Nr. 2. Bestimme die Gliederzahl n einer arithmetischen Progression aus dem ersten Glied a, dem letzten t und der Differenz d.

Antw. $n = 1 + \frac{t-a}{d}$.

Nr. 3. Aus dem ersten und letzten Glied (a und t) einer $n$gliedrigen arithmetischen Progression bestimme man diese selbst.

Antw. $a,\ \frac{a(n-2)+t}{n-1},\ \frac{a(n-3)+2t}{n-1} \ldots \frac{a(n-p)+(p-1)t}{n-1} \ldots t$.

Nr. 4. Aus dem 5ten und 9ten Glied (13 und 25) einer arithmetischen Progression bestimme man ihr 7tes.

Antw. 19.

Nr. 5. Stehen drei Grössen in arithmetisch steigender Progression, so ist das geometrische Verhältniss der zweiten zur ersten grösser als jenes der dritten zur zweiten.

Beweis. *Sind die drei Grössen* a, $a+d$, $a+2d$, *so sind die beiden geometrischen Verhältnisse* $\frac{a+d}{a} = 1 + \frac{d}{a}$ *und* $\frac{a+2d}{a+d} = 1 + \frac{d}{a+d}$; *es ist aber* $\frac{d}{d} > \frac{d}{a+d}$, *also* $\frac{t_2}{t_1} > \frac{t_3}{t_2}$.

Nr. 6. Man summire die folgenden Reihen:

$1+3+5+7+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = n^2.$$

$1+5+9+13+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = n(2n-1).$$

$1+4+7+10+\ldots\ldots$ (12 Glieder)

$$S_{12} = 210.$$

$5+7+9+11+\ldots\ldots$ (50 Glieder)

$$S_{50} = 2700.$$

$2+2\tfrac{1}{3}+2\tfrac{2}{3}+3+\ldots\ldots$ (13 Glieder)

$$S_{13} = 52.$$

$\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{8}+\ldots\ldots$ (16 Glieder)

$$S_{16} = 19.$$

$\tfrac{1}{3}+\tfrac{7}{6}+2+2\tfrac{5}{6}+\ldots\ldots$ (12 Glieder)

$$S_{12} = 59.$$

$\tfrac{5}{7}+1+1\tfrac{2}{7}+1\tfrac{4}{7}+\ldots\ldots$ (8 Glieder)

$$S_8 = 13\tfrac{5}{7}.$$

$-9-7-5-3-\ldots\ldots$ (20 Glieder)

$$S_{20} = 200.$$

$-5-3-1+1+\ldots\ldots$ (8 Glieder)

$$S_8 = 16.$$

$11+8+5+2+\ldots\ldots$ (8 Glieder)

$$S_8 = 4.$$

$\tfrac{1}{2}-1-\tfrac{5}{2}-4-\ldots\ldots$ (29 Glieder)

$$S_{29} = -594\tfrac{1}{2}.$$

$15+\tfrac{44}{3}+\tfrac{43}{3}+14+\ldots\ldots$ (16 Glieder)

$$S_{16} = 200.$$

$\tfrac{5}{6}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{6}-\ldots\ldots$ (19 Glieder)

$$S_{19} = -41\tfrac{1}{6}.$$

$\tfrac{27}{16}+\tfrac{18}{15}+\tfrac{57}{80}+\tfrac{9}{40}+\ldots\ldots$ (8 Glieder)

$$S_8 = -\tfrac{3}{20}.$$

$\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = \frac{n-1}{2}.$$

$(na-b)+[(n-1)a]+[(n-2)a+b]+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = \frac{n}{2}[a(n+1)+b(n-3)].$$

$(a+x)^2+(a^2+x^2)+(a-x)^2+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = n[a^2+x^2-(n-3)ax].$$

Nr. 7. Summire die ersten n Glieder der arithmetischen Progression $\frac{a-b}{a+b}+\frac{3a-2b}{a+b}+\ldots\ldots$

Antw. $S_n = \frac{n}{a+b}\left(an - \frac{n+1}{2} \cdot b\right)$.

Nr. 8. Aut dem ersten und letzten Glied (a und t) und der Summe s einer arithmetischen Progression bestimme man ihre Differenz.

Antw. $d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s-(a+t)}$.

Nr. 9. Aus dem Anfangsglied 1, der Gliederzahl n und der Summe s einer arithmet. Progression bestimme man ihre Differenz.

Antw. $d = \frac{2(s-n)}{n(n-1)}$.

Nr. 10. Aus dem letzten Glied t, der Summe s und der Gliederanzahl n bestimme man die arithmetische Progression selbst.

Antw. $\frac{2s-nt}{n}$, $\frac{2s(n-2)-nt(n-3)}{n(n-1)}$, $\frac{2s(n-3)-nt(n-5)}{n(n-1)}$, ..., $\frac{2s(n-p)-nt(n-2p+1)}{n(n-1)}$, ...$t$.

Nr. 11. Aus der Differenz m einer mit 1 beginnenden arithmetischen Progression bestimme man die Summe von n Gliedern.

Antw. $S_n = \frac{1}{2}[mn^2-(m-2)n] = n+\frac{n(n-1)}{1.2} \cdot m$.

Nr. 12. Aus der Differenz 4 und der Summe 120 einer mit 1 beginnenden arithmet. Progression bestimme man ihre Gliederzahl.

Antw. $n = 8$.

Nr. 13. Aus dem Anfangsglied $3\frac{1}{3}$, der Differenz $1\frac{2}{3}$ und der Summe 22 bestimme man die Gliederzahl einer arithmet. Progression.

Antw. $n = 4$.

Nr. 14. Aus dem ersten Glied 11, der Differenz -5 und der Summe 5 bestimme man die Gliederzahl einer arithmet. Progression.

Antw. $n = 5$.

Nr. 15. Aus der Summe 1455, dem Anfangsglied 5 und der Gliederzahl 30 bestimme man die Differenz einer arithmet. Progression.

Antw. $d = 3$.

Nr. 16. Aus dem ersten, zweiten und letzten Glied (a, b und t) bestimme man die Summe einer arithmet. Progression.

Antw. $S = \frac{(a+t)(b-2a+t)}{2(b-a)}$.

Nr. 17. Wenn man im Ausdruck $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ die Zahl n negativ annimmt, so soll die Form der arithmetischen Progression angedeutet werden, die dieser Bedingung entspricht; auch sollen ihre Glieder für $a = 7$, $d = 2$ und $s = 40$ wirklich bestimmt werden.

Antw. *Die Summe* $S = \frac{-n}{2}[2a+(-n-1)d] = \frac{n}{2}[2(d-a)+(n-1)d]$ *entspricht der Progression, deren Anfangsglied* $d-a$, *Differenz* d *und Gliederzahl* n *ist; das Zahlenbeispiel giebt die Reihe*: $-5-3-1+1+3+5+7+9+11+13$.

Nr. 18. In welcher Beziehung stehen die Summe S und das grösste Glied t einer $n$gliedrigen arithmetischen Progression, deren Differenz dem kleinsten Glied der Reihe gleich ist?

Antw. $S = \frac{n+1}{2} \cdot t$.

Nr. 19. In welcher Beziehung stehen die Gliederanzahl n, die Summe der n ersten und jene der $n-1$ ersten Glieder einer mit 1 beginnenden und um 1 fortschreitenden arithmetischen Progression?

Antw. $S_n + S_{n-1} = n^2$.

Nr. 20. In welcher Beziehung stehen das letzte Glied t, die Summe der ganzen und jene der halben Anzahl Glieder einer arithmetischen Progression von gerader Gliederzahl, deren Differenz dem kleinsten Glied gleich ist?

Antw. $4S_n - S_{2n} = \frac{1}{2}t_{2n}$ *für die erste und* $3S_{2n} - 4S_n = \frac{1}{2}t_{2n}$ *für die zweite Hälfte der Reihe.*

Nr. 21. Man beweise, dass $1+3+5+7+\ldots\ldots$ die einzige mit 1 beginnende arithmetische Progression ist, in welcher die Summe der ersten Hälfte einer geraden Gliederzahl zur Summe der zweiten Hälfte in einem bestimmten Verhältniss steht, und bestimme dieses Verhältniss.

Antw. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2a+(n-1)d}{2a+(3n-1)d}$ *wird für* $a = 1$ *und* $d = 2a = 2$ *constant und gleich* $\frac{1}{3}$.

Nr. 22. Wie verhält sich die Summe der n ersten ungeraden zur Summe der $n-1$ ersten geraden Zahlen?

Antw. *Wie* $n:(n-1)$.

Nr. 23. Wenn die Summe der zwei ersten Glieder einer arithmetischen Progression 18 und jene der drei nächsten Glieder 12 ist, wie viel Glieder gehören zur Summe 28 und wie lässt sich das doppelte Resultat erklären?

Antw. *Zur Summe* 28 *gehören* 4 *oder* 7 *Glieder und zwar ist sowohl* $10+8+6+4=28$ *als auch* $10+8+6+4+2+0-2=28$.

Nr. 24. Wie viel Glieder der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ... muss man addiren, um die $2m$te Potenz von r zu erhalten?

Antw. r^m *Glieder.*

Nr. 25. In der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ... finde man n auf einander folgende Glieder, deren Summe der $m$ten Potenz von n gleich komme.

Antw. $[n(n^{m-2}-1)+1]$, $[n(n^{m-2}-1)+3]$, ..., $[n(n^{m-2}-1)+2p-1]$, ..., $[n(n^{m-2}+1)-1]$.

Nr. 26. Aus dem $m$ten und $n$ten Glied (a und b) einer arithmetischen Progression bestimme man das $x$te Glied.

Antw. $t_x = \frac{a(n-x)-b(m-x)}{n-m}$.

Nr. 27. Aus dem $m$ten und $n$ten Glied (a und b) einer arithmetischen Progression bestimme man die Summe der p ersten Glieder.

Antw. $$S_p = \frac{p}{2(n-m)}[a(2n-p-1)-b(2m-p-1)]$$
$$= \frac{p}{2(n-m)}[2an-2bm+(p+1)(b-a)].$$

Nr. 28. Wie heissen das Anfangsglied t_1, die Differenz d und die Gliederzahl p, wenn das $m$te, $n$te und letzte Glied einer arithmetischen Progression bezüglich a, b und $a+b$ sind?

Antw. $t_1 = \frac{a(n-1)-b(m-1)}{n-m}$, $d = \frac{b-a}{n-m}$, $p = \frac{bn-am}{b-a}$.

Nr. 29. Wie heissen das $m$te und $n$te Glied einer arithmetischen Progression, in welcher das $m+n$te Glied $=p$ und das $m-n$te Glied $=q$ ist?

Antw. $t_m = \frac{p+q}{2}$, $t_n = p - \frac{m}{2n}(p-q)$.

Nr. 30. Welche Beziehung herrscht zwischen den Summen S_1, S_2 und S_3 dreier mit 1 beginnenden arithmetischen Progressionen von gleicher Gliederzahl, deren Differenzen bezüglich 1, 2, 3 sind.

Antw. $S_1+S_3=2S_2$.

Nr. 31. Wie heisst die Summe der $n$ten Glieder von p mit 1 beginnenden arithmetischen Progressionen, deren Differenzen bezüglich 1, 2, 3, ... p sind?

Antw. $S_p = \frac{1}{2}[p^2(n-1)+p(n+1)]$.

Nr. 32. Wenn a das erste Glied und d die Differenz einer arithmetischen Progression ist, und wenn man mit S_n, S_{n+1}, S_{n+2} u. s. w. die Summen der n, $n+1$, $n+2$ u. s. w. ersten Glieder derselben bezeichnet, wie gross ist die Summe der $n$gliedrigen Reihe: $S_n + S_{n+1} + S_{n+2} + S_{n+3} + \ldots\ldots$?

Antw. $\Sigma_n = \frac{an}{2}(3n-1) + \frac{nd}{6}(n-1)(7n-2)$.

Nr. 33. Man hat p arithmetische Progressionen, deren erste Glieder bezüglich 1, 2, 3, 4, ..., deren Differenzen bezüglich 1, 3, 5, 7, ... und deren Summen der n ersten Glieder bezüglich S_1, S_2, S_3, S_4, ... S_p sind. Wie gross ist die Summe der Reihe: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots\ldots + S_p$?

Antw. $\Sigma_p = \frac{np}{2}(np+1)$.

Nr. 34. Welche Beziehung herrscht zwischen den Summen der ersten n, $2n$ und n^2 Glieder einer arithmetischen Progression?

Antw. $\frac{n(n-1)}{2} . S_{2n} - n(n-2)\,S_n = S_{(n^2)}$.

Nr. 35. Man finde 3 arithmetische Mittel zwischen 1 und 11 und 7 solche zwischen 1 und $-\frac{1}{2}$.

Antw. *Die* 3 *arithmetischen Mittel zwischen* 1 *und* 11 *sind:* $3\frac{1}{2}$, 6, $8\frac{1}{2}$; *die* 7 *arithmetischen Mittel zwischen* 1 *und* $-\frac{1}{2}$ *sind:* $\frac{13}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{5}{16}$.

Nr. 36. Wenn man zwischen alle Glieder einer arithmetischen Progression gleich viel arithmetische Mittel einschaltet, so ist die entstandene Reihe wieder eine arithmetische Progression.

Beweis. *Sind das* n^{te}, $n+1^{te}$ *und* $n+2^{te}$ *Glied der gegebenen Reihe bezüglich* $a+(n-1)D$, $a+nD$ *und* $a+(n+1)D$ *und schaltet man zwischen je zwei auf einander folgende Glieder* p *arithmetische Mittel ein, so erhält man die Gleichungen:* $a+(n-1)D+(p+1)\delta_1 = a+nD$ *und* $a+nD+(p+1)\delta_2 = a+(n+1)D$ *aus denen sich:* $\delta_1 = \frac{D}{p+1} = \delta_2$ *ergiebt.*

Nr. 37. Die Summe der zwischen 1 und 19 liegenden n arithmetischen Mittel verhält sich zur Summe der ersten $n-2$ derselben wie 5 : 3. Man bestimme diese Mittel.

Nr. 23. Wenn die Summe der zwei e … e Mittel arithmetischen Progression 18 und jene der … 12 ist, wie viel Glieder gehören zur Summ… der arith- das doppelte Resultat erklären? … stimme man

Antw. *Zur Summe 28 gehören* … $-c), \ldots\ldots$ *ist sowohl* $10+8+6+4=28$ *als* … $\frac{1)(n-2)}{1.2.3}(b-a)$. $=28$.

Nr. 24. Wie viel Glieder … n ersten Dreiecks- 1, 3, 5, ... muss man addiren, …

Antw. r^m *Glieder.*

Nr. 25. In der Rei… man n auf einander fo… die Summe der n ersten Pyramidal- tenz von n gleich ko… $\ldots+\ldots\ldots$

Antw. $[n($ … $\frac{n(n+1).(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$. $[n(n^{m-2}-1)+?$ …

Nr. 26. … bestimme die Summe der n ersten Quadrat- arithmetische … $+9+16+\ldots\ldots$

Ant… $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$.

N… Aus dem ersten Glied a und der Differenz d einer arithmetischen Progression finde man die Summe s der n ersten Glieder und jene S ihrer Quadrate.

Antw.
$$s=na+\frac{n(n-1)}{1.2}d=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n$$

$$S=na^2+n(n-1).ad+\frac{n(n-1)(2n-1)}{1.2.3}d^2$$

$$=\frac{d^2}{3}n^3+\frac{2ad-d^2}{2}n^2+\frac{6a^2-6ad+d^2}{6}n.$$

Nr. 43. Aus der Summe s von $2n$ in arithmetischer Progression stehenden Grössen und der Summe S ihrer Quadrate finde man die Reihe selbst.

Antw. *Die Reihe ergiebt sich aus ihrer Differenz*

$$d=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{3(2nS-s^2)}{(2n-1)(2n+1)}}$$ *und aus ihrem Anfangsglied*

$$a=\frac{s}{2n}-\frac{2n-1}{2}.d.$$

Nr. 44. In der Reihe 1, 2, 3, ... 99, 100 finde man die Summe der Zahlen, die keine Quadrate sind.

Antw. $S=5050-385=4665$.

Nr. 45. Man bestimme die Summe von n Gliedern der Reihe $1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots\ldots$

Antw. $S_n = \frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$.

Nr. 46. Aus der Summe 1225 einer Anzahl Glieder der Reihe $0+1+2+3+\ldots\ldots$ bestimme man die Summe ihrer Quadrate.

Antw. $S = \frac{s}{3}\sqrt{8s+1} = 40425$.

Nr. 47. Die Summe von 9 Gliedern der Reihe $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots\ldots$ ist $= 501$. Wie gross ist n?

Antw. *Aus* $n^2+8n = 33$ *folgt* $n = -10$ *oder* $= 3$.

Nr. 48. Man bestimme die Summe von 10 Quadratzahlen, deren Wurzeln eine arithmetische Progression mit dem Anfangsglied 3 und der Differenz 2 bilden.

Antw. *Aus Nr.* 42 *ergiebt sich* $S_{10} = 1770$.

Nr. 49. Wenn man eine Zahl, die mit weniger als 10 Ziffern, deren jede 1 ist, geschrieben wird, zum Quadrat erhebt, so bilden die Ziffern der Quadratzahl von rechts und links angefangen die Glieder einer arithmetischen Progression, deren Differenz 1 ist, und deren grösstes Glied die Ziffernanzahl der Wurzel ist.

Beweis *ergiebt sich allgemein aus dem polynomischen Lehrsatz; hier z. B. aus* $(a+bx+cx^2+\ldots.+hx^7+ix^8)^2 = a^2+2abx+(2ac+b^2)x^2+(2ad+2bc)x^3+\ldots\ldots+(e^2+2ai+2bh+2cg+2df)x^8+\ldots\ldots+(2fi+2gh)x^{13}+(h^2+2gi)x^{14}+2hix^{15}+i^2x^{16}$, *wenn man darin* $a = b = c = \ldots\ldots = h = i = 1$ *und* $x = 10$ *setzt.*

Nr. 50. Jemand schuldete an A und B gleich viel, und zahlt es in gleich viel Zahlungen ab; dem A in Zahlungen von 8, 12, 16, 20, ... fl., dem B in Zahlungen von 1, 4, 9, 16, ... fl. Wie viel betrug die Schuld und in wie viel Zahlungen wurde sie abgetragen?

Antw. *Aus* $8n+2n(n-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$ *folgen* $n = 7$ *Zahlungen und* 140 *fl. Schuld.*

Nr. 51. Man vergleiche die Summe der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... mit der Summe ihrer Kuben.

Antw. $S(n^3) = (S_n)^2$.

Nr. 52. Man finde die Summe von n Kubikzahlen, deren Wurzeln eine arithmetische Progression mit dem Anfangsglied a und der Differenz d bilden.

Antw. $S_n = na^3 + \frac{3n(n-1)}{2}a^2d + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2}ad^2 + \\ + \frac{n^2(n-1)^2}{4}d^3$, *oder*

$$S_n = \frac{d^3}{4}n^4 + \frac{2ad^2 - d^3}{2}n^3 + \frac{6a^2d - 6ad^2 + d^3}{4}n^2 + \frac{2a^3 - 3a^2d + ad^2}{2}n.$$

Nr. 53. Man bestimme die arithmetische Progression, deren Gliederzahl 11, Summe 220 und Summe der Kuben 147400 ist.

Antw. *Aus* $a+5d = 20$ *und* $a^3+15a^2d+105ad^2+275d^3 = 13400$ *folgt* $d = \pm 3$ *und* $a = 5$ *oder* $= 35$, *mithin die Reihe* 5, 8, 11, ... 29, 32, 35.

Nr. 54. Man finde die Summe von n Polygonal-Zahlen, welche so aus einer arithmetischen Progression mit dem Anfangsglied 1 und der Differenz d entstehen, dass man die $m$te Polygonalzahl der Summe der m ersten Glieder der Progression gleich macht.

Antw. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(1 + \frac{n-1}{3}d\right)$.

Nr. 55. Zwischen dem ersten Glied a, dem letzten Glied l und der Differenz d einer arithmetischen Progression und den Summen S_1, S_2, S_3, ... S_{m-1} der 1sten, 2ten, 3ten ...... $m-1$ten Potenzen ihrer Glieder herrscht die zu beweisende Relation:

$$(l+d)^m - a^m = md.S_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}d^2S_{m-2} + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3S_{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}d^4S_{m-4} + \dots\dots$$

Synthet. Beweis: *Stellt man die Summen her, so ist, wenn man* $1+2+3+\dots\dots+n-1 = \Sigma(n-1)$, $1+4+9+\dots\dots +(n-1)^2 = \Sigma(n-1)^2$ *u. s. w. bezeichnet:*

$$S_{m-1} = na^{m-1} + (m-1)da^{m-2}\Sigma(n-1) + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}d^2a^{m-3}\Sigma(n-1)^2 \\ + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}d^3.a^{m-4}\Sigma(n-1)^3 + \dots\dots$$

$$S_{m-2} = na^{m-2} + (m-2)da^{m-3}\Sigma(n-1) + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}d^2a^{m-4}\Sigma(n-1)^2 \\ + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}d^3.a^{m-5}\Sigma(n-1)^3 + \dots\dots$$

$$S_{m-3} = na^{m-3} + (m-3)da^{m-4}\Sigma(n-1) + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}d^2a^{m-5}\Sigma(n-1)^2 \\ + \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3}d^3.a^{m-6}\Sigma(n-1)^3 + \dots\dots$$

und so fort.

Multiplicirt man diese Summen mit den Coëfficienten md, $\frac{m(m-1)}{1.2}d^2$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3$, ..., *so erhält man:*

$$mdS_{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}d^2S_{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3S_{m-3}+\ldots\ldots =$$

$$= md.na^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}d^2.a^{m-2}[2\Sigma(n-1)+n]+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3.a^{m-3}[3\Sigma(n-1)^2+3\Sigma(n-1)+n]$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}d^4.a^{m-4}[4\Sigma(n-1)^3+6\Sigma(n-1)^2+4\Sigma(n-1)+n]+\ldots\ldots$$

$$= mnda^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}n^2d^2a^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}n^3d^3.a^{m-3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}n^4d^4a^{m-4}+\ldots\ldots$$

$$= (a+nd)^m-a^m = (l+d)^m-a^m.$$

Analyt. Beweis. *Die Glieder der arithmetischen Progression seien* a, b, c, ... k, l, *so hat man:*

$$b = a+d;\quad b^2 = a^2+2ad+d^2;\quad b^3 = a^3+3a^2d+3ad^2+d^3;\quad b^4 = a^4+4a^3d+6a^2d^2+4ad^3+d^4$$
$$c = b+d;\quad c^2 = b^2+2bd+d^2;\quad c^3 = b^3+3b^2d+3bd^2+d^3;\quad c^4 = b^4+4b^3d+6b^2d^2+4bd^3+d^4$$
$$\vdots$$
$$l = k+d;\quad l^2 = k^2+2kd+d^2;\quad l^3 = k^3+3k^2d+3kd^2+d^3;\quad l^4 = k^4+4k^3d+6k^2d^2+4kd^3+d^4.$$

Aus der Summirung der einzelnen Gruppen dieser Gleichungen ergiebt sich unter Berücksichtigung der Bedeutung von S_1, S_2, S_3, ... *die Reihe der Gleichungen:*

$$l-a = (n-1)d$$
$$l^2-a^2 = 2d(S_1-l)+(n-1)d^2$$
$$l^3-a^3 = 3d(S_2-l^2)+3d^2(S_1-l)+(n-1)d^3$$
$$l^4-a^4 = 4d(S_3-l^3)+6d^2(S_2-l^2)+4d^3(S_1-l)+(n-1)d^4$$
$$\vdots$$

allgemein

$$l^m-a^m = md(S_{m-1}-l^{m-1})+\frac{m(m-1)}{1.2}d^2(S_{m-2}-l^{m-2})+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3(S_{m-3}-l^{m-3})+\ldots\ldots$$

Antw. $S_n = na^3 + \frac{3n(n-1)}{2}a^2d + \frac{n(n-1)}{}$

$+ \frac{n^2(}{}$

$S_n = \frac{d^3}{4}n^4 + \frac{2ad^2 - d^3}{2}n^3 + \frac{6a^2d - 6ad^2 + d^2}{4}$

Nr. 53. Man bestimme die arit
Gliederzahl 11, Summe 220 und Su

Antw. *Aus* $a + 5d = 20$
$= 13400$ *folgt* $d = \pm 3$ *und* a
5, 8, 11, ... 29, 32, 35.

Nr. 54. Man finde di
so aus einer arithmetisc
und der Differenz d ent ... Zahl sein; b ist
Summe der m ersten

Antw. S_n

Nr. 55. ... ossen a, b, c, d, e ...... in arithme-
der Differenz ... enen, so nehmen die Glieder irgend einer
S_1, S_2, S ... fferenzen von $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ ...... ab oder zu, je
tenzen ih ... Reihe selbst zu- oder abnimmt.

Beweis. Die einzelnen Differenzen-Reihen sind für eine steigende *Reihe:*

$$\frac{(b-a)^2}{bc};\quad \frac{(b-a)^2}{cd};\quad \frac{(b-a)^2}{de};\quad \frac{(b-a)^2}{ef}\ \ldots\ldots$$

$$\frac{1.2(b-a)^3}{bcd};\quad \frac{1.2(b-a)^3}{cde};\quad \frac{1.2(b-a)^3}{def};\quad \frac{1.2(b-a)^3}{efg}\ \ldots\ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots m(b-a)^{m+1}}{bcde\ldots\ldots t_{m+2}};\quad \frac{1.2.3\ldots\ldots m(b-a)^{m+1}}{cde\ldots\ldots t_{m+2}\cdot t_{m+3}};$$

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots m(b-a)^{m+1}}{de\ldots\ldots t_{m+2}\cdot t_{m+3}\cdot t_{m+4}};\ \ldots\ldots\ldots$$

Für eine fallende Reihe erhält man dieselben Differenz-Reihen, deren Zähler jedoch Potenzen von $a - b$ statt von $b - a$ sind.— Dass die Glieder der einzelnen Differenz-Reihen im ersten Fall ab-, im zweiten hingegen zunehmen, ergiebt sich von selbst aus der Zu- oder Abnahme ihrer Nenner.

Multiplicirt man diese Summen mit den Coëfficienten md, $\frac{m(m-1)}{1.2}d^2$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3$, ..., *so erhält man:*

$$md\,S_{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}d^2S_{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3S_{m-3}+\ldots\ldots=$$

$$=md.na^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}d^2.a^{m-2}[2\Sigma(n-1)+n]+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3.a^{m-3}[3\Sigma(n-1)^2+3\Sigma(n-1)+n]$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}d^4.a^{m-4}[4\Sigma(n-1)^3+6\Sigma(n-1)^2+4\Sigma(n-1)+n]+\ldots\ldots$$

$$=mnda^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}n^2d^2a^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}n^3d^3.a^{m-3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}n^4d^4a^{m-4}+\ldots\ldots$$

$$=(a+nd)^m-a^m=(l+d)^m-a^m.$$

Analyt. Beweis. *Die Glieder der arithmetischen Progression seien* a, b, c, ... k, l, *so hat man:*

$$\begin{array}{llll}
b=a+d; & b^2=a^2+2ad+d^2; & b^3=a^3+3a^2d+3ad^2+d^3; & b^4=a^4+4a^3d+6a^2d^2+4ad^3+d^4\\
c=b+d; & c^2=b^2+2bd+d^2; & c^3=b^3+3b^2d+3bd^2+d^3; & c^4=b^4+4b^3d+6b^2d^2+4bd^3+d^4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
l=k+d; & l^2=k^2+2kd+d^2; & l^3=k^3+3k^2d+3kd^2+d^3; & l^4=k^4+4k^3d+6k^2d^2+4kd^3+d^4.
\end{array}$$

Aus der Summirung der einzelnen Gruppen dieser Gleichungen ergiebt sich unter Berücksichtigung der Bedeutung von S_1, S_2, S_3, ... *die Reihe der Gleichungen:*

$$\begin{array}{l}
l-a=(n-1)d\\
l^2-a^2=2d(S_1-l)+(n-1)d^2\\
l^3-a^3=3d(S_2-l^2)+3d^2(S_1-l)+(n-1)d^3\\
l^4-a^4=4d(S_3-l^3)+6d^2(S_2-l^2)+4d^3(S_1-l)+(n-1)d^4\\
\vdots
\end{array}$$

allgemein

$$l^m-a^m=md(S_{m-1}-l^{m-1})+\frac{m(m-1)}{1.2}d^2(S_{m-2}-l^{m-2})+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3(S_{m-3}-l^{m-3})+\ldots\ldots$$

hieraus dann:

$$l^m + mdl^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}d^2l^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3l^{m-3} + \ldots\ldots - a^m$$
$$= mdS_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}d^2S_{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}d^3S_{m-3} + \ldots\ldots$$

und hieraus endlich die angegebene Relation. Dieser Beweis zeigt auch den Gang zur einfachsten Bestimmung der Werthe $S_1, S_2, S_3\ldots\ldots$

Nr. 56. Es seien a, $a-r$, $a-2r\ldots\ldots$ die Glieder einer arithmetischen Reihe von n Gliedern, deren Summe $=0$ ist, ferner b, $b+r$, $b+2r\ldots\ldots$ die Glieder einer zweiten Reihe von ebenso viel Gliedern; ferner $\frac{nr^2(1-a^2)}{12}$ die Summe einer dritten $n$gliedrigen Reihe, ab, $(a-r)(b+r)$, $(a-2r)(b+2r)$, ..., welche durch Multiplication der correspondirenden Glieder der beiden ersten Reihen entstanden ist. Wie gross ist n?

Antw. $n = a$, *mithin muss a eine ganze Zahl sein; b ist beliebig und* $r = \frac{2a}{a-1}$.

Nr. 57. Wenn die Grössen a, b, c, d, e ...... in arithmetischer Progression stehen, so nehmen die Glieder irgend einer Ordnung der Differenzen von $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}\ldots\ldots$ ab oder zu, je nachdem die Reihe selbst zu- oder abnimmt.

Beweis. *Die einzelnen Differenzen-Reihen sind für eine steigende Reihe:*

$$\frac{(b-a)^2}{bc};\quad \frac{(b-a)^2}{cd};\quad \frac{(b-a)^2}{de};\quad \frac{(b-a)^2}{ef}\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1.2(b-a)^3}{bcd};\quad \frac{1.2(b-a)^3}{cde};\quad \frac{1.2(b-a)^3}{def};\quad \frac{1.2(b-a)^3}{efg}\ldots\ldots\ldots$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$\frac{1.2.3\ldots\ldots m(b-a)^{m+1}}{bcde\ldots\ldots t_{m+2}};\quad \frac{1.2.3\ldots\ldots m(b-a)^{m+1}}{cde\ldots\ldots t_{m+2}\cdot t_{m+3}};$$
$$\frac{1.2.3\ldots\ldots m(b-a)^{m+1}}{de\ldots\ldots t_{m+2}\cdot t_{m+3}\cdot t_{m+4}};\ \ldots\ldots\ldots$$

Für eine fallende Reihe erhält man dieselben Differenz-Reihen, deren Zähler jedoch Potenzen von $a-b$ statt von $b-a$ sind.— Dass die Glieder der einzelnen Differenz-Reihen im ersten Fall ab-, im zweiten hingegen zunehmen, ergiebt sich von selbst aus der Zu- oder Abnahme ihrer Nenner.

II. Aufgaben über geometrische Progressionen.

Nr. 1. Wenn man aus einer geometrischen Progression vier Glieder so herausnimmt, dass zwischen dem ersten und zweiten Glied ebenso viel Glieder fehlen, als zwischen dem dritten und vierten, so werden diese vier Glieder eine geometrische Proportion bilden; wenn man sie aber so herausnimmt, dass zwischen allen vier Gliedern gleich viel Glieder der ursprünglichen Reihe fehlen, so bilden diese vier Glieder eine geometrische Progression.

Beweis. *Nimmt man zwischen zwei Gliedern p heraus, so hat man im ersten Fall:*

$aq^{n-1} : aq^{n+p} = aq^{m-1} : aq^{m+p}$, *im zweiten hingegen:*

$aq^{n-1} : aq^{n+p} : aq^{n+2p+1} : aq^{n+3p+2}$.

Nr. 2. In jeder geometrischen Progression verhält sich ein beliebiges Glied zu seinem unmittelbaren Nachfolger, wie die um das letzte Glied verminderte Reihen-Summe zu der um das erste Glied verminderten.

Beweis: $aq^{n-1} : aq^n = 1 : q =$

$= (a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + aq^{n-2}) : (aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots + aq^{n-1})$

$= (S_n - aq^{n-1}) : (S_n - a)$,

oder umgekehrt nach dem Satz, dass sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie ein einzelnes Vorderglied zu seinem Hinterglied verhalte.

Nr. 3. Man summire folgende Reihen:

$13 + 39 + 117 + \ldots\ldots$ (7 Glieder)

$$S_7 = 14209.$$

$8 + 20 + 50 + \ldots\ldots$ (15 Glieder)

$$S_{15} = \frac{5^{15} - 2^{15}}{3 . 2^{11}} = 4966755{,}42919921875.$$

$100 + 40 + 16 + \ldots\ldots$ (10 Glieder)

$$S_{10} = \frac{5}{3} . \frac{10^{10} - 4^{10}}{10^8} = 166{,}6491904$$

$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots\ldots$ (10 Glieder)

$$S_{10} = \frac{3^{10} - 2^{10}}{3^9} = \frac{58025}{19683}.$$

$2 + 3 + \frac{9}{2} + \ldots\ldots$ (20 Glieder)

$$S_{20} = \frac{3^{20} - 2^{20}}{2^{18}} = 13297{,}02692031860351 5625.$$

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3.4^{n-1}}.$$

$4+3+\frac{9}{4}+\frac{27}{16}+\ldots\ldots$ (10 Glieder)

$$S_{10} = \frac{4^{10}-3^{10}}{4^8} = 15{,}0934906005859375.$$

$3+4\frac{1}{2}+6\frac{3}{4}+\ldots\ldots$ (5 Glieder)

$$S_5 = \frac{3(3^5-2^5)}{2^4} = 39{,}5625.$$

$\frac{4}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\ldots\ldots$ (5 Glieder)

$$S_5 = (\tfrac{4}{3})^2-(\tfrac{3}{4})^3 = \tfrac{781}{576}.$$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{9}{8}+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = (\tfrac{3}{2})^{n-1}-\tfrac{2}{3}.$$

$1-2+4-8+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = \frac{1-(-2)^n}{3}.$$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = \frac{2}{3} - \frac{(-1)^n}{3.2^{n-1}}.$$

$21-3+\frac{3}{7}-\frac{3}{49}+\ldots\ldots$ (6 Glieder)

$$S_6 = \frac{3(7^6-1)}{8.7^4} = \frac{44118}{2401}.$$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{9}{8}+\ldots\ldots$ (n Glieder)

$$S_n = \tfrac{2}{15}[1-(-\tfrac{3}{2})^n].$$

$\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{2}{3}}+1-\ldots\ldots$ (8 Glieder)

$$S_8 = \tfrac{65}{24}(2-\sqrt{6}).$$

$\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{6}+2\sqrt{15}-\ldots\ldots$ (8 Glieder)

$$S_8 = 1111(\sqrt{0{,}6}-\sqrt{6}).$$

$3\frac{3}{8}+2\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}+\ldots\ldots$ (in infinit.)

$$S_\infty = \tfrac{81}{8}.$$

$2-\frac{1}{3}+\frac{1}{18}-\frac{1}{108}+\ldots\ldots$ (in infinit.)

$$S_\infty = \tfrac{12}{7}.$$

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\ldots$ (in infinit.)

$$S_\infty = \tfrac{3}{2}.$$

$1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\ldots\ldots$ (in infinit.)

$$S_\infty = \tfrac{3}{5}.$$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}+\ldots\ldots$ (in infinit.)

$$S_\infty = \tfrac{2}{9}.$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{3.2^2}+\ldots\ldots \text{ (in infinit.)}$$

$$S_\infty = \tfrac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2.2^3}+\frac{1}{2.2^6}-\ldots\ldots \text{ (in infinit.)}$$

$$S_\infty = \tfrac{4}{9}.$$

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots\ldots \text{ (in infinit.)}$$

$$S_\infty = \tfrac{4}{33}.$$

$$1+\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{32}-\ldots\ldots \text{ (in infinit.)}$$

$$S_\infty = \tfrac{49}{33}.$$

$$\frac{a}{x}\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{2x}{3a}}+\ldots\ldots \text{ (in infinit. und für } n \text{ Glieder)}$$

$$S_\infty = \frac{3a^2}{ax\sqrt{6}-2x\sqrt[4]{ax^3}}$$

$$\textit{und } S_n = \frac{a}{x}\cdot\frac{(\sqrt[4]{9a^3})^n-(\sqrt[4]{4x^3})^n}{\sqrt[4]{9a^3}-\sqrt[4]{4x^3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{9}{4(9a^3)^{n-1}}}.$$

$$r-\tfrac{1}{2}r^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{4}r^2-\ldots\ldots \text{ (} n \text{ Glieder)}$$

$$S_n = \frac{r\left[1-\left(-\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^n\right]}{1+\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2}}.$$

$$x^{\frac{5}{2}}-ax+\frac{a^2}{\sqrt{x}}-\ldots\ldots \text{ (} n \text{ Glieder)}$$

$$S_n = \frac{x^{\frac{8-3n}{2}}\left[x^{\frac{3n}{2}}-(-a)^n\right]}{x^{\frac{3}{2}}+a}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{2}{x\sqrt{x}}-\ldots\ldots \text{ (} n \text{ Glieder)}$$

$$S_n = \frac{1-\left(-\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^n}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}.$$

$$(a^2-b^2)+(a+b)+\frac{a+b}{a-b}+\ldots\ldots \text{ (} n \text{ Glieder)}$$

$$S_n = \frac{a+b}{(a-b)^{n-2}}\cdot\frac{(a-b)^n-1}{a-b-1}.$$

$$\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}+\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3+\ldots\ldots \text{ (} n \text{ Glieder)}$$

$$S_n = \frac{(a+x)^{2n}-(a-x)^{2n}}{(a+x)^{2n-3}.(a-x).4ax}.$$

$1 - x\sqrt{-1} - x^2 + x^3\sqrt{-1} + \ldots\ldots$ ($2n$ Glieder)

$$S_{2n} = \frac{1 - x^{2n}(-1)^n}{1 + x\sqrt{-1}}.$$

$5\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \ldots\ldots$ ($2n$ Glieder)

$$S_{2n} = n(6-n)\sqrt{x} + \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n}{\sqrt{x} - 1}.$$

Nr. 4. Welche der beiden Reihen $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots$ (in infinit.) und $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\ldots$ (in infinit.) ist grösser und um wie viel? Desgleichen vergleiche man die Reihen $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots$ (in infinit.) und $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots$ (12 Glieder).

Antw. *Die beiden ersten Reihen sind gleich und zwar* $= \frac{1}{2}$; *die Summe der dritten ist* 4 *und jene der vierten* 13.

Nr. 5. Man finde einen Ausdruck für die Summe von n Gliedern der Reihe $\frac{1}{5} - \frac{2}{15} + \frac{4}{45} - \ldots\ldots$ der Art, dass man ihn, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, benützen kann.

Antw. $\frac{3^n - (-2)^n}{25 \cdot 3^{n-1}}$ *wird für n gerade* $= \frac{3^n - 2^n}{25 \cdot 3^{n-1}}$ *und für n ungerade* $= \frac{3^n + 2^n}{25 \cdot 3^{n-1}}$.

Nr. 6. Wenn a und b die beiden ersten Glieder einer unendlichen geometrischen Progression sind, wie gross ist die Summe dieser Reihe?

Antw. $S_\infty = \frac{a^2}{a - b}$.

Nr. 7. Wenn a das Anfangsglied und b die Summe der drei ersten Glieder ist, so finde man den Exponenten der geometrischen Progression.

Antw. $e = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{4b}{a} - 3}\right)$.

Nr. 8. Das erste Glied einer unendlichen geometrischen Progression ist $= 1$, und jedes Glied derselben ist der Summe aller nachfolgenden gleich. Man bestimme die Reihe.

Antw. *Die Reihe ist* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots$

Nr. 9. Die Summe des zweiten und dritten Glieds einer geometrischen Progression ist 24 und die Summe der beiden nächsten 216; man bestimme die Reihe.

Antw. *Die Reihe ist* 2, 6, 18, 54, 162, 486, ...

Nr. 10. Wenn vier Grössen in geometrischer Progression ehen, so ist die Summe der beiden äussern grösser als die Summe r beiden innern Glieder.

Beweis. *Sowohl für* $q > 1$ *als* $q < 1$ *folgt* $q^2 - 2q + 1 > 0$ *er* $q^2 - q + 1 > q$ *oder* $(1+q)(q^2 - q + 1) > q(1+q)$ *oder* $1 + > q + q^2$ *oder endlich allgemein* $aq^n + aq^{n+3} > aq^{n+1} + aq^{n+2}$.

Nr. 11. Wenn Grössen, deren Unterschiede in Bezug auf die össen selbst verschwindend klein sind, in arithmetischer Proession stehen, so stehen sie auch in geometrischer Progression.

Beweis. *Die arithmetische Progression* a, $a + \frac{1}{m}$, $a + \frac{2}{m}$, $+ \frac{3}{m}$, ... *ist für grosse Werthe von* m *eine geometrische mit m Exponenten* $1 + \frac{1}{ma}$.

Nr. 12. Wenn man eine arithmetische und eine geometrische ogression, beide von ungerader Gliederzahl und gemeinschaftchem Mittelglied hat, so ist das Product aus dem Mittelglied in e Summe zweier von demselben gleich weit entfernten Glieder r arithmetischen Reihe gleich dem doppelten Product zweier von m Mittelglied gleich weit entfernten Glieder der geometrischen eihe.

Beweis. *Ist die arithmetische Reihe* $a - nd$, ... $a - d$, , $a + d$, ..., $a + nd$ *und die geometrische Reihe* $\frac{a}{q^r}$, ..., $\frac{a}{q}$, aq, ..., aq^r, *so folgt:* $a[(a - nd) + (a + nd)] = 2 . \frac{a}{q^r} . aq^r = 2a^2$.

Nr. 13. Die um das erste Glied verminderte Reihensumme ner geometrischen Progression ist gleich der um das letzte Glied rminderten Reihensumme multiplicirt mit dem Exponenten der eihe.

Beweis *folgt aus Nr. 2, wo* $1 : q = (S_n - aq^{n-1}) : (S_n - a)$ *war.*

Nr. 14. Aus der Summe s der Glieder einer geometrischen endlichen Progression und der Summe S ihrer Quadrate bestimme an die Reihe selbst.

Antw. *Die Reihe ist:*

$$\frac{2Ss}{s^2 + S}, \quad \frac{2Ss(s^2 - S)}{(s^2 + S)^2}, \quad \frac{2Ss(s^2 - S)^2}{(s^2 + S)^3}, \ \ldots\ldots$$

Nr. 15. Wenn gegeben sind das Anfangsglied a und der xponent q einer geometrischen Progression, so finde man die

Anzahl n der Glieder, deren Summe der $m$fachen Summe der reciproken Werthe gleich ist.

Antw. $n = \frac{\log m - 2\log a}{\log q} + 1.$

Nr. 16. Welche Beziehung herrscht in einer geometrischen Progression von ungerader Gliederzahl zwischen der Summe der geraden Glieder (S_n), der Summe der ungeraden Glieder (S_{n+1}), der ganzen Reihensumme (S_{2n+1}) und endlich der Summe der Quadrate der Glieder ($S_{(2n+1)^2}$).

Antw. $S_{(2n+1)^2} = S_{2n+1} . (S_{n+1} - S_n).$

Nr. 17. Welche Beziehung herrscht zwischen der Summe S, dem Product P von n Gliedern einer geometrischen Progression und der Summe s der reciproken Werthe ihrer Glieder?

Antw. $P^2 = \left(\frac{S}{s}\right)^n.$

Nr. 17. Man finde 4 geometrische Mittel zwischen 1 und 32 und 2 solche zwischen 1 und 100.

Antw. *Die ersten* 4 *sind* 2, 4, 8, 16; *die letzten* 2 *aber* $\sqrt[3]{100}$ *und* $\sqrt[3]{(100)^2}$.

Nr. 19. In welchem Verhältniss stehen zwei Grössen a und b, deren arithmetisches Mittel doppelt so gross als das geometrische ist?

Antw. $a:b = (2 \pm \sqrt{3}):(2 \mp \sqrt{3})$. *Siehe Nr.* 21.

Nr. 20^a. Wenn man zwischen jedes von $n+1$ Grössen-Paaren, nämlich zwischen x und y, zwischen x und $2y$, zwischen x und $4y$ u. s. f. je n geometrische Mittel einschaltet, und mit M_1, M_2, M_3 u. s. w. die bezüglichen $n$ten Glieder bezeichnet, wem ist dann die Reihe $\frac{M_1}{M_2} + \frac{M_2}{M_3} + \frac{M_3}{M_4} + \ldots\ldots$ gleich?

Antw. $S_n = \frac{n}{\sqrt[n+1]{2^n}}.$

Nr. 20^b. Zwischen zwei Grössen a und b schalte man n geometrische Mittel ein, und suche eine Relation zwischen dem ersten derselben und den gegebenen Grössen.

Antw. $a:b = a^{n+1}:(M_1)^{n+1}.$

Nr. 21. Man finde das Verhältniss zweier Grössen, wenn das Verhältniss ihres geometrischen und arithmetischen Mittels gegeben ist.

Antw. *Aus* $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = r$ *folgt:* $\frac{a}{b} = (r \pm \sqrt{r^2-1})^2$

$$= \frac{r \pm \sqrt{r^2-1}}{r \mp \sqrt{r^2-1}} = \frac{1}{(r \mp \sqrt{r^2-1})^2}.$$

Nr. 22. Aus den Werthen a und b des $p$ten und $q$ten Glieds einer geometrischen Progression finde man den Werth des $x$ten Gliedes.

Antw. $t_x = \sqrt[p-q]{\frac{b^{p-x}}{a^{q-x}}} = \sqrt[q-p]{\frac{a^{q-x}}{b^{p-x}}}.$

Nr. 23. Aus den Werthen a und b des $p$ten und $q$ten Gliedes einer geometrischen Progression finde man den Werth des $p+q$ten Gliedes.

Antw. $t_{p+q} = \sqrt[p-q]{\frac{a^p}{b^q}} = \sqrt[q-p]{\frac{b^q}{a^p}}.$

Nr. 24. Aus der Summe p des $n$ten und $2n$ten Gliedes und der Summe q des $2n$ten und $3n$ten Gliedes einer geometrischen Progression finde man ihr Anfangsglied und ihren Exponenten.

Antw. $a = \frac{p^3 \sqrt[n]{\frac{q}{p}}}{pq+q^2}$; $e = \sqrt[n]{\frac{q}{p}}.$

Nr. 25. Wenn in einer geometrischen Progression das $p+q$te Glied $= m$ und das $p-q$te Glied $= n$ ist, wie heissen dann das $p$te und $q$te Glied?

Antw. $t_p = \sqrt{mn}$ *und* $t_q = m\sqrt[2q]{\left(\frac{n}{m}\right)^p}.$

Nr. 26. Die Summen S und S_1 zweier unendlichen geometrischen Progressionen verhalten sich $S : S_1 = 4:9$; die zwei ersten Glieder der ersten Reihe S sind 40 und 35; das zweite Glied der zweiten Reihe ist $46\frac{19}{36}$; man bestimme das erste Glied a und den Exponenten q der zweiten Reihe.

Antw. $a = 670$ *oder* $= 50$, *und* $q = \frac{5}{72}$ *oder* $= \frac{67}{72}$.

Nr. 27. Wenn S, a, r, n bezüglich die Summe, das erste Glied, der Exponent und die Gliederanzahl einer geometrischen Progression sind, so finde man die Summe der Reihe $S \pm a$, $S \pm (a+ar)$, $S \pm (a+ar+ar^2)$, $S \pm (a+ar+ar^2+ar^3)+\ldots\ldots$

Antw. $\Sigma_n = nS + \frac{rS-na}{r-1}.$

Nr. 28. Wenn das Anfangsglied a und der Exponent e einer geometrischen Progression gegeben sind, und man mit S_n, S_{2n}, $S_{3n}\ldots$

die Summen von n, $2n$, $3n$ .... ihrer Glieder bezeichnet, so finde man die Summe von r Gliedern der Reihe: $S_n + S_{2n} + S_{3n} + S_{4n} + \ldots$

Antw. $\Sigma_r = \frac{a}{e-1}\left(\frac{e^n(e^{nr}-1)}{e^n-1} - r\right)$.

Nr. 29. Wenn S_1, S_2, S_3 ...... S_n die Summen von n unendlichen, mit 1 beginnenden geometrischen Progressionen sind, deren Exponenten bezüglich $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r_3}$ ...... $\frac{1}{r^n}$ sind, so bestimme man die Summe der reciproken Werthe:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{S_n}.$$

Antw. $\Sigma_n = n - \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$.

Nr. 30. Wenn man unendlich viele unendliche geometrische Progressionen hat, deren Anfangsglieder bezüglich a, a^2, a^3, a^4....., Exponenten bezüglich r, $2r$, $3r$ ...... und Summen bezüglich S_1, S_2, S_3 ...... sind, so finde man die Summe der unendlichen Reihe: $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \ldots\ldots$

Antw. $\Sigma_\infty = \frac{a(1-r)-1}{(a-1)^2}$.

Nr. 31. Summire die unendliche Reihe:

$$\frac{a}{c}, \frac{a+b}{ce}, \frac{a+2b}{ce^2}, \frac{a+3b}{ce^3} + \ldots\ldots$$

Antw. $S_\infty = \frac{e}{c(e-1)} \cdot \left(a + \frac{b}{e-1}\right)$.

Nr. 32. Summire die unendliche Reihe: $\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{13}{16} + \ldots$

Antw. $S_\infty = 5$.

Nr. 33. Bestimme die Summe von n Gliedern einer Reihe, die dadurch entsteht, dass man die Glieder a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$..... einer arithmetischen Progression mit den entsprechenden Gliedern b, bd, bd^2, bd^3 ...... einer geometrischen Progression multiplicirt.

Antw. $S_n = \frac{b}{d-1}\left(d^n(a+rn-r) - a - r \cdot \frac{d^n - d}{d-1}\right)$

$$= \frac{b(1-d^n)(a+rd-ad)}{(1-d)^2} - \frac{nbr \cdot d^n}{1-d}.$$

Nr. 34. Man bestimme die Summe von 12 Gliedern der arithmetischen Progression $7+5+3+\ldots\ldots$, ebenso jene von 5 Gliedern der geometrischen Progression $-\frac{7}{3}+\frac{7}{2}-\ldots\ldots$ und end-

lich der unendlichen Reihe, deren Glieder die Producte der entsprechenden Glieder der beiden gegebenen Reihen sind.

Antw. $S_{12} = -48$, $S_5 = -\frac{8157}{80}$, $S_\infty = -\frac{118}{25}$.

Nr. 35. Welche Beziehung herrscht zwischen den Summen s und s_1 zweier unendlichen, mit 1 beginnenden geometrischen Progressionen und der Summe S jener Reihe, die durch Multiplication der entsprechenden Glieder jener zwei Progressionen entsteht?

Antw. $S = \frac{s \,.\, s_1}{s + s_1 - 1}$.

Nr. 36. Welches Verhältniss findet statt zwischen den Summen s_1 und s_2 der zwei unendlichen Reihen $s_1 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \ldots\ldots$ und $s_2 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \ldots\ldots$

Antw. $s_1 : s_2 = 27 : 1$.

Nr. 37. Welche Beziehung herrscht zwischen den Summen s_1, s_2, s_3 der drei unendlichen geometrischen Progressionen $s_1 = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots\ldots$, $s_2 = 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \ldots\ldots$, und $s_3 = 1 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \ldots\ldots$?

Antw. $s_3 = s_1 \,.\, s_2$.

Nr. 38. Man bestimme die Summe der Reihe $ar + 3ar^2 + 6ar^3 + 10ar^4 + \ldots\ldots$, die durch Multiplication der Glieder einer geometrischen Progression mit den entsprechenden Gliedern der Reihe der Dreiecks-Zahlen entsteht.

Antw.

$$S_n = \frac{ar(1 - r^n)}{(1 - r)^3} - \frac{ar^{n+1}}{2}\left(\frac{n^2}{1 - r} + \frac{n(3 - r)}{(1 - r)^2}\right)$$

$$= \frac{a}{2(r-1)^3}[n(n+1)r^{n+3} - 2n(n+2)r^{n+2} + (n+1)(n+2)r^{n+1} - 2r];$$

$$S_\infty = \frac{ar}{(1 - r)^3}.$$

Nr. 39. Man summire die folgenden $n$gliedrigen Reihen:
$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots$

$$S_n = \frac{1 - x^n}{(1 - x)^2} - \frac{nx^n}{1 - x}$$

$$= \frac{1}{(1 - x)^2}[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1].$$

$*1.x+2.x^2+3.x^3+4.x^4+\ldots\ldots$

$$S_n = \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}$$
$$= \frac{x}{(x-1)^2}[nx^{n+1}-(n+1)x^n+1].$$

$*1.2x+2.3x^2+3.4x^3+4.5x^4+\ldots\ldots$

$$S_n = \frac{(1-x^n)2x}{(1-x)^3} - x^{n+1}\left(\frac{n^2}{1-x}+\frac{n(3-x)}{(1-x)^2}\right)$$
$$= \frac{x}{(x-1)^3}[n(n+1)x^{n+2}-2n(n+2)x^{n+1}+(n+1)(n+2)x^n-2].$$

$*1.2.3x+2.3.4x^2+3.4.5x^3+4.5.6x^4+\ldots\ldots$

$$S_n = \frac{(1-x^n)6x}{(1-x)^4} - x^{n+1}\left(\frac{n^3}{1-x}+\frac{n^2(6-3x)}{(1-x)^2}+\frac{n(11-7x+2x^2)}{(1-x)^3}\right)$$
$$= \frac{x}{(x-1)^4}[n(n+1)(n+2)x^{n+3}-3n(n+1)(n+3)x^{n+2}+$$
$$+3n(n+2)(n+3)x^{n+1}-(n+1)(n+2)(n+3)x^n+6].$$

$*1.2.3.4x+2.3.4.5x^2+3.4.5.6x^3+4.5.6.7x^4+\ldots\ldots$

$$S_n = \frac{24x(1-x^n)}{(1-x)^5} - x^{n+1}\left(\frac{n^4}{1-x}+\frac{n^3(10-6x)}{(1-x)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n^2(35-34x+11x^2)}{(1-x)^3}+\frac{n(50-46x+26x^2-6x^3)}{(1-x)^4}\right)$$
$$= \frac{x}{(x-1)^5}[n(n+1)(n+2)(n+3)x^{n+4}-4n(n+1)(n+2)(n+4)x^{n+3}$$
$$+6n(n+1)(n+3)(n+4)x^{n+2}-4n(n+2)(n+3)(n+4)x^{n+1}+$$
$$+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)x^n-24].$$

Nr. 40. Man summire folgende unendliche Reihen:

$1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2.$$

$1-\frac{2x^2}{a^2}+\frac{3x^4}{a^4}-\frac{4x^6}{a^6}+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \left(\frac{a^2}{a^2+x^2}\right)^2.$$

$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$1.x+2.x^2+3.x^3+4.x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$1.2x+2.3x^2+3.4x^3+4.5x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

$1.2.3x+2.3.4x^2+3.4.5x^3+4.5.6x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{6x}{(1-x)^4}.$$

$1.2.3.4x+2.3.4.5x^2+3.4.5.6x^3+4.5.6.7x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{24x}{(1-x)^5}.$$

$x+3x^2+5x^3+7x^4+9x^5+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}.$$

$x+5x^2+9x^3+13x^4+17x^5+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{x(1+3x)}{(1-x)^2}.$$

$1.2x+3.4x^2+5.6x^3+7.8x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{2x(1+3x)}{(1-x)^3}.$$

$1.2.3x+4.5.6x^2+7.8.9x^3+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{6x(1+16x+10x^2)}{(1-x)^4}.$$

$1.3x+2.4x^2+3.5x^3+4.6x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}.$$

$1.4x+2.5x^2+3.6x^3+4.7x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{2x(2-x)}{(1-x)^3}.$$

$1.4x+3.6x^2+5.6x^3+7.10x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{2x(2+3x-x^2)}{(1-x)^3}.$$

$1.3x+4.6x^2+7.9x^3+10.12x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{3x(1+5x)}{(1-x)^3}.$$

$1.3x+3.5x^2+5.7x^3+7.9x^4+\ldots\ldots$

$$S_\infty = \frac{x(3+6x-x^2)}{(1-x)^3}.$$

Nr. 41. In welchem Verhältniss steht die Summe der reciproken Werthe der $n$ten Potenzen der ungeraden Zahlen zur Summe der reciproken Werthe derselben Potenzen der geraden Zahlen?

Antw. $S_{\left(\frac{1}{2r+1}\right)^n} : S_{\left(\frac{1}{2r}\right)^n} = (2^n-1):1.$

Nr. 42. n Knaben stehen in gleichen Abständen von einander in einer Geraden, und der erste um eine Strecke a von einem Orte S

entfernt. Eine Person P geht von S bis zum ersten Knaben und dann nach S zurück, und während seines Rückganges marschiren die Knaben in gleichem Schritt wie P, jedoch von S hinweg, und halten, wenn P in S ankommt. P geht hierauf von S bis zum zweiten Knaben, und während er nach S zurückkehrt, marschiren die Knaben wieder weiter und halten wieder, wenn P in S angekommen ist. So wird das Spiel fortgesetzt, bis P beim letzten Knaben angelangt und wieder zurückgekehrt ist. Wenn nun die Knaben unter denselben Umständen gegen S hin statt davon hinweg marschirt wären, so würde P nur den $m$ten Theil des vorigen Weges zurückgelegt haben. Wie gross ist demnach die Entfernung der Knaben von einander?

Antw. *Da P im ersten Fall den Weg* $2a(2^n-1)+2x(2^n-n-1)$, *im zweiten hingegen nur jenen* $2a+2x(n-1)$ *zurücklegt, so ergiebt sich als gesuchte Entfernung:*

$$x=\frac{a(2^n-m-1)}{n(m+1)-(2^n+m-1)}.$$

III. Aufgaben über harmonische Progressionen.

Nr. 1. Man erkläre die Natur einer harmonischen Progression, und setze die Reihe 2, 3, 6 nach beiden Richtungen fort.

Antw. *Drei Grössen sind harmonisch proportionirt, wenn die erste zur dritten in demselben Verhältniss steht, wie der Ueberschuss der zweiten über die erste zum Ueberschuss der dritten über die zweite; und eine harmonische Progression ist eine Reihe von Gliedern, von denen je drei unmittelbar auf einander folgende eine harmonische Progression bilden. Ist* $a, b, c, d \ldots\ldots$ *eine solche Reihe, so ergiebt sich aus den Gleichungen:* $a:c=(b-a):(c-b)$, $b:d=(c-b):(d-c)$ *u. s. w. das allgemeine Bild:*

$$a,\ b,\ \frac{ab}{2a-b},\ \frac{ab}{3a-2b},\ \frac{ab}{4a-3b},\ \ldots\ldots\ \frac{ab}{(n-1)a-(n-2)b}$$

oder auch: $$\frac{ab}{b},\ \frac{ab}{b-(b-a)},\ \frac{ab}{b-2(b-a)},\ \frac{ab}{b-3(b-a)},$$

$$\frac{ab}{b-4(b-a)},\ \ldots\ldots\ \frac{ab}{b-(n-1)(b-a)},$$ *und man sieht, dass*

diese Reihe für $(n-1)a = (n-2)b$ *wegen des Nenners* 0 *schliesst. Das Zahlenbeispiel* ...... $\frac{6}{7}$, 1, $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3, 6 *schliesst bei* 6.

Nr. 2. Man verlängere die Reihe 3, 4, 6 nach beiden Richtungen, und gebe die Grenzen an, wie weit dies geschehen kann.

Antw. *Die Reihe* ...... $\frac{12}{7}$, 2, $\frac{12}{5}$, 3, 4, 6, 12 *schliesst vorwärts bei* 12, *lässt sich aber rückwärts ins Unendliche fortsetzen.*

Nr. 3. Man beweise, dass die reciproken Werthe der Glieder einer harmonischen Progression eine arithmetische Progression bilden.

Antw. *Aus Nr.* 1 *ergiebt sich die Reihe der reciproken Werthe:*

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}+\frac{a-b}{ab},\ \frac{1}{a}+2.\frac{a-b}{ab},\ \frac{1}{a}+3.\frac{a-b}{ab} \ldots\ \frac{1}{a}+(n-1).\frac{a-b}{ab}.$$

Nr. 4. In einer harmonischen Progression verhält sich das Product der beiden ersten Glieder zum Product irgend zweier anderer, unmittelbar auf einander folgender Glieder, wie der Unterschied der beiden ersten Glieder sich zum Unterschied der beiden andern verhält.

Beweis. *Durch Multiplication der Proportionen*

$$\begin{array}{rcl}
a:c & = & (b-a):(c-b) \\
b:d & = & (c-b):(d-c) \\
c:e & = & (d-c):(e-d) \\
\vdots & & \vdots \qquad \vdots \\
p:r & = & (q-p):(r-q) \\
q:s & = & (r-q):(s-r) \\
r:t & = & (s-r):(t-s) \\
\hline
ab:st & = & (b-a):(t-s).
\end{array}$$

ergiebt sich: $ab:st = (b-a):(t-s)$.

Nr. 5. In einer harmonischen Progression verhält sich der Unterschied der beiden ersten Glieder zum Unterschied zweier anderer, unmittelbar auf einander folgender Glieder, wie das um die *m*fache Differenz des zweiten und ersten Gliedes verminderte zweite Glied zum letzten, wenn *m* die Anzahl Glieder ist, die zwischen dem ersten und letzten Glied liegen.

Beweis. *Aus Nr.* 4 *folgt:* $(b-a):(z-y) = ab:zy = \frac{ab}{y}:z$; *wenn aber zwischen a und z als erstem und letztem Glied noch m andere Glieder liegen, so ist als* $m+1$*tes Glied der*

Reihe $y = \frac{ab}{b - m(b-a)}$ *und daher ergiebt sich:* $(b-a):(z-y) = [b - m(b-a)]:z$.

Als Zusatz ergiebt sich auch:

$(b-a):(z-y) = [b-(m+1)(b-a)]:y$ *und*

$y:z = [b-(m+1)(b-a)]:[b-m(b-a)]$.

Nr. 6. In einer harmonischen Progression verhält sich das um die *m*fache Differenz des zweiten und ersten Gliedes verminderte zweite Glied zum letzten, wie das Product aus den beiden ersten Gliedern zum Product aus den beiden letzten, wobei *m* dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Aufgabe hat.

Beweis. *Aus Nr.* 4 *und* 5 *folgt:* $[b-m(b-a)]:z = ab:zy$.

Nr. 7. Ein beliebiges Glied einer harmonischen Progression ist gleich dem Product der beiden ersten Glieder dividirt durch den Unterschied zwischen dem zweiten Glied und der so vielfachen Differenz des zweiten und ersten Gliedes, als dem gesuchten Glied Glieder vorausgehen.

Beweis. *Aus Nr.* 1 *hat man* $t_n = \frac{ab}{b-(n-1)(b-a)}$.

Nr. 8. Die Summe zweier beliebigen Glieder einer harmonischen Progression ist grösser als das doppelte, zwischen ihnen liegende Mittelglied, und zwar ist der Ueberschuss um so grösser, je entfernter die beiden Glieder von einander liegen.

Beweis. *Nimmt man von einer harmonischen Progression drei gleich weit von einander entfernte Glieder* t_{n-p}, t_n *und* t_{n+p} *heraus, so werden dieselben die allgemeine Form* $\frac{A}{N-pC}$, $\frac{A}{N}$ *und* $\frac{A}{N+pC}$ *haben, und, wie sich leicht beweisen lässt, eine harmonische Proportion bilden; nämlich:* $t_{n-p}:t_{n+p} = (t_n - t_{n-p}):(t_{n+p}-t_n)$. *Aus dieser folgt* $t_n = \frac{2t_{n-p}\cdot t_{n+p}}{t_{n-p}+t_{n+p}}$ *und weiters* $t_{n-p}+t_{n+p} > \frac{2t_{n-p}\cdot t_{n+p}}{t_{n-p}+t_{n+p}}$ *und zwar grösser um* $\frac{(t_{n-p}-t_{n+p})^2}{t_{n-p}+t_{n+p}}$. *Dieser Ueberschuss erhält aber durch Substitution der Werthe von* t_{n-p} *und* t_{n+p} *die Form* $\frac{2p^2C^2A}{N(N^2-p^2C^2)}$, *welcher Ausdruck um so grösser wird, je grösser p ist, je weiter also die beiden äussern Glieder vom mittleren, und also auch von einander entfernt sind.*

Nr. 9. Aus den beiden äussersten Gliedern (a und t) und der Gliederzahl n einer harmonischen Reihe finde man diese selbst.

Antw. *Die Reihe ist:*

$$a,\ \frac{at(n-1)}{a+(n-2)t},\ \frac{at(n-1)}{2a+(n-3)t},\ \frac{at(n-1)}{3a+(n-4)t},\ \ldots\ldots,\ t.$$

Nr. 10. Man schalte zwei harmonische Mittel zwischen 2 und 4 ein; ebenso zwei zwischen 6 und 24; vier zwischen 2 und 12; sechs zwischen 1 und 20 und n zwischen x und y.

Antw.

$2,\ \frac{12}{5},\ 3,\ 4;$

$6,\ 8,\ 12,\ 24;$

$2,\ \frac{12}{5},\ 3,\ 4,\ 6,\ 12;$

$1,\ \frac{140}{121},\ \frac{70}{51},\ \frac{140}{83},\ \frac{35}{16},\ \frac{28}{9},\ \frac{70}{13},\ 20;$

$$x,\ \frac{xy(n+1)}{ny+x},\ \frac{xy(n+1)}{(n-1)y+2x},\ \frac{xy(n+1)}{(n-2)y+3x},\ \frac{xy(n+1)}{(n-3)y+4x},\ \ldots\ldots\ y.$$

Nr. 11. Man schalte n harmonische Mittel zwischen a und b ein, und suche eine Relation zwischen dem ersten dieser Mittel h_1 und den beiden gegebenen Grössen.

Antw. $a : b = n(a-h_1) : (h_1-b)$.

Nr. 12. In welcher Beziehung stehen das harmonische, das geometrische und das arithmetische Mittel (H, G, A) zweier Grössen a und b?

Antw. $G = \sqrt{AH}$, *daher auch* $AH = ab$ *ist.*

Nr. 13. Welches von den drei Mitteln zwischen zwei gegebenen Grössen ist das grösste und warum?

Antw. $A > G > H$, *denn aus* $a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$ *folgt* $a + b > 2\sqrt{ab}$ *und* $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, *hieraus dann weiter:*

$$1 > \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \text{ und } \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

Nr. 14. In welchem Verhältniss stehen zwei Grössen x und y, wenn sich ihr geometrisches und harmonisches Mittel wie $1 : n$ verhalten?

Antw. $x : y = (1 \pm \sqrt{1-n^2}) : (1 \mp \sqrt{1-n^2})$.

Nr. 15. Wenn y das harmonische Mittel zwischen x und z ist, und x und z bezüglich das arithmetische und geometrische Mittel zwischen a und b sind, so drücke man y durch a und b aus.

Antw. $y = \frac{2(a+b)}{\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}} + \sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^2}$.

Nr. 16. **Aus der Summe s dreier in harmonischer Progression stehender Zahlen und ihrem Product p finde man dieselben.**

Antw. *Nennt man die beiden äussern Glieder x und y, so erhält man für dieselben die Gleichungen:* $x^3y^3 - \frac{sp}{2}xy + p^2 = 0$ *und* $x + y = \frac{2x^2y^2}{p}$, *die nicht mehr auf elementarem Wege löslich sind. Nimmt man an, die drei gesuchten Grössen seien* $\frac{1}{\alpha-\beta}$, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha+\beta}$, *so erhält man hiefür ebenfalls cubische Gleichungen, nämlich* $\alpha^3 - \frac{s}{2p}\alpha + \frac{1}{2p} = 0$ *und* $\beta = \pm\sqrt{3\alpha^2 - \frac{s}{p}}$; *nimmt man aber an, es sei statt des Productes p der drei Grössen die Summe q ihrer Producte zu zweien (Binionen) gegeben, so erhält man:*

$$x_1 = \frac{s}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{2} - 2q + s\sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}}};$$

$$z_1 = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}};$$

$$y_1 = \frac{s}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{2} - 2q + s\sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}}};$$

oder

$$x_2 = \frac{s}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{2} - 2q - s\sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}}};$$

$$z_2 = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}};$$

$$y_2 = \frac{s}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{2} - 2q - s\sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{2q}{3}}}.$$

Nr. 17. Wenn man vier Grössen hat, von denen die ersten drei in arithmetischer, die letzten drei in harmonischer Progression stehen, so hat die erste zur zweiten dasselbe Verhältniss wie die dritte zur vierten.

Beweis. *Aus* $A - B = B - C$ *und* $B : D = (B - C) : (C - D)$ *folgt:* $B : D = (A - B) : (C - D)$ *und hieraus* $A : B = C : D$. — *Als Zusatz ergiebt sich leicht, dass wenn A, B, C in arithmetischer Progression stehen, ihre Producte AB, AC, BC harmonisch proportionirt sind.*

Nr. 18. Die Summe dreier in harmonischer Progression stehender Zahlen ist $\frac{11}{12}$, die erste derselben $\frac{1}{2}$, wie heissen diese

Zahlen und wie heisst die nach beiden Richtungen fortgesetzte Reihe?

Antw. ...... $\frac{5}{24}$, $\frac{5}{17}$, $[\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}]$, $-\frac{5}{11}$, $-\frac{5}{18}$, $-\frac{1}{5}$.....
$[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}]$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, ...

Die zweite Reihe lässt sich rückwärts nicht fortsetzen.

Nr. 19. Wenn S und s die Summen zweier unendlichen Reihen $R+R^2+R^3+$...... und $r+r^2+r^3$...... sind, deren Exponenten bezüglich R und r, und zwar Brüche sind, so stehen S, s, R und r in harmonischer Progression.

Antw. *Die vier Grössen* $\frac{R}{1-R}$, $\frac{r}{1-r}$, R *und* r *stehen nur dann in harmonischer Progression, wenn die Relation* $\frac{1}{r}-\frac{1}{R}=\frac{1}{2}$ *stattfindet.*

Nr. 20. Aus den beiden ersten Gliedern einer harmonischen Progression bestimme man deren $n$tes Glied.

Antw. *Ergiebt sich aus Nr. 1 als*

$$t_n = \frac{ab}{b-(n-1)(b-a)} = \frac{ab}{b+(n-1)(a-b)}.$$

Nr. 21. Aus dem $m$ten und $n$ten Glied einer harmonischen Progression bestimme man das $m+n$te Glied.

Antw. $t_{m+n} = \frac{(m-n).t_m.t_n}{m.t_n-n.t_m}$.

Nr. 22. Man vergleiche die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Quadrate dieser Seiten in harmonischer Progression stehen.

Antw. *Die drei Seiten stehen in dem Verhältniss* $x:y:z = \sqrt{\sqrt{2}-1}:\sqrt{2-\sqrt{2}}:1$ *und wenn man bedenkt, dass* $\sqrt{2-\sqrt{2}}:1$ *das Verhältniss der Seite des regelmässigen Achtecks zum Radius des darum beschriebenen Kreises ist, so lässt sich auch leicht ein solches rechtwinkliges Dreieck construiren.*

Aufgaben über höhere Gleichungen.

Nr. 1. Bilde die Gleichung, deren Wurzeln $2+\sqrt{-3}$, $2-\sqrt{-3}$, 1 und -5 sind.

Antw. $x^4-14x^2+48x-35 = 0$.

Nr. 2. Bilde die Gleichung, deren Wurzeln $\pm\sqrt{-2}$, 3 und 4 sind.

Antw. $x^4-7x^3+14x^2-14x+24 = 0$.

Nr. 3. Bilde die Gleichung, deren Wurzeln $1\pm\sqrt{-2}$ und $2\pm\sqrt{-3}$ sind.

Antw. $x^4-6x^3+18x^2-26x+21 = 0$.

Nr. 4. Bilde die biquadratische Gleichung, von welcher zwei Wurzeln $1+\sqrt{a^3}$ und $-\sqrt{-b}$ sind.

Antw. $x^4-2x^3+(b+1-a^3)x^2-2bx+b(1-a^3) = 0$.

Nr. 5. Bilde die biquadratische Gleichung, von welcher zwei Wurzeln $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{-5}$ sind.

Antw. $x^4+2x^2-15 = 0$.

Nr. 6. Bilde die Gleichung, deren Wurzeln $\frac{1}{2}a\pm\sqrt{-\frac{3}{4}a^2}$ und $-a$ sind.

Antw. $x^3+a^3 = 0$.

Nr. 7. Bilde die Gleichung, deren Wurzeln die verschiedenen Werthe von $a+\sqrt[n]{b}$ sind.

Antw. $(x-a)^n-b = 0$.

Nr. 8. **Wenn a eine Wurzel der Gleichung**

$$x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots\mp Qx\pm P = X = 0$$

ist, so ist $x-a$ ein Divisor von X.

Beweis. *Man dividire wirklich, und zwar so lange fort, bis in dem Rest nur constante Grössen und keine Potenz der Unbekannten x mehr vorkommt, so erhält man $X = (x-a)Q+R$. Da aber $X=0$ und $x-a=0$, so folgt auch $R=0$, d. h. X durch $x-a$ ohne Rest theilbar.*

Nr. 9. Unter der Voraussetzung, dass eine Gleichung eine Wurzel hat, beweise man, dass sie deren so viele besitzt, als ihr Grad angiebt, oder als sie Dimensionen hat.

Beweis. *Ist a eine Wurzel der Gleichung*

$$x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots\ldots+C_{n-1}x+C_n = X = 0,$$

so ist X durch $x-a$ theilbar, und der Quotient

$$x^{n-1}+D_1x^{n-2}+D_2x^{n-3}+\ldots\ldots+D_{n-2}x+D_{n-1}=X_1=0$$
hat selbst wieder mindestens eine Wurzel a_1, *durch deren Wurzelfactor* $x-a_1$ *sie dividirbar ist, und deren Division wieder eine Gleichung nächst niederen Grades giebt. Setzt man diese Operation fort, so erhält man, nachdem man* $n-1$ *Wurzeln der ursprünglichen Gleichung durch Division mit* $x-a$, $x-a_1$, $x-a_2$ *u.s.w. entfernt hat, endlich die Gleichung* $x+Q=0$, *die selbst noch eine, also die* n^{te} *Wurzel liefert.*

Nr. 10. Wenn a eine Wurzel der Gleichung
$$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$$
ist, und wenn $\frac{S}{a}+R=R_1$, ferner $\frac{R_1}{a}+Q=Q_1$ u.s.w. ist, so sind $\frac{S}{a}$, R_1, Q_1 u.s.w. ganze Zahlen.

Beweis. *Es muss* $a^n+pa^{n-1}+\ldots\ldots+Qa^2+Ra+S=0$ *oder wenn man* S *isolirt und mit* a *dividirt:*
$$\frac{S}{a}=-(a^{n-1}+pa^{n-2}+\ldots\ldots+Qa+R) \text{ sein.}$$
Da aber die rechts stehende Seite eine ganze Zahl sein muss, so folgt auch, dass $\frac{S}{a}$ *eine solche sei. Es folgt ferner hieraus* $\frac{S}{a}+R=R_1=-(a^{n-1}+pa^{n-2}+\ldots\ldots+Qa)$ *gleich einer ganzen Zahl, und da der rechts stehende Ausdruck auch wieder durch* a *dividirbar ist, so folgt auch, dass sowohl* $\frac{R_1}{a}$ *als auch* $\frac{R_1}{a}+Q$ *eine ganze Zahl sei u.s.w. Man kömmt hiebei zuletzt auf* $p+\frac{q_1}{a}=p_1$ *und* $\frac{p_1}{a}+1=0$.

Nr. 11. Alle Wurzeln einer Gleichung werden geändert, wenn man einen ihrer Coëfficienten ändert und alle Coëfficienten, wenn man eine Wurzel ändert.

Beweis. *Ist* w *eine Wurzel der Gleichung*
$$x^n+px^{n-1}+\ldots\ldots+Qx^m+\ldots\ldots+r=0,$$
welche bei Aenderung des Coëfficienten Q *in* Q_1 *ungeändert bliebe, so müsste für diese Wurzel sowohl* $w^n+pw^{n-1}+\ldots+Qw^m+\ldots+r=0$ *als auch* $w^n+pw^{n-1}+\ldots+Q_1w^m+\ldots+r=0$ *sein, hieraus also der, der Annahme widersprechende, Schluss* $Q_1=Q$ *folgen. Der zweite Theil der Behauptung ergiebt sich von selbst aus dem combinatorischen Bildungsgesetz der Coëfficienten einer Gleichung.*

Nr. 12. Wenn α, β, γ ...... die Wurzeln der Gleichung $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots+Qx+P=0$ sind, wem ist dann $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}+\ldots\ldots+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta}{\gamma}+\ldots\ldots+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\ldots\ldots$ gleich?

Antw. $=\frac{pQ-nP}{P}$.

Nr. 13. Wenn α, β, γ ...... die Wurzeln der Gleichung $x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-\ldots\ldots-Qx+R=0$ sind, wem ist dann $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\alpha^2}{\gamma}+\ldots\ldots+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\gamma}+\ldots\ldots+\frac{\gamma^2}{\alpha}+\frac{\gamma^2}{\beta}$ gleich?

Antw. $=(p^2-2q)\frac{Q}{R}-p$.

Nr. 14. Entferne aus folgenden Gleichungen das zweite Glied:

$x^3-9x^2+26x-34=0$

$x=y+3$ *giebt* $y^3-y-10=0$.

$x^3-3x^2+4x-5=0$

$x=y+1$ *giebt* $y^3+y-3=0$.

$x^4+24x^3-12x^2+4x-30=0$

$x=y-6$ *giebt* $y^4-228y^2+1876y-4374=0$.

$x^4+8x^3-x-10=0$

$x=y-2$ *giebt* $y^4-24y^2+63y-56=0$.

Nr. 15. Entferne aus folgenden Gleichungen das dritte Glied:

$x^3-6x^2+9x-20=0$

$x=y+3$ *giebt* $y^3+3y^2-20=0$,

$x=y+1$ *giebt* $y^3-3y^2-16=0$.

$x^3-4x^2+5x-2=0$

$x=y+\frac{5}{3}$ *giebt* $y^3+y^2-\frac{4}{27}=0$,

$x=y+1$ *giebt* $y^3-y^2=0$.

Nr. 16. Beweise, dass das dritte Glied der Gleichung

$$x^3-px^2+qx-r=0$$

durch die gewöhnliche Methode nicht entfernt werden kann, wenn $p^2<3q$ ist, und zeige, wie es in diesem Fall dennoch entfernt werden kann.

Beweis. $x=y+a$ *gesetzt giebt:*

$$y^3+(3a-p)y^2+(3a^2-2ap+q)y+a^3-a^2p+aq-r=0$$

und aus $3a^2-2ap+q=0$ *folgt* $a=\frac{p}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{p^2-3q}$, *welcher Werth nur für* $p^2 \overline{\overline{>}} 3q$ *reell wird. Ist aber* $p^2<3q$, *so setzt*

$x = \frac{3ry}{3r+qy}$, *so ergiebt sich nach der Substitution und Ordnung:* $y^3(27r^2 - 9pqr + 2q^3) - y^2(27pr^2 - 9q^2r) - 27r^3 = 0$. *Siehe die Begründung in Nr. 18.*

Nr. 17. Wann lassen sich aus einer Gleichung $n$ten Grades das zweite und dritte Glied durch eine und dieselbe Operation entfernen?

Antw. *Wenn* $n(p^2 - 2q) = p^2$ *ist, das heisst, wenn sich die Summe der Quadrate der Wurzeln zum Quadrat der Summe der Wurzeln wie* $1 : n$ *verhält.*

Nr. 18. Entferne aus einer Gleichung fünften Grades das vorletzte Glied durch Auflösen einer einfachen Gleichung.

Auflösung. *Ist* $x^5 - px^4 + qx^3 - rx^2 + sx - t = 0$ *die gegebene Gleichung, so stelle durch* $x = \frac{1}{v}$ *hiefür die Gleichung der reciproken Wurzeln her, eliminire aus der so erhaltenen Gleichung das zweite, mit* v^4 *behaftete Glied, indem* $v = z + a$ *gesetzt wird, ordne noch* z *und setze endlich noch* $z = \frac{1}{y}$, *so ist* $x = \frac{1}{\frac{1}{y} + a}$ *und man erhält als vorletztes Glied der Endgleichung* $(s - 5at)y$. *Seinen Coëfficienten* $= 0$ *gesetzt, folgt* $a = \frac{s}{5t}$ *und* $x = \frac{5ty}{sy + 5t}$.

Durch die gewöhnliche Methode lässt sich das vorletzte Glied einer Gleichung fünften Grades nur dann auf elementarem Wege entfernen, wenn sie eine der vier Formen:

$$x^5 - px^4 + qx^3 - 2px^2 + 5x - t = 0, \text{ oder}$$

$$x^5 - px^4 + \tfrac{2}{5}p^2x^3 - \tfrac{2}{25}p^3x^2 + \frac{p^4}{125}x - t = 0, \text{ oder}$$

$$x^5 - sx - t = 0, \text{ oder endlich } x^5 + qx^3 + sx - t = 0 \text{ hat.}$$

Im ersten Fall erhält man die reciproke Gleichung:

$$a^4 - \frac{4p}{5}a^3 + \frac{3q}{5}a^2 - \frac{4p}{5}a + 1 = 0,$$

im zweiten das biquadrirte Binom:

$$a^4 - 4a^3 . \frac{p}{5} + 6a^2 . \left(\frac{p}{5}\right)^2 - 4a . \left(\frac{p}{5}\right)^3 + \left(\frac{p}{5}\right)^4 = 0,$$

im dritten die rein biquadrische Gleichung: $a^4 - \frac{s}{5} = 0$,

und endlich im vierten Fall die elementar lösliche:

$$a^4 + \tfrac{3}{5}a^2q + \tfrac{1}{5}s = 0.$$

Nr. 19. Man ändere die Gleichung $x^3 - \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{n} + \frac{c}{p} = 0$ in eine solche um, deren Coëfficienten ganze Zahlen sind.

Antw. $x = \frac{y}{mnp}$ *giebt:* $y^3 - anpy^2 + bm^2np^2y + cm^2n^2p^2 = 0$.

Nr. 20. Verwandle die Gleichung $y^3 - 2py^2 - 33p^2y + 14p^3 = 0$ in eine solche, deren Coëfficienten reine Zahlen sind.

Antw. $y = px$ *giebt:* $x^3 - 2x^2 - 33x + 14 = 0$.

Nr. 21. Verwandle die Gleichung

$$x^n - a^{\frac{1}{2}}.px^{n-1} + qx^{n-2} - a^{\frac{1}{2}}.rx^{n-3} + \ldots\ldots = 0$$

in eine solche, die keine irrationalen Coëfficienten mehr enthält.

Antw. $x = a^{\frac{1}{2}}y$ *giebt:*

$$y^n - py^{n-1} + \frac{qy^{n-2}}{a} - \frac{ry^{n-3}}{a} + \frac{sy^{n-4}}{a^2} - \frac{ty^{n-5}}{a^2} + \ldots\ldots = 0.$$

Nr. 22. Verwandle die beiden folgenden Gleichungen in solche, die nur Abwechslungen der Zeichen haben.

$x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = 0$

$x = y - 1$ *giebt:* $y^3 - 4y^2 + \frac{13}{2}y - \frac{1}{2} = 0$.

$x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30 = 0$

$x = y - 5$ *giebt:* $y^4 - 19y^3 + 116y^2 - 224y = 0$.

Nr. 23. Verwandle die Gleichung $x^3 + x^2 - 10x + 4 = 0$ in eine solche, deren Wurzeln um 4 grösser sind als jene der gegebenen Gleichung.

Antw. $x = y - 4$ *giebt:* $y^3 - 11y^2 + 30y - 4 = 0$.

Nr. 24. Verwandle die Gleichung $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12 = 0$ in eine solche, deren Wurzeln um 5 grösser sind als jene der gegebenen Gleichung.

Antw. $x = y - 5$ *giebt:* $y^4 - 24y^3 + 216y^2 - 860y + 1263 = 0$.

Nr. 25. Verwandle die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 9x - 12 = 0$ in eine solche, deren Wurzeln um 6 kleiner sind als jene der gegebenen Gleichung.

Antw. $x = y + 6$ *giebt:* $y^3 + 12y^2 + 45y + 42 = 0$.

Nr. 26. Verwandle die Gleichung $3x^3 - 12x^2 + 15x - 21 = 0$ in eine solche, deren Wurzeln dreimal grösser sind als jene der gegebenen Gleichung.

Antw. $x = \frac{1}{3}y$ *giebt:* $y^3 - 12y^2 + 45y - 189 = 0$.

Nr. 27. Verwandle die Gleichung $x^4 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$ in eine solche, deren Wurzeln 8mal kleiner sind als jene der gegebenen Gleichung.

Antw. $x = 8y$ *giebt:* $y^4 - \frac{1}{32}y^2 - \frac{3}{512}y + \frac{1}{1024} = 0$.

Nr. 28. Verwandle die Gleichung $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots\ldots \pm S = 0$, deren Wurzeln a, b, c u. s. w. sind, in eine solche, deren Wurzeln ma, mb, mc u. s. w. sind.

Antw. $x = \frac{y}{m}$ *giebt:*

$$y^n - mpy^{n-1} + m^2qy^{n-2} - m^3ry^{n-3} + \ldots\ldots \pm Sm^n = 0.$$

Nr. 29. Verwandle die Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln $a+b$, $a+c$, $b+c$ sind.

Antw. $x = p - y$ *giebt:* $y^3 - 2py^2 + (p^2+q)y - pq + r = 0$.

Nr. 30. Verwandle die Gleichung $x^4 - 40x + 39 = 0$ in eine solche, deren Wurzeln die Summe je zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Antw. $y^6 - 156y^2 - 1600 = 0$ *folgt aus nachstehender allgemeiner Entwickelung:*

In der Gleichung $x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$ *das zweite Glied eliminirt, ergiebt sich:* $z^4 + (Q - \frac{3}{8}P^2)z^2 + (\frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{2}PQ + R)z + \frac{1}{16}P^2Q - \frac{3}{256}P^4 - \frac{1}{4}RP + S = 0$ *oder kürzer ausgedrückt* $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$. *Hat diese Gleichung die Wurzeln* z_1, z_2, z_3, z_4, *so setze* $w = z_1 + z_2$ *und wegen des Coëfficienten* 0 *des zweiten Gliedes* $z_3 + z_4 = -(z_1 + z_2) = -w$, *so wird* $p = z_1z_2 + z_3z_4 + (z_1+z_2)(z_3+z_4) = z_1z_2 + z_3z_4 - w^2$ *und*

$$z_1z_2 + z_3z_4 = p + w^2 \ldots\ldots \text{(I.)}$$

Ferner ist $q = -[z_1z_2(z_3+z_4) + z_3z_4(z_1+z_2)] = (z_1z_2 - z_3z_4)w$

$$\text{und } z_1z_2 - z_3z_4 = \frac{q}{w} \ldots\ldots \text{(II.)}$$

Die beiden Gleichungen I. und II. durch Quadriren und Subtrahiren verbunden, geben: $4z_1z_2z_3z_4 = 4r = (p+w^2)^2 - \frac{q^2}{w^2}$ *oder* $w^6 + 2pw^4 + (p^2 - 4r)w^2 - q^2 = 0$. *Hierein statt* p, q, r *obige Werthe wieder eingeführt, ergiebt sich die Gleichung:*

$$w^6 + (2Q - \tfrac{3}{4}P^2)w^4 + (Q^2 - P^2Q + \tfrac{3}{16}P^4 + PR - 4S)w^2 - \\ - (\tfrac{1}{8}P^3 - \tfrac{1}{2}PQ + R)^2 = 0$$

und hierein endlich $w = y + \frac{1}{2}P$ *gesetzt, ergiebt sich als Summen-Gleichung der ursprünglich gegebenen:*

$$y^6 + 3Py^5 + (3P^2 + 2Q)y^4 + (4PQ + P^3)y^3 + (2P^2Q + PR + Q^2 - 4S)y^2 \\ + (PQ^2 + P^2R - 4PS)y + PQR - R^2 - P^2S = 0.$$

Diese Coëfficienten lassen sich mit Zuhülfenahme der Newton'schen Sätze über die Summen der Wurzel-Potenzen und andere sym-

metrische Wurzelfunctionen auch direct aus jenen der ursprünglichen Gleichung bestimmen.

Ein weiteres Zahlenbeispiel ist $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, *das die Summen-Gleichung* $y^6 - 30y^5 + 370y^4 - 2400y^3 - 8629y^2 - 16290y + 12600 = 0$ *liefert. Vergl. Nr.* 103 *und* 118.

Nr. 31. Verwandle die Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$ sind.

Antw. $x = p - \frac{1}{y}$ *giebt:*

$$(pq-r)y^3 - (p^2+q)y^2 + 2py - 1 = 0.$$

Nr. 32. Verwandle die Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln ab, ac, bc sind.

Antw. $x = \frac{r}{y}$ *giebt:* $y^3 - qy^2 + pry - r^2 = 0$.

Nr. 33. Verwandle die Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ in eine solche, deren Wurzeln das geometrische, arithmetische oder harmonische Mittel zwischen einer gegebenen Grösse m und den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Antw.

$x = \frac{y^2}{m}$ *giebt für geometrische Mittel:*

$$y^6 - mpy^4 + m^2qy^2 - m^3r = 0;$$

$x = 2y - m$ *giebt für arithmetische Mittel:*

$$y^3 - \frac{p+3m}{2}y^2 + \frac{q+2mp+3m^2}{4}y - \frac{r+mq+m^2p+m^3}{8} = 0;$$

$x = \frac{my}{2m-y}$ *giebt für harmonische Mittel:*

$$(m^3 + m^2p + mq + r)y^3 - (2m^3p + 4m^2q + 6mr)y^2 + $$
$$+ (4m^3q + 12m^2r)y - 8m^3r = 0.$$

Nr. 34. Wenn a und b die Wurzeln der Gleichung $x^2 - px + q = 0$ sind, wie heisst die Gleichung, deren Wurzeln $-\sqrt{a}$ und $-\sqrt{b}$ sind?

Antw. $y^2 + y\sqrt{p + 2\sqrt{q}} + \sqrt{q} = 0$ *oder* $y^4 - py^2 + q = 0$.

Nr. 35. Wenn a und b die Wurzeln der Gleichung $x^2 - px + q = 0$ sind, wie heisst die Gleichung, deren Wurzeln das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel der beiden Wurzeln a und b sind?

Antw. $y^3-\left(\frac{p}{2}+\frac{2q}{p}+\sqrt{q}\right)y^2+\left(q+\frac{p}{2}\sqrt{q}+\frac{2q}{p}\sqrt{q}\right)y-$
$-q\sqrt{q}=0$ *oder*

$$y^4-\left(\frac{p}{2}+\frac{2q}{p}\right)y^3+\left(\frac{pq}{2}+\frac{2q^2}{p}\right)y-q^2=0,$$

je nachdem man als geometrisches Mittel $\sqrt{ab}$ *oder* $\pm\sqrt{ab}$ *annimmt.*

Nr. 36. Verwandle die Gleichung $x^3-2x^2+2x-4=0$ in eine solche, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der gegebenen sind.

Antw. $x=\sqrt{y}$ *giebt*: $y^3-12y-16=0$.

Nr. 37. Verwandle die Gleichung $x^3-px^2+qx-r=0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln a^2, b^2 c^2 sind.

Antw. $x=\sqrt{y}$ *giebt*: $y^3-(p^2-2q)y^2+(q^2-2pr)y-$
$-r^2=0$.

Nr. 38. Verwandle die Gleichung $x^3-px^2+qx-r=0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ sind.

Antw. $r^2y^3-(q^2-2pr)y^2+(p^2-2q)y-1=0$ *folgt aus der vorigen.*

Nr. 39. Verwandle die Gleichung $x^3-px^2+qx-r=0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln a^2+b^2, a^2+c^2, b^2+c^2 sind.

Antw. $x=\sqrt{p^2-2q-y}$ *giebt*: $y^3-(2p^2-4q)y^2+$
$+[(p^2-2q)^2+q^2-2rp]y-(q^2-2rp)(p^2-2q)+r^2=0$, *folgt auch aus Nr.* 37 *und* 29.

Nr. 40. Verwandle die Gleichung $x^3-px^2+qx-r=0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ sind.

Antw. $y^3-\frac{2q^2-4pr}{r^2}y^2+\frac{(q^2-2rp)^2+r^2(p^2-2q)}{r^4}y-$
$-\frac{(q^2-2pr)(p^2-2q)-r^2}{r^4}=0$, *folgt aus Nr.* 38 *und* 29.

Nr. 41. Man verwandle die Gleichung $x^3-px^2+qx-r=0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln $\frac{1}{a^2+b^2}$, $\frac{1}{a^2+c^2}$, $\frac{1}{b^2+c^2}$ sind, und wende dies auf das Zahlenbeispiel $x^3-6x^2+11x-6=0$ an.

Antw.
$$x = \sqrt{p^2 - 2q - \frac{1}{y}} \textit{ giebt: } [(q^2 - 2rp)(p^2 - 2q) - r^2]y^3 - \\ - [(p^2 - 2q)^2 + q^2 - 2rp]y^2 + (2p^2 - 4q)y - 1 = 0;$$
$$x = \sqrt{14 - \frac{1}{y}} \textit{ giebt: } y^3 - \tfrac{49}{130}y^2 + \tfrac{14}{325}y - \tfrac{1}{650} = 0.$$

Nr. 42. Verwandle die Gleichung $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ in eine solche, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der gegebenen sind, und beweise die Richtigkeit der Transformation aus den Wurzel-Werthen selbst.

Antw. *Die transformirte Gleichung ist selbst wieder* $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; *die Wurzeln sind:* $\frac{-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ *und* $\frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ *und zwar sind das eine Paar die Quadrate des andern Paars.*

Nr. 43. Man verwandle die Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a}$ und $\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$ sind.

Antw. $$y^3 - \frac{pq - 3r}{r}y^2 + \frac{q^3 - 5pqr + rp^3 + 3r^2}{r^2}y - \\ - \frac{(p^2 - 2q)(q^2 - 2pr) - r^2}{r^2} = 0$$ *folgt durch Elimination von* x *aus der gegebenen Gleichung und jener* $x^3 - (p^2 - 2q)x + ry = 0$ *oder durch directe Bildung der Coëfficienten.*

Nr. 44. Verwandle die Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln $\frac{c}{a + b - c}$, $\frac{b}{a + c - b}$ und $\frac{a}{b + c - a}$ sind.

Antw. $x = \frac{py}{1 + 2y}$ *giebt:*
$$(4pq - 8r - p^3)y^3 - (p^3 - 4pq + 12r)y^2 + (pq - 6r)y - r = 0.$$

Nr. 45. Man verwandle die Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln $a + b + ab$, $a + c + ac$ und $b + c + bc$ sind.

Antw. $$y^3 - (2p + q)y^2 + (p^2 + pq + q + 3r + rp)y - \\ - (p^2q + q^2 + rp + 2rq + r^2 - r) = 0$$ *folgt durch Elimination von* x *aus der gegebenen Gleichung und jener* $y = p - x + \frac{r}{x}$ oder *direct durch Bildung der Coëfficienten.*

Nr. 46. Man verwandle die Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, deren Wurzeln a, b, c sind, in eine solche, deren Wurzeln a^3, b^3, c^3 sind.

Antw. $x = \sqrt[3]{y}$ *giebt:*

$$y^3 - (p^3 - 3pq + 3r)y^2 + (q^3 - 3pqr + 3r^2)y - r^3 = 0.$$

Nr. 47. Man verwandle die Gleichung $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ in eine solche, deren Wurzeln die Kuben der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Antw. $y^3 - 5y^2 + 3y + 1 = 0.$

Nr. 48. Verwandle die Gleichung $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - , \ldots \mp Px^2 \pm Qx \mp R = 0$ in eine solche, deren Wurzeln die reciproken Werthe von je $n-1$ Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Antw. *Die Aufgabe ist unbestimmt gehalten. Bei der Annahme, die neuen Wurzeln seien von der Form* $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$, *ergiebt sich die neue Gleichung durch Substitution von* $x = p - \frac{1}{y}$ *in der gegebenen; bei der Annahme, die neuen Wurzeln seien von der Form* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$, *ergiebt sich die neue Gleichung durch Substitution von* $x = \frac{R}{Q-Ry}$ *in der gegebenen. Im ersten Fall ergiebt sich die Gleichung:*

$$y^n[p^n - p.p^{n-1} + q.p^{n-2} - r.p^{n-3} + \ldots] - y^{n-1}[n.p^{n-1} - (n-1).$$
$$.p.p^{n-2} + (n-2)q.p^{n-3} - (n-3).rp^{n-4} + \ldots\ldots] +$$
$$+ y^{n-2}\left(\frac{n(n-1)}{1.2}p^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}p.p^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}q.p^{n-4}\right.$$
$$\left. - \ldots\right) - y^{n-3}\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}p^{n-3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}p.p^{n-4}\right.$$
$$\left. + \ldots\right) + \ldots\ldots = 0;$$ *im zweiten Fall ergiebt sich die Gleichung:*

$$R^ny^n - R^{n-1}y^{n-1}(nQ-Q) + R^{n-2}y^{n-2}\left(\frac{n(n-1)}{1.2}Q^2 - (n-1)Q.Q + RP\right)$$
$$- R^{n-3}y^{n-3}\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}Q^3 - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}Q^2.Q + \right.$$
$$\left. + (n-2)PQR - SR^2\right) + \ldots\ldots = 0.$$

Nr. 49. Verwandle die Gleichung $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \ldots\ldots = 0$ in eine solche, deren *m*tes Glied einen bestimmten Coëfficienten hat.

Antw. *Für $x = y + a$ wird durch Substitution das* m^{te} *Glied der Gleichung:*

$$y^{n-m+1}\left(\frac{n(n-1)....(n-m+2)}{1.2.3....(m-1)}a^{m-1} - p\frac{(n-1)(n-2)....(n-m+2)}{1.2.3....(m-2)}a^{m-2}\right.$$
$$\left. + q\frac{(n-2)(n-3)....(n-m+2)}{1.2.3....(m-3)}a^{m-3} - ...... \mp (n-m+2)a \pm M\right)$$

$= C.y^{n-m+1}$, *aus welcher Gleichung sich dann der Werth von* a *bestimmen lässt.*

Nr. 50. Verwandle eine Gleichung in eine andere, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen sind, und zeige durch diese Transformation, wie die Anzahl imaginärer Wurzeln einer Gleichung vom fünften Grad bestimmt werden kann.

Auflösung. *Die Differenzen-Gleichung giebt zugleich auch die quadrirte Differenzen-Gleichung. Um erstere zu bestimmen, sei* $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + ... + Rx^2 + Qx + P = 0$ *die gegebene Gleichung und* w *eine ihrer Wurzeln, so dass auch die Gleichung stattfindet:* $w^n + pw^{n-1} + qw^{n-2} + rw^{n-3} + ... Rw^2 + Qw + P = 0$. *Aus* $y = x - w$ *folgt* $x = y + w$ *und diesen Werth in der gegebenen Gleichung substituirt, und geordnet, ergiebt sich:*

$$y^n + (nw + p)y^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}w^2 + (n-1)pw + q\right)y^{n-2} + ...$$
$$+ [nw^{n-1} + (n-1)pw^{n-2} + (n-2)qw^{n-3} + ... + 2Rw + Q]y +$$
$$+ [w^n + pw^{n-1} + qw^{n-2} + ... + Rw^2 + Qw + P] = 0.$$

Da das letzte Glied dieser Gleichung selbst gleich 0, *die übrigen Glieder aber durch* y *dividirbar sind, so erhält man die Gleichung:*

$$y^{n-1} + (nw + p)y^{n-2} + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}w^2 + (n-1)pw + q\right)y^{n-3} + ... = 0.$$

Eliminirt man aus dieser und der zweiten Gleichung die Hülfs-Unbekannte w, *so ergiebt sich die Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen der Wurzeln der ersten Gleichung sind. Da* n *Wurzeln* $n(n-1)$ *Wurzel-Differenzen geben, so ist die Differenzen-Gleichung vom* $n(n-1)^{ten}$ *Grad. Da die Differenzen die Formen* $a - b$, $b - a$, $b - c$, $c - b$ *u.s.w. haben, und* $(a - b)^2 = (b - a)^2$, *so folgt, dass die Coëfficienten der geraden Glieder* 0 *werden, dass die Gleichung die Form* $y^{2r} + C_1y^{2r-2} + C_2y^{2r-4} + C_3y^{2r-6} + ... = 0$ *annehmen wird, und dass sie für* $y^2 = z$ *die quadrirte Differenzen-Gleichung* $z^r + C_1z^{r-1} + C_2z^{r-2} + ... = 0$ *geben wird. — Wenn die Wurzeln einer gegebenen Gleichung*

sämmtlich reell sind, so kann die quadrirte Differenzen-Gleichung nur positive Wurzeln, also in ihren Zeichen nur Abwechslungen haben. Hat sie aber auch Zeichenfolgen, so deutet dies auf negative und imaginäre quadrirte Differenzen, also auf imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung hin, und zwar ist die Anzahl Paare dieser letztern ebenso gross als die Anzahl negativer Wurzeln der quadrirten Differenzen-Gleichung. Die von Waring berechneten Coëfficienten der quadrirten Differenzen-Gleichung $z^{10} - A'z^9 + B'z^8 - C'z^7 + D'z^6 - E'z^5 + F'z^4 - G'z^3 + H'z^2 - J'z + {}$ $+ K' = 0$ *für die Gleichung fünften Grades* $x^5 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$ *sind folgende:*

$$A' = -10B;\quad B' = 39B^2 + 10D;\quad C' = -80B^3 - 50BD - 25C^2;$$

$$D' = 95B^4 + 124B^2D - 95D^2 + 92BC^2 + 1200CE;$$

$$E' = -66B^5 + 360BD^2 - 169B^3D - 118B^2C^2 - 260C^2D - 625E^2 - 400BCE;$$

$$F' = -25B^6 + 40D^3 - 53C^4 + 52B^3C^2 - 522B^2D^2 + 194B^4D + 708BC^2D + 240B^2CE + 1750BE^2 - 950CDE;$$

$$G' = -4B^7 - 106B^5D + 80BD^3 + 308B^3D^2 + 102BC^4 + 7B^4C^2 - 570C^2D^2 - 612B^2C^2D - 700C^3E + 3750DE^2 - 2500B^2E^2 - 80B^3CE + 2150BCDE;$$

$$H' = 400D^4 - 360B^2D^3 - 15B^4D^2 + 24B^6D - 8B^5C^2 - 45B^2C^4 - 270C^4D + 140B^3C^2D + 960BC^2D^2 + 1875C^2E^2 + 1000CD^2E - 5000BDE^2 + 1750B^3E^2 + 40B^4CE + 600BC^3E - 1650B^2CDE;$$

$$J' = -36B^5D^2 + 224B^3D^3 - 320BD^4 - 4B^3C^4 - 27C^6 + 40C^2D^3 - 434B^2C^2D^2 + 24B^4C^2D + 198BC^4D - 5000D^2E^2 + 450C^3DE + 6250CE^3 - 675B^4E^2 + 3750B^2DE^2 - 3000BC^2E^2 - 60B^2C^3E - 200BCD^2E + 330B^3CDE;$$

$$K' = 3125E^4 - 3750BCE^3 + (2000BD^2 + 2250C^2D - 900B^3D + 825B^2C^2 + 108B^5)E^2 - (1600CD^3 - 560B^2CD^2 - 16B^3C^3 + 630BC^3D + 72B^4CD - 108C^5)E + 256D^5 - 128B^2D^4 + 144BC^2D^3 + 16B^4D^3 - 27C^4D^2 - 4B^3C^2D^2.$$

Die quadrirte Differenzen-Gleichung kann aber auch zum Erkennen gleicher Wurzeln verwendet werden. Wiederholt sich in der ursprünglichen Gleichung eine Wurzel einmal, so wird eine quadrirte Differenz 0, wiederholt sich eine Wurzel zweimal, so werden drei quadrirte Differenzen 0 u. s. f. So oft aber die quadrirte Differenzen-Gleichung die Wurzel 0 hat, so oft muss sie sich durch $z = 0$ *dividiren lassen, so viele ihrer Coëfficienten von hinten herein müssen also 0 sein. Verfolgt man diese Unter-*

suchungen weiter, so gelangt man zu den in Nr. 84 auf andere Weise gefundenen Resultaten. Siehe überdies Nr. 129.

Nr. 51. Bestimme die Wurzeln der Gleichung $x^4 - 4x^3\sqrt[4]{2} + 6x^2\sqrt{2} - 4x\sqrt[4]{8} + 2 = 0$.

Antw. *Die vier Wurzeln sind* $\sqrt[4]{2}$.

Nr. 52. Löse die Gleichung $x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0$, deren eine Wurzel die Form $\sqrt{a}$ hat.

Antw. *Die Vergleichung mit* $(x^2 - a)(x - b) = 0$ *giebt die Wurzeln* ± 2 *und* 3.

Nr. 53. Löse die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 6x + 8 = 0$, deren eine Wurzel $1 + \sqrt{3}$ ist.

Antw. *Die beiden andern Wurzeln sind:* $1 - \sqrt{3}$ *und* 4.

Nr. 54. Löse die Gleichung $x^3 - 11x^2 + 37x - 35 = 0$, deren eine Wurzel $3 + \sqrt{2}$ ist.

Antw. *Die beiden andern Wurzeln sind:* $3 - \sqrt{2}$ *und* 5.

Nr. 55. Löse die Gleichung $x^4 + x^3 - 8x^2 - 16x - 8 = 0$, deren eine Wurzel $1 - \sqrt{5}$ ist.

Antw. *Die andern Wurzeln sind:* $1 + \sqrt{5}$, -1 und -2.

Nr. 56. Löse die folgenden Gleichungen, deren jede zwei gleiche Wurzeln hat.

$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$.

Die Wurzeln sind: 2, 2, 3.

$x^3 + 8x^2 + 20x + 16 = 0$.

Die Wurzeln sind: -2, -2, -4.

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$.

Die Wurzeln sind: 2, 2, 1.

$x^3 - 5x^2 - 8x + 48 = 0$.

Die Wurzeln sind: 4, 4, -3.

$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$.

Die Wurzeln sind: 2, 2, -3.

$x^3 + \frac{10}{7}x^2 - \frac{4000}{9261} = 0$.

Die Wurzeln sind: $-\frac{20}{21}$, $-\frac{20}{21}$, $\frac{10}{21}$.

$x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16} = 0$.

Die Wurzeln sind: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{-2}}{2}$.

Die Auflösung kann stattfinden bei kubischen durch Vergleichung mit $(x - a)^2 . (x - b) = 0$, *bei biquadratischen durch Vergleichung mit* $(x - a)^2 . (x^2 - mx + n) = 0$, *oder bei beiden*

nach dem in Nr. 84 erörterten Verfahren, oder nach folgender Modification desselben:

Dort hat man $x^3-px^2+qx-r=0$ *und* $3x^2-2px+q=0$. *Aus beiden folgt* $px^2-2qx+3r=0$; *aus den beiden letztern* $(2p^2-6q)x+(pq-9r)=0$ *und* $(pq-9r)x-(2q^2-6pr)=0$; *hieraus* $x=\frac{pq-9r}{2p^2-6q}=\frac{2q^2-6pr}{pq-9r}$ *und zugleich die Bedingung* $(pq-9r)^2=4(q^2-3pr).(p^2-3q)$, *oder auch jene* $(pq+9r)^2=4(q^3+rp^3+27r^2)$. *Bei der biquadratischen Gleichung* $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ *hat man* $4x^3-3px^2+2qx-r=0$; *aus beiden folgt:* $px^3-2qx^2+3rx-4s=0$; *aus den beiden letzten wird:* $(3p^2-8q)x^2-(2pq-12r)x+(pr-16s)=0$ *und* $(pr-16s)x^2-(2qr-12ps)x+(3r^2-8qs)=0$. *Setzt man nun* $3p^2-8q=A$, $2pq-12r=B$, $pr-16s=C$ *und* $pr-16s=a$, $2qr-12ps=b$, $3r^2-8qs=c$, *so folgt weiter:* $(Ab-Ba)x-$ $-(Ac-Ca)=0$ *und* $(Ac-Ca)x-(Bc-Cb)=0$ *oder* $x=$ $=\frac{Ac-Ca}{Ab-Ba}=\frac{Bc-Cb}{Ac-Ca}$, *woraus zugleich die Relation* $(Ac-Ca)^2$ $=(Ab-Ba).(Bc-Cb)$ *folgt.*

Nr. 57. Löse die Gleichung $3x^5-10x^3+15x+8=0$, welche drei gleiche Wurzeln hat.

Antw. *Die Vergleichung mit* $(x-a)^3(x^2-bx+c)=0$ *liefert die Wurzeln:* 1, 1, 1, $\frac{-3\pm\sqrt{-\frac{5}{3}}}{2}$.

Nr. 58. Löse die Gleichung $x^4-14x^3+61x^2-84x+36=0$, deren Wurzeln die Form a, a, b, b haben.

Antw. *Die Vergleichung mit* $(x-a)^2(x-b)^2=0$ *liefert die Wurzeln* 1, 1, 6, 6 *und für* $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ *die Bedingung* $\sqrt{s}=\frac{r}{p}=\frac{1}{2}(q-\frac{1}{4}p^2)$.

Nr. 59. Löse die Gleichung $x^5-13x^4+67x^3-171x^2+$ $+216x-108=0$, deren Wurzeln die Form a, a, a, b, b haben.

Antw. *Die Vergleichung mit* $(x-a)^3(x-b)^2$ *liefert die Wurzeln* 3, 3, 3, 2, 2.

Nr. 60. Löse die Gleichung $x^6-2x^5+6x^4-8x^3+12x^2-$ $-8x+8=0$, welche gleiche Wurzeln hat.

Antw. *Die Wurzeln* $\pm\sqrt{-2}$, $\pm\sqrt{-2}$ *und* $1\pm\sqrt{-1}$ *ergeben sich durch Bestimmung des gemeinschaftlichen Theilers* $x^2+2=(x+\sqrt{-2}).(x-\sqrt{-2})$ *der gegebenen Gleichung und*

ihrer Ableitung $6x^5-10x^4+24x^3-24x^2+24x-8=0$ *nach Nr.* 84.

Nr. 61. Löse die Gleichung $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$, welche zwei Paar gleicher Wurzeln hat.

Antw. *Die Wurzeln sind* $=-\frac{p}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}-\frac{4r}{p}}=$ $=-\frac{p}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3p^2}{4}-2q}=-\frac{p}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{q-\frac{6r}{p}}$ *und folgen nach Nr.* 58; *man kann aber auch zur gegebenen Gleichung und zu ihrer Ableitung* $4x^3+3px^2+2qx+r=0$ *den gemeinschaftlichen quadratischen Factor* $x^2+\frac{12r-2pq}{8q-3p^2}x+\frac{16s-rp}{8q-3p^2}=0$ *suchen und auflösen.*

Nr. 62. Löse die folgenden Gleichungen, welche zwei Wurzeln von der Form $+a$ und $-a$ haben.

$4x^3-32x^2\quad x+8=0.$

Die Wurzeln sind: $\pm\frac{1}{2}$, 8.

$x^4-5x^3-5x^2+45x-36=0.$

Die Wurzeln sind: ± 3, 4 *und* 1.

$x^4+3x^3-7x^2-27x-18=0.$

Die Wurzeln sind: ± 3, -2, -1 *und* 1.

$x^4\mp x^3-11x^2\pm 9x+18=0.$

Die Wurzeln sind: ± 3, 2 *und* -1
oder ± 3, -2 *und* 1.

Die Lösungen ergeben sich durch Vergleichung mit $(x^2-a^2).(x-b)=0$ *oder mit* $(x^2-a^2).(x^2-bx+c)=0$. *Sie ergeben sich auch dadurch, dass man in den gegebenen Gleichungen die Zeichen der geraden Glieder ändert, also* $-x$ *statt* x *einsetzt, und nun für die gegebene und für die neu entstandene Gleichung den gemeinschaftlichen Theiler aufsucht, der von der Form* $x^2-a^2=0$ *sein wird. — Für eine Gleichung* $x^3\mp px^2-qx\pm r=0$ *erhält man die Bedingung* $pq=r$, *für eine solche* $x^4\mp px^3+qx^2\pm rx-s=0$ *aber* $r^2+pqr=p^2s$.

Nr. 63. Löse die Gleichung $x^5-10x^4+29x^3-10x^2-62x+60=0$, welche die zwei Wurzeln 3 und $\sqrt{2}$ hat.

Antw. *Die übrigen Wurzeln sind:* 2, 5 *und* $-\sqrt{2}$.

Nr. 64. Die Gleichung $x^3-15x^2+66x-80=0$ hat zwei Wurzeln, deren Summe 13 ist, man finde alle Wurzeln.

Antw. *Die Wurzeln sind* 2, 5, 8, *und ergeben sich durch*

Vergleichung mit $(x-a).(x^2-13x+bc)=0$ *oder indem man in der gegebenen Gleichung* $13-x$ *statt* x *einsetzt und nun für beide Gleichungen den gemeinschaftlichen Theiler* $x^2-13x+40=0$ *aufsucht.*

Nr. 65. Die Gleichung $x^4-45x^2-40x+84=0$ hat zwei Wurzeln, deren Differenz 3 ist; man bestimme alle Wurzeln.

Antw. *Die Wurzeln sind* -6, -2, 1 *und* 7, *und ergeben sich durch Vergleichung mit* $[x^2-bx+c].[(x-a)^2+3(x-a)]=0$ *oder nach folgendem Gang, der im Grunde nicht verschieden ist. Sind* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *die Wurzeln der gegebenen Gleichung, so folgen aus den Gleichungen* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ *und* $\alpha-\beta=3$ *die Werthe* $\alpha=\frac{3-(\gamma+\delta)}{2}$ *und* $\beta=\frac{-3-(\gamma+\delta)}{2}$; *durch Substitution dieser Werthe in die Gleichungen* $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=-45$, *dann* $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=40$ *und* $\alpha\beta\gamma\delta=84$ *ergeben sich dann wie beim ersten Verfahren die Gleichungen: I.* $3(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta=171$, *II.* $(\gamma+\delta)^3-9(\gamma+\delta)-4\gamma\delta(\gamma+\delta)=160$ *und III.* $(\gamma+\delta)^2\gamma\delta-9\gamma\delta=336$. *Aus I. und II. folgt dann weiter IV.* $(\gamma+\delta)(18-\gamma\delta)=60$, *und aus I. und III. folgt V.* $(\gamma\delta)^2+36\gamma\delta=252$. *Hieraus* $\gamma\delta=6$ *oder* $=-42$. *Da nun die Gleichungen I. bis V. sämmtlich coëxistiren müssen, so können von allen Werthen von* $\gamma\delta$ *und* $\gamma+\delta$ *nur jene* $\gamma\delta=-42$ *und* $\gamma+\delta=1$ *die richtigen sein, aus denen sich obige vier Wurzeln* 7, -6, 1 *und* -2 *ergeben.*

Nr. 66. Die Wurzeln der Gleichung $x^3-15x^2+66x-80=0$ haben eine gleiche Differenz; man bestimme dieselben.

Antw. *Die Wurzeln sind* 2, 5, 8 *und folgen aus der Vergleichung mit* $(x-a)^3-b^2(x-a)=0$, *welche die Wurzeln* $a+b$, a, $a-b$ *hat, und für die Gleichung* $x^3-px^2+qx-r=0$ *die Bedingung* $q=\frac{3r}{p}+\frac{2}{9}p^2$ *liefert, oder nach Nr. 76.*

Nr. 67. In der Gleichung $x^3-6x^2+11x-6=0$ ist eine Wurzel doppelt so gross als die andere; man bestimme sie alle drei.

Antw. *Die Wurzeln sind* 1, 2, 3 *und folgen aus der Vergleichung mit* $(x-b)(x^2-3ax+2a^2)=0$.

Nr. 68. Das Product zweier Wurzeln der Gleichung $x^4+x^3-62x^2-80x+1200=0$ beträgt 30; man bestimme alle Wurzeln.

Antw. *Die Wurzeln* 5, 6, $-6\pm2\sqrt{-1}$ *folgen aus der Vergleichung mit* $(x^2-ax+40).(x^2-bx+30)=0$, *oder indem*

man $\frac{30}{x}$ *statt* x *in die Gleichung einsetzt und für beide Gleichungen den gemeinschaftlichen Theiler* $x^2-11x+30=0$ *aufsucht.*

Nr. 69. Bestimme die Wurzeln der Gleichung x^3-17x^2+ $+94x-168=0$, deren zwei in dem Verhältniss von 2 : 3 stehen.

Antw. *Die Vergleichung mit* $(x^2-5ax+6a^2).(x-b)=0$ *giebt die Wurzeln* 4, 6, 7.

Nr. 70. In der Gleichung $x^3-10x^2+27x-18=0$ ist die grösste Wurzel doppelt so gross als die zweite, und die zweite dreimal so gross als die dritte. Man bestimme sie alle drei.

Antw. *Die Wurzeln sind* 6, 3, 1.

Nr. 71. Löse die Gleichung $x^4-5x^3-x+5=0$, deren eine Wurzel 5 ist.

Antw. *Die andern Wurzeln sind* 1, $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

Nr. 72. Die Gleichung $x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}x-1=0$ hat zwei Wurzeln von der Form a und $\frac{1}{a}$; man bestimme alle Wurzeln.

Antw. *Die Wurzeln sind* $\frac{1}{2}$, 1 *und* 2 *und folgen aus der Vergleichung mit* $(x-1).(x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1)=0$ *oder analog wie in Nr.* 95.

Nr. 73. Die Wurzeln der Gleichung $6x^4-43x^3+107x^2-$ $-108x+36=0$ haben die Form a, b, $\frac{b}{a}$ und $\frac{a}{b}$; man bestimme ihre Werthe.

Antw. *Die Wurzeln sind* 2, 3, $\frac{3}{2}$ *und* $\frac{2}{3}$ *und ergeben sich aus der Vergleichung mit* $[x^2-(a+b)x+ab].[x^2-\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)x+1]$ $=0$, *woraus auch für die Gleichung* $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ *die Bedingung* $(q-s-1).(s-1)^2=(sp-r)(r-p)$ *folgt.*

Nr. 74. Bestimme die Wurzeln der Gleichung x^4-10x^3+ $35x^2-50x+24=0$, wenn sie die Form $a\pm1$ und $b\pm1$ haben.

Antw. *Die Wurzeln sind* 1, 2, 3 *und* 4 *und folgen aus der Vergleichung mit* $[(x-a)^2-1].[(x-b)^2-1]=0$.

Nr. 75. Löse die folgenden Gleichungen, deren Wurzeln in arithmetischer Progression stehen.

$x^3-6x^2-4x+24=0.$

Die Wurzeln sind: -2, 2, 6.

$x^3-9x^2+23x-15=0.$

Die Wurzeln sind: 1, 3, 5.

$x^3-6x^2+11x-6=0.$

Die Wurzeln sind: 1, 2, 3.

$x^3-3x^2+6x+8=0.$

Die Wurzeln sind: 4, 1, —2.

$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0.$

Die Wurzeln sind: 1, 2, 3, 4.

$x^4-8x^3+14x^2+8x-15=0.$

Die Wurzeln sind: —1, 1, 3, 5.

$x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0.$

Die Wurzeln sind: —5, —2, 1, 4.

Die Auflösungen ergeben sich nach Nr. 66 oder Nr. 76.

Nr. 76. Wenn die Wurzeln der Gleichung $x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-\ldots\ldots=0$ in arithmetischer Progression stehen, wie heisst dann die kleinste Wurzel und die Differenz?

Antw. $a=\frac{p}{n}-\frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)3p^2-6nq}{n^2-1}}$ *und*

$$d=\frac{2}{n}\sqrt{\frac{(n-1)3p^2-6nq}{n^2-1}}.$$

Die Summe der Reihe $=p$, *die Summe der Quadrate ihrer Glieder* $=p^2-2q$, *das Uebrige nach Nr. 43 der arithmetischen Progressionen.*

Nr. 77. Löse die folgenden Gleichungen, deren Wurzeln in geometrischer Progression stehen.

$x^3-7x^2+14x-8=0.$

Die Wurzeln sind: 1, 2, 4.

$x^3-13x^2+39x-27=0.$

Die Wurzeln sind: 1, 3, 9.

$x^3-14x^2+56x-64=0.$

Die Wurzeln sind: 2, 4, 8.

$x^3-26x^2+156x-216=0.$

Die Wurzeln sind: 2, 6, 18.

$x^3-px^2+qx-r=0.$

Die Wurzeln sind:

$$\frac{p}{2}-\frac{q}{2p}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(p-\frac{q}{p}\right)^2-\frac{4pq}{r}} \text{ und } \frac{q}{p}=\sqrt[3]{r}.$$

$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0.$

Die Wurzeln sind: ae^3, ae, $\frac{a}{e}$, $\frac{a}{e^3}$, *worin*

$$a = \pm\sqrt{\frac{r}{p}} = \pm\sqrt[4]{s} \text{ und}$$

$$e = \frac{-p \pm \sqrt{p^2+8a^2-4q} + \sqrt{2p^2-8a^2-4q \mp 2p\sqrt{p^2+8a^2-4q}}}{4a} \quad \text{oder:}$$

$$= \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{pq}{r}+\frac{1}{4}}} + \sqrt{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{pq}{r}+\frac{1}{4}}}\right) \text{ und}$$

$$\frac{1}{e} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{pq}{r}+\frac{1}{4}}} - \sqrt{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{pq}{r}+\frac{1}{4}}}\right).$$

Nr. 78. Wenn die Wurzeln der Gleichung $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \ldots\ldots = 0$ in geometrischer Progression stehen und $p = 15$, $q = 70$ ist, so finde man n, e u.s.w. und die Wurzeln selbst.

Antw. *Die Aufgabe ist unbestimmt, giebt aber für $n = 4$, die Werthe $a = 1$, $e = 2$ und die Wurzeln 1, 2, 4, 8.*

Nr. 79. Löse folgende Gleichungen, deren Wurzeln in harmonischer Progression stehen.

$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0.$

Die Wurzeln sind: 2, 3, 6.

$x^3 - 13x^2 + 54x - 72 = 0.$

Die Wurzeln sind 3, 4, 6.

$x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} = 0.$

Die Wurzeln sind: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

$8x^3 - 6x^2 - 3x + 1 = 0.$

Die Wurzeln sind: $-\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{4}$.

$x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{9}{24}x - \frac{1}{24} = 0.$

Die Wurzeln sind: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

$ax^3 - bx^2 - cx + 1 = 0.$

Die Wurzeln sind $\frac{3}{c}$ *und* $\frac{-c^2 \pm \sqrt{c^4+27ac}}{9a}$.

Die Lösungen ergeben sich durch Vergleichung mit $(x-a)(x-b)\left(x - \frac{2ab}{a+b}\right) = 0$, *woraus sich auch für* $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ *die Bedingung* $p = \frac{2q^2}{9r} + \frac{3r}{q}$ *ergiebt.*

Nr. 80. Wenn in der gewöhnlichen kubischen Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ die Wurzeln in harmonischer Progression stehen, und p, q, r ganze Zahlen sind, so ist r das Quadrat der grössten Wurzel. Wende dies auf $x^3 - 23x^2 + 135x - 225 = 0$ an.

Antw. *Der Satz ist nur dann richtig, wenn die Wurzeln die Form a, $2a - 1$ und $a(2a-1)$ haben, in welchem Fall die*

Relation: $q(2p-1) = 3r\left(\frac{3r}{q}+4\right)$ *stattfinden muss. Die Wurzeln obiger Zahlengleichung sind* $\sqrt{r} = 15$, $\frac{q}{3\sqrt{r}} = 3$ *und* $\frac{3r}{q} = 5$.

Nr. 81. Wenn die Wurzeln der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ in harmonischer Progression stehen, so bestimme man jene quadratische Gleichung, welche die Werthe der grössten und kleinsten Wurzel giebt.

Antw. $x^2 - \frac{2q^2}{9r}x + \frac{q}{3} = 0$ *oder* $x^2 - \frac{pq-3r}{q}x + \frac{q}{3} = 0$.

Nr. 82. Wenn die Wurzeln der Gleichung $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \ldots\ldots + Qx^2 - Px + L = 0$ in harmonischer Progression stehen, wie heissen dann die grösste und kleinste Wurzel?

Antw. $$x_1 = \frac{nL\sqrt{n+1}}{P\sqrt{n+1} - \sqrt{3P^2(n-1)^2 - 6n(n-1)QL}},$$

$$x_n = \frac{nL\sqrt{n+1}}{P\sqrt{n+1} + \sqrt{3P^2(n-1)^2 - 6n(n-1)QL}}.$$

Zur Auflösung bestimme erst die Gleichung der reciproken Wurzeln, die dann in arithmetischer Progression stehen; die grösste und kleinste Wurzel dieser letzten Gleichung ergeben sich nach Nr. 76, und hieraus die gesuchten von selbst.

Nr. 83. Löse die Gleichung $x^3 - 31x^2 + 300x - 900 = 0$, deren Wurzeln drei auf einander folgende Dreieckszahlen sind.

Antw. *Die Wurzeln sind:* $\frac{n(n-1)}{2} = 6$, $\frac{n(n+1)}{2} = 10$ und $\frac{(n+1)(n+2)}{2} = 15$; *die bedingende Relation für* $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ ist $3q = (p-1)^2 = \frac{27r}{p-4}$.

Nr. 84. Erkläre die Methode, die gleichen Wurzeln einer Gleichung zu finden, und wende sie auf folgende zwei Gleichungen, nämlich $x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0$ und $x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0$ an.

Antw. *Hat die Gleichung* $X = x^n - px^{n-1} + px^{n-2} - rx^{n-3} + \ldots\ldots = 0$ *gleiche Wurzeln, so lässt sie sich in der Form* $X = (x-a)^m.(x-b)^t.(x-c)^s\ldots\ldots(x-g).(x-h) = 0$ *anschreiben, worin* a, b, c, ... g, h *die Wurzeln sind. Dividirt man nun die Function* X *in ihrer zweiten Form durch jeden ihrer Wurzelfactoren, und addirt man die Resultate, so erhält man die Summe:*

$$
\begin{aligned}
& m(x-a)^{m-1}.(x-b)^t.(x-c)^s \ldots\ldots (x-g).(x-h) \\
+ & \, t(x-a)^m.(x-b)^{t-1}.(x-c)^s \ldots\ldots (x-g).(x-h) \\
+ & \, s(x-a)^m.(x-b)^t.(x-c)^{s-1} \ldots\ldots (x-g).(x-h) \\
& \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
+ & \, (x-a)^m.\,(x-b)^t.\,(x-c)^s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x-h) \\
+ & \, (x-a)^m.\,(x-b)^t.\,(x-c)^s \ldots\ldots (x-g),
\end{aligned}
$$

also eine Summe, deren Glieder sämmtlich den gemeinschaftlichen Factor $(x-a)^{m-1}.(x-b)^{t-1}.(x-c)^{s-1}$ *haben. Wenn man aber die Function X in ihrer ersten Form wirklich durch einen ihrer Wurzelfactoren, z. B. durch* $x-w$ *dividirt, so erhält man den Quotienten* $x^{n-1}-(p-w)x^{n-2}+(q-wp+w^2)x^{n-3}-(r-wq+w^2p-w^3)x^{n-4}+\ldots=0$. *Stellt man nun alle diese Quotienten für die n Wurzeln der Gleichung her, und addirt man dieselben unter Berücksichtigung der Sätze über symmetrische Functionen der Wurzeln oder kürzer, substituirt man in dem eben gefundenen Quotienten x statt w, so erhält man den unter dem Namen der ersten Ableitung der ursprünglichen Function X wohlbekannten und gewöhnlich mit* X' *oder* X_1 *oder* dX *bezeichneten Ausdruck* $nx^{n-1}-p(n-1)x^{n-2}+q(n-2)x^{n-3}-\ldots\ldots$, *dessen Bildungsgesetz in die Augen springend ist. Da nun dieser letzte Ausdruck nach obigem den Factor* $(x-a)^{m-1}(x-b)^{t-1}(x-c)^{s-1}$ *hat, so folgt, dass wenn die Gleichung* $X=0$ *eine Wurzel mehrmals besitzt, ihre Ableitung* $dX=0$ *dieselbe Wurzel einmal seltener besitzt, was sich auch folgendermassen ergiebt. Ist* $X=\varphi(x).\psi(x)=(x-a)^m.\psi(x)$, *so ist*

$$
\begin{aligned}
dX &= \varphi(x).d\psi(x)+\psi(x).d\varphi(x) = \\
&= (x-a)^m.d\psi(x)+\psi(x).m(x-a)^{m-1} \\
&= (x-a)^{m-1}[(x-a)\,d\psi(x)+m\psi(x)].
\end{aligned}
$$

Hienach ergiebt sich für Bestimmung der vielfachen Wurzeln einer Gleichung die folgende Regel: Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Gleichung, suche zu beiden Functionen den grössten gemeinschaftlichen Theiler, so enthält derselbe jede der gleichen oder vielfachen Wurzeln der gegebenen Gleichung um einmal seltener als diese. Hat die Zerlegung dieses gemeinschaftlichen Theilers in seine Factoren Schwierigkeiten, so kann man sich in vielen Fällen dadurch helfen, dass man die eben gegebene Regel auf die erste Ableitung oder auf den Theiler selbst anwendet, wodurch man Gleichungen niedrigerer Grade erhält. Wenn man die gegebene Gleichung mit dem ersten gemeinschaftlichen Theiler divi-

dirt, so erhält man eine Gleichung, aus welcher alle vielfachen Wurzeln abgeschieden sind, also nur mehr verschiedene enthält. Die erste der oben angeführten Zahlen-Gleichungen hat die erste Ableitung $4x^3-18x+4=0$ *und mit dieser den gemeinschaftlichen Theiler* $x-2$, *also enthält sie zweimal die Wurzel* 2, *ausserdem noch jene* -1 *und* -3; *die zweite Gleichung aber hat die erste Ableitung* $5x^4-52x^3+201x^2-342x+216=dX$ *und damit den gemeinschaftlichen Theiler* $x^3-8x^2+21x-18=T$. *Da nun dieser die Ableitung* $3x^2-16x+21=dT$ *und hiermit den gemeinschaftlichen Theiler* $x-3$ *hat, so folgt, dass er sich auf die Form* $T=(x-3)^2.(x-2)$ *bringen lasse, dass also die ursprüngliche Gleichung X dreimal die Wurzel* 3 *und zweimal die Wurzel* 2 *enthalte. Ebenso hätte die erste Ableitung dX der gegebenen Gleichung selbst wieder die Ableitung* $d(dX)=2(10x^3-78x^2+201x-171)$ *und damit den gemeinschaftlichen Theiler* $x-3$, *woraus hervorgeht, dass dX zweimal, X aber dreimal die Wurzel* 3 *enthalte. Auch hätte man zum Theiler* $T=x^3-8x^2+21x-18$ *und zur zweiten Ableitung* $20x^3-156x^2+402x-342$ *abermals den gemeinschaftlichen Theiler* $x-3$ *suchen können, woraus sich dann ebenfalls die übrigen Factoren von T und X leicht ergeben. — Siehe überdies Nr.* 50 *und* 56, 90 *und* 91.

Nr. 85. Bestimme, ob die Gleichung $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0$ gleiche Wurzeln habe.

Antw. *Die Wurzeln sind:* 3, 3, $\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

Nr. 86. Wenn die Gleichung $x^5+qx^3-rx^2-t=0$ zwei Paar gleicher Wurzeln hat, so bestimme man jene quadratische Gleichung, die eine dieser Wurzeln enthält.

Antw. $x^2+\frac{2q^2}{5r}x+\frac{5t}{3r}-\frac{4q}{15}=0$ *ergiebt sich, wenn man die gegebene Gleichung mit ihrer Ableitung dividirt und den Rest* $=0$ *setzt.*

Nr. 87. Wenn $x^3-px^2+qx-r=0$ die Wurzeln a, b, c, und $x^3-p_1x^2+q_1x-r_1=0$ die Wurzeln a, b, d hat, so bestimme man c und d.

Antw. $c=\frac{r(p-p_1)}{r-r_1}$ *und* $d=\frac{r_1(p-p_1)}{r-r_1}$ *und die beiden Wurzeln a und b sind in* $x^2-\frac{q_1-q}{p_1-p}x+\frac{r_1-r}{p_1-p}=0$ *enthalten.*

Nr. 88. Wenn die beiden Gleichungen $x^3-9x^2+26x-24=0$ und $x^3-7x^2+7x+15=0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so finde man alle Wurzeln.

Antw. *Die erste Gleichung hat die Wurzeln* 2, 3, 4; *die letztere* 3, 5, -1. *Die gleiche Wurzel bestimmt sich durch Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers der beiden Functionen.*

Nr. 89. Man bestimme die Wurzeln der beiden Gleichungen $x^3-3x^2+11x-9=0$ und $x^3-5x^2+11x-7=0$, welche eine gemeinschaftliche Wurzel haben.

Antw. *Die erste hat die Wurzeln* 1, $1\pm2\sqrt{-2}$,
„ *letztere* „ „ „ 1, $2\pm\sqrt{-3}$.

Nr. 90. Wenn man eine Gleichung, welche zwei gleiche Wurzeln hat, gliederweise mit den Gliedern einer arithmetischen Progression multiplicirt, so ist das Resultat (nach vorhergegangener Einsetzung jener gleichen Wurzel) gleich 0.

Beweis. *Ist* $X=x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-\ldots\ldots\mp Qx^2\pm Rx\mp T=0$ *und werden die Glieder einzeln mit jenen* $(a\pm ng)$, $[a\pm(n-1)g]$, $[a\pm(n-2)g]$, ... $a\pm2g$, $a\pm g$, a *multiplicirt, so erhält man:*

$$Y=(a\pm ng)x^n-[a\pm(n-1)g]px^{n-1}+\ldots\ldots\mp(a\pm2g)Qx^2\pm$$
$$\pm(a\pm g)Rx\mp aT$$
$$=aX\pm gx[nx^{n-1}-(n-1)px^{n-2}+q(n-2)x^{n-3}-\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp2Qx\pm R]=aX\pm gx\,.\,X_1.$$

Der eingeklammerte Ausdruck $X_1=nx^{n-1}-(n-1)px^{n-2}+\ldots\ldots$ *ist aber die erste Ableitung der gegebenen Function* X *und enthält jene Wurzel* $x=w$ *einmal, welche* X *selbst zweimal enthält. Setzt man also in* $Y=aX\pm gxX_1$ *die Wurzel* $x=w$ *ein, so werden die einzelnen Summanden, also auch* Y *selbst* $=0$, *d. h.* w *ist auch eine Wurzel von* $Y=0$.

Nr. 91. Wenn man eine Gleichung, die n gleiche Wurzeln hat, gliederweise mit den Gliedern einer arithmetischen Progression multiplicirt, so hat die neu entstandene Gleichung $n-1$ gleiche Wurzeln.

Beweis *folgt aus dem vorigen und aus Nr.* 84, *indem, wenn* X *den Factor* $(x-w)^n$ *hat, die Ableitung* X_1 *jenen* $(x-w)^{n-1}$ *hat, also auch* Y *diesen Factor besitzt. Er lässt sich aber auch umgekehrt auf folgende Art führen, worin der Kürze halber bloss die natürliche Zahlen-Reihe benützt werden soll. Hat man erst die Binomial-Reihe:*

$$(x-w)^n = x^n - nx^{n-1}w + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}w^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}w^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}w^4 - \ldots\ldots$$

und multiplicirt man sie gliederweise mit den Gliedern der Reihe 0, 1, 2, 3, 4, *so erhält man:*

$$y = -nx^{n-1}w + n(n-1)x^{n-2}w^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}w^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}x^{n-4}w^4 - \ldots\ldots$$

$$= -nw\left(x^{n-1} - (n-1)x^{n-2}w + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}w^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}x^{n-4}w^3 + \ldots\ldots\right)$$

$= -nw(x-w)^{n-1}$. *Daraus folgt nun, dass, wenn man die Binomial-Reihe mit* a, $a \pm g$, $a \pm 2g$, $a \pm 3g \ldots\ldots$ *multiplicirt, man im Grunde die Sache nicht ändert; man erhält dann eben* $z = a(x-w)^n \mp ngw(x-w)^{n-1} = (x-w)^{n-1}[a(x-w) \mp ngw]$. *Ist uns nun* $X = x^m - px^{m-1} + qx^{m-2} - rx^{m-3} + \ldots\ldots = (x-w)^n.(x^{m-n} - ax^{m-n-1} + bx^{m-n-2} - \ldots\ldots) = 0$ *gegeben, und soll man die Glieder dieser Gleichung gliederweise mit jenen* 0, 1, 2, 3, 4 …… *multipliciren, so kann dies auch in folgender Anordnung geschehen, in welcher nach horizontaler Ausmultiplicirung die Verticalcolonnen mit denselben Potenzen von* x *behaftet sind:*

$$\begin{array}{llllll}
 & x^m - px^{m-1} & +qx^{m-2} & -rx^{m-3} & +sx^{m-4}\ldots\ldots\ldots \\
 & 0 \quad\; 1 & 2 & 3 & 4 \\
x^{m-n}(x-w)^n = & x^{m-n}\Big[x^n - nx^{n-1}w & +\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}w^2 & -\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}w^3 & +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}w^4 - \ldots\Big] \\
-ax^{m-n-1}(x-w)^n = & -ax^{m-n-1}\Big[x^n & -nx^{n-1}w & +\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}w^2 & -\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}w^3 + \ldots\Big] \\
+bx^{m-n-2}(x-w)^n = & +bx^{m-n-2}\Big[\;. & x^n & -nx^{n-1}w & +\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}w^2 - \ldots\Big] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Wie man sieht, ist dies eben dasselbe, als ob man die Glieder der ersten Horizontalreihe mit 0, 1, 2, 3, ……, *jene der zweiten mit* 1, 2, 3, 4, ……, *jene der dritten mit* 2, 3, 4, 5, …… *u. s. w. multiplicirt und die Producte addirt, man erhält hierdurch als Resultat:*

$$Z = [x^{m-n}(x-w)^{n-1}(-nw)] - [ax^{m-n-1}(x-w)^{n-1}((x-w)-nw)] + [bx^{m-n-2}(x-w)^{n-1}(2(x-w)-nw)] - \ldots\ldots$$

also ein Product, das den Factor $(x-w)^{n-1}$ *enthält. Wenn also eine Gleichung:*

$x^m - px^{m-1} + qx^{m-2} - rx^{m-3} + sx^{m-4} \ldots\ldots = 0$ *eine Wurzel n mal enthält, so enthält die Gleichung*

$1.px^{m-1} - 2.qx^{m-2} + 3.rx^{m-3} - 4.sx^{m-4} \ldots\ldots = 0$ *dieselbe Wurzel n—1mal, ebenso die Gleichung*

$1.2.qx^{m-2} - 2.3.rx^{m-3} + 3.4.sx^{m-4} - \ldots\ldots = 0$ *dieselbe Wurzel n—2mal, ebenso die Gleichung*

$1.2.3.rx^{m-3} - 2.3.4.sx^{m-4} + \ldots\ldots = 0$ *dieselbe Wurzel n—3mal, und so fort.*

Aus diesen Entwickelungen ergeben sich dann auch jene für die Multiplication mit $a \pm 0.g$, $a \pm 1.g$, $a \pm 2.g$, $a \pm 3.g$ *u.s.w.*

Nr. 92. Löse die Gleichung $x^3 - 1 = 0$, und zeige, dass ihre Wurzeln von der Form a, b, b^{-1} sind.

Antw. *Die Wurzeln sind*

$$1 \text{ und } \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{2}{-1 \mp \sqrt{-3}}.$$

Nr. 93. Die Wurzeln der Gleichung $x^4 + px^2 + 1 = 0$ müssen von der Form a, b, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ sein; man zeige sie in dieser Gestalt.

Antw. *Die Wurzeln sind:*

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{2-p} \pm \sqrt{2+p}.\sqrt{-1}) = \frac{2}{\sqrt{2-p} \mp \sqrt{2+p}.\sqrt{-1}}$$

$$\text{und } \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2-p} \pm \sqrt{2+p}.\sqrt{-1}) = \frac{2}{-\sqrt{2-p} \mp \sqrt{2+p}.\sqrt{-1}}.$$

Nr. 94. Löse die folgenden reciproken oder recurrenten Gleichungen:

$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0.$

Die Wurzeln sind: $\pm\sqrt{-1}$ *und* $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$x^4 + 6ax^3 - 2a^2x^2 - 6a^3x + a^4 = 0.$

Die Wurzeln sind: $\pm a$ *und* $(-3 \pm \sqrt{10})a$.

$x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0.$

Die Wurzeln sind: 2, $\frac{1}{2}$ *und* $\pm\sqrt{-1}$.

$x^4 \pm 1 = 0.$

Die Wurzeln sind: $\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$ *und* $\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$

oder ± 1 *und* $\pm\sqrt{-1}$.

$x^5 - 21x^4 + 37x^3 - 37x^2 + 21x - 1 = 0.$

Die Wurzeln sind: $\frac{1}{2}\left[10+\sqrt{85}\pm\sqrt{181+20\sqrt{85}}\right]$,

1 *und* $\frac{1}{2}\left[10-\sqrt{85}\pm\sqrt{181-20\sqrt{85}}\right]$.

$x^5 - \frac{15}{2}x^4 + \frac{37}{2}x^3 - \frac{37}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 1 = 0.$

Die Wurzeln sind: $\frac{1}{2}$, 1, 2, $2\pm\sqrt{3}$.

$x^5 + 4ax^4 - 12a^2x^3 - 12a^3x^2 + 4a^4x + a^5 = 0.$

Die Wurzeln sind: $\frac{1}{4}a(-3+\sqrt{77}\pm\sqrt{70-6\sqrt{77}})$,

$-a$ *und* $\frac{1}{4}a(-3-\sqrt{77}\pm\sqrt{70+6\sqrt{77}})$.

$x^{12} - a^{12} = 0.$

Die Wurzeln sind: $\pm a$, $\pm a\sqrt{-1}$, $\pm\frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{-3})$ *und*

$\pm\frac{1}{2}a(\sqrt{3}\pm\sqrt{-1})$.

Nr. 95. Reducire die Gleichung $x^9 - px^8 + qx^7 - rx^6 + sx^5 - sx^4 + rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$ auf eine solche vom vierten Grade.

Antw. $y^4 - (p-1)y^3 + (q-p-3)y^2 - (r-q-2p+2)y + s - r - q + p + 1 = 0$, *deren vier Wurzeln* y_1, y_2, y_3, y_4 *die vier Werthe von* $x + \frac{1}{x}$, *oder was dasselbe ist, die Coëfficienten der vier quadratischen Factoren:* $(x^2 - y_1x + 1).(x^2 - y_2x + 1).(x^2 - y_3x + 1).(x^2 - y_4x + 1) = 0$ *sind.*

Nr. 96. Wenn eine reciproke Gleichung $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \ldots\ldots = 0$ die Wurzeln a, b, c, ... hat, wem ist die Summe $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \ldots\ldots + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} + \ldots\ldots + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \ldots\ldots$ gleich?

Antw. $S = (p^2 - 2q + \sqrt{n}).(p^2 - 2q - \sqrt{n})$.

Nr. 97. Zeige die quadratischen Factoren von $x^m \pm 1 = 0$.

Antw. *Die Factoren von* $x^m - 1$ *sind, wenn* m *gerade ist:*

$$x^m - 1 = (x^2-1).\left(x^2 - 2x.\cos\frac{2}{m}\pi + 1\right).\left(x^2 - 2x.\cos\frac{4}{m}\pi + 1\right)$$

$$\ldots\ldots\left(x^2 - 2x.\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1\right) = 0,$$

und wenn m *ungerade ist:*

$$x^m - 1 = (x-1).\left(x^2 - 2x.\cos\frac{2}{m}\pi + 1\right).\left(x^2 - 2x.\cos\frac{4}{m}\pi + 1\right)$$

$$\ldots\ldots\left(x^2 - 2x.\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1\right) = 0.$$

Die Factoren von x^m+1 sind, wenn m gerade ist:

$$x^m+1 = \left(x^2-2x.\cos\frac{1}{m}\pi+1\right).\left(x^2-2x.\cos\frac{3}{m}\pi+1\right)\ldots\ldots$$
$$\left(x^2-2x.\cos\frac{m-1}{m}\pi+1\right) = 0,$$

und wenn m ungerade ist:

$$x^m+1 = (x+1).\left(x^2-2x.\cos\frac{1}{m}\pi+1\right).\left(x^2-2x.\cos\frac{3}{m}\pi+1\right)\ldots$$
$$\left(x^2-2x.\cos\frac{m-2}{m}\pi+1\right) = 0.$$

Nr. 98. Wenn m eine Primzahl ist, so sind die reellen und imaginären Wurzeln der Gleichung $x^m-1=0$ verschiedene Potenzen irgend einer Wurzel.

Beweis. *Ist α eine der Wurzeln von $x^m-1=0$, so ist sowohl $\alpha^m=1$ als auch $\alpha^{\pm mp}=1$; es wird daher die Gleichung $x^m-1=0$ sowohl durch $x=\alpha$ als auch durch $x=\alpha^{\pm p}$ genügt, welchen ganzen positiven oder negativen Werth p auch haben mag. Da sich aber in jenem Fall, wo p positiv und $>m$ ist, α^p auf die Form $\alpha^p=\alpha^{mq+r}=\alpha^{mq}.\alpha^r=1.\alpha^r=\alpha^r$ und in jenem Fall, wo p negativ ist, auf die Form $\alpha^{-p}=\alpha^{mq-p}$ bringen lässt, so folgt, dass sich in der allgemeinen Reihe α^{-2}, α^{-1}, α^0, α^1, α^2, ... die Periode α^1, α^2, α^3, ... α^m immer wiederholen müsse. Wenn nun zwei dieser Glieder gleich sein müssten, so müsste $\alpha^p=\alpha^q$ sein; dies ist aber nur möglich, wenn entweder $p=q$ oder wenn α eine Wurzel von $x^{p-q}-1=0$ ist. In diesem letztern Fall müssten x^m-1 und $x^{p-q}-1$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben, der eben den Werth von α ergäbe. Die Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers dieser Functionen führt aber auf die Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers von m und $p-q$. Ist m eine Primzahl, so ist dieser Theiler 1, also der gemeinschaftliche Theiler obiger Functionen $x-1$. Da also nur $\alpha=1$ der Gleichung $\alpha^p=\alpha^q$ für verschiedene Werthe von p und q genügen könnte, so sind die Glieder der Periode α^1, α^2, ... α^m sämmtlich verschieden, und eine einzige imaginäre Wurzel α giebt durch ihre verschiedenen Potenzen die verschiedenen andern Wurzeln.*

Nr. 99. Die Wurzeln der Gleichung $x^3-qx+r=0$ sind reell, wenn $\frac{q^3}{27}>\frac{r^2}{4}$ ist.

Beweis. *Hat die Gleichung wirklich drei reelle Wurzeln* a, b, c, *so folgt unmittelbar:* $a+b=-c$, $ab+c(a+b)=ab-c^2$ $=-q$ *oder* $c^2=ab+q$ *und* $abc=-r$ *oder* $ab=-\frac{r}{c}$; *da nun aber* $\frac{(a+b)^2}{4}>ab$, *so folgt auch* $\frac{c^2}{4}>ab$ *und daher aus* c^2 $=ab+q$ *auch weiter* $c^2<\frac{1}{4}c^2+q$ *oder* $\frac{3}{4}c^2<q$ *oder* $\frac{64}{27}q^3>c^6$. *Aus* $ab=-\frac{r}{c}$ *und* $\frac{c^2}{4}>ab$ *folgt aber auch* $\frac{c^2}{4}>-\frac{r}{c}$ *oder* $c^6>16r^2$ *und aus den beiden Ungleichheiten von* c^6 *endlich die Bedingung* $\frac{64}{27}q^3>16r^2$ *oder* $\frac{q^3}{27}>\frac{r^2}{4}$. *Ein anderer Beweis ist der folgende:*

Die eine Wurzel ist

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$$

$$=\left(-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{q^3}{27}-\frac{r^2}{4}}.\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{q^3}{27}-\frac{r^2}{4}}.\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

oder

$$x_1=-\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left(1-\frac{\sqrt{M}.\sqrt{-1}}{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{\sqrt{M}.\sqrt{-1}}{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

wo $\sqrt{M}=\sqrt{\frac{q^3}{27}-\frac{r^2}{4}}$ *also jedenfalls reell ist. Die Entwickelung der beiden eingeklammerten Potenzen nach der Binomial-Reihe führt nach gehöriger Reduction auf*

$$x_1=-2.\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1.2}{3.6}.\frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}A-\frac{5.8}{9.12}.\frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}B+\right.$$
$$\left.+\frac{11.14}{15.18}.\frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}C-\ldots\ldots\right)$$

worin A, B, C *das* 1te, 2te, 3te *Glied der Reihe selbst sind. Die beiden andern Wurzeln der Gleichung aber sind*

$$\left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\}=-\frac{x_1}{2}\pm\frac{\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}}{2}\sqrt{-3}$$

oder

$$\left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\}=-\frac{x_1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}.\left(-\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.\left[\left(1-\frac{\sqrt{M}.\sqrt{-1}}{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}-\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{\sqrt{M}.\sqrt{-1}}{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Diese Potenzen entwickelt geben:

$$\left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\} = -\frac{x_1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}.\left(-\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.\left[-\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{M}.\sqrt{-1}}{\frac{r}{2}} + \frac{2.5}{6.9}.\frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}.A_1 - \frac{8.11}{12.15}.\frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}.B_1 + \frac{14.17}{18.21}.\frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}.C_1 - \ldots\ldots\right],$$

$$\left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\} = -\frac{x_1}{2} \mp \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.\left[\frac{\sqrt{M}}{\frac{r}{2}} - \frac{2.5}{6.9}.\frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}.A' + \frac{8.11}{12.15}.\frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}.B' - \frac{14.17}{18.21}.\frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}.C' + \ldots\ldots\right],$$

worin auch wieder A', B', C', ... *das* 1te, 2te, 3te...... *Glied der Reihe selbst sind. Aus diesen Reihen ist ersichtlich, dass* x_1, x_2, x_3 *reelle Werthe sind; sie ergeben sich aus* $\frac{4q^3}{27r^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$ $x = -2\sqrt{\frac{1}{3}q}.\cos\frac{1}{3}\varphi$ *und* $x = 2\sqrt{\frac{1}{3}q}.\cos(60 \pm \frac{1}{3}\varphi)$ *oder aus* $\frac{4q^3}{27r^2} = \frac{1}{\sin^2\psi}$ *als* $x = 2\sqrt{\frac{1}{3}q}.\sin\frac{1}{3}\psi$, $x = 2\sqrt{\frac{1}{3}q}.\sin(60 - \frac{1}{3}\psi)$ *und* $x = -2\sqrt{\frac{1}{3}q}.\sin(60 + \frac{1}{3}\psi)$.

Ein weiterer Beweis ergiebt sich aus dem Sturm'schen Verfahren zur Entdeckung der Wurzeln einer Gleichung (Nr. 148). Man hat dort nämlich die Functionen $x^3 - qx + r = X$, $3x^2 - q = X_1$, $2qx - 3r = X_2$ *und* $4q^3 - 27r^2 = \theta$ *und wenn alle Wurzeln von* $x^3 - qx + r = 0$ *reell sind, so muss die Substitution von* $x = +\infty$ *in* X, X_1, X_2, X_3 *lauter Zeichenfolgen, jene von* $x = -\infty$ *aber lauter Zeichen-Wechsel geben. Das ist nur möglich, wenn* $4q^3 - 27r^2$ *positiv, also* $4q^3 > 27r^2$ *ist.*

Nr. 100. Die Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + qx + r = 0$ ist von jener der Gleichung $x^3 - 1 = 0$ abhängig.

Beweis. *Die Entwickelung der Cardan'schen Formel führt auf* $x = y + z$, *wobei* $y = \sqrt[3]{1}.\sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$ *und* $z = \sqrt[3]{1}.\sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$ *ist. Es geht aber* $\sqrt[3]{1}$ *aus* $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$ *hervor und hat die drei Werthe* 1, $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, *sohin ergeben sich sowohl für y als auch für z drei Werthe, und aus diesen sechs Werthen sind jene auszuwählen, deren*

Producte $yz = -\frac{1}{3}q$ *reell werden, also* $x = y + z = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ *oder*
$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$ *oder* $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{B}$.

Nr. 101. Wenn 1, α, β die Kubik-Wurzeln von 1 und $A = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}$ und $B = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}$ sind, so beweise man auf synthetischem Wege, dass $A+B$, $\alpha A + \beta B$ und $\beta A + \alpha B$ die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 - qx + r = 0$ sind.

Beweis. *Die Summe der Wurzeln muss* $= 0$, *die Summe ihrer Binionen* $= -q$ *und ihr Product* $= -r$ *sein. Diese Resultate ergeben sich auch, wenn man berücksichtigt, dass* $\alpha = \beta^2$, $\beta = \alpha^2$, $\alpha\beta = 1$ *und* $\alpha + \beta + 1 = 0$ *ist. Auch kann man jede der drei Wurzeln statt* x *in der Gleichung* $x^3 - qx + r = 0$ *einsetzen.*

Nr. 102. Wenn $a + b\sqrt{-3}$ und $a - b\sqrt{-3}$ die zwei Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - qx + r = 0$ sind, wem ist $(b-a)^3$ gleich?

Antw. $(b-a)^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$.

Nr. 103. Erkläre, in welchem Fall und aus welchen Gründen die Cardan'sche Regel zur Aufsuchung der Wurzeln einer Gleichung nicht benutzt werden kann.

Antw. *Sie ist unanwendbar, wenn es nicht gelingt aus* $A \pm \sqrt{B}$ *oder* $A \pm \sqrt{-B}$ *die Kubik-Wurzel auf folgende Weise auszuziehen:* $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = (a \pm \sqrt{b}) \cdot \sqrt[3]{p}$. *Zum Kubus erhoben und rationale und irrationale Grössen getrennt, ergiebt sich* $A = a^3p + 3abp$ *und* $\sqrt{B} = (3a^2\sqrt{b} + b\sqrt{b})p$. *Quadrirt ergiebt sich:* $\frac{A^2 - B}{p^2} = a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3 = (a^2 - b)^3$ *oder* $a^2 - b = \frac{1}{p}\sqrt[3]{(A^2 - B)p} = Q$. *Nun wähle man* p *so, dass der Wurzel-Ausdruck rational werde, und substituire* $b = a^2 - Q$ *in den Werth von* A, *so ergiebt sich* $A = 4a^3p - 3pQa$ *oder* $a^3 - \frac{3Q}{4}a - \frac{A}{4p} = 0$. — *Hat diese Gleichung keine rationale Wurzel, so lässt sich die Kubik-Wurzel auf diese Weise nicht ausziehen. Dasselbe gilt für* $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{-B}} = (a \pm \sqrt{-b})\sqrt[3]{p}$. *In manchen Fällen kann die ganze Operation auf eine sehr leichte Weise gelingen. Setzt man nämlich* $\sqrt[3]{A \pm C\sqrt{B}} = a \pm \sqrt{b}$, *so ist* $A \pm C\sqrt{B} = a^3 \pm 3a^2\sqrt{b} + 3ab \pm b\sqrt{b}$

und man kann $A = a^3 + 3ab$ *und* $C\sqrt{B} = (3a^2+b)\sqrt{b}$ *setzen. Wird nun weiter* $b = B$ *angenommen, so folgt aus* $3a^2+b = C$ *auch* $a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(C-B)}$. *Nun muss man sich aber noch überzeugen, ob einer dieser Werthe auch wirklich die Gleichung* $a^3+3ab = A$ *erfüllt, d. h. ob* $A = \pm\left(\frac{C+8B}{3}\right)\sqrt{\frac{C-B}{3}}$ *ist.*

Nr. 104. Man zeige, dass die Cardan'sche Regel anwendbar ist, wenn alle Wurzeln reell und zwei derselben gleich sind, und finde die Wurzeln der folgenden Gleichung $x^3+6x^2-32 = 0$.

Antw. *Eine reducirte kubische Gleichung, welche zwei gleiche Wurzeln a und ausserdem noch eine Wurzel b hat, hat die Form* $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$, *wobei* $b = -2a$ *ist, und die Anwendung der Cardan'schen Formel giebt* $x = -2a = b$, *indem in diesem Fall für* $x^3 - qx + r = 0$ *die Bedingung* $4q^3 = 27r^2$ *stattfindet. Das Zahlenbeispiel* $x^3+6x^2-32 = 0$ *giebt die reducirte Gleichung* $y^3-12y-16 = 0$ *und die Wurzeln* 2, —4, —4.

Nr. 105. Ist die Cardan'sche Regel zur Lösung der Gleichung $x^3-237x-884 = 0$ anwendbar?

Antw. *Sie giebt:* $x = \sqrt[3]{442+315\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{442-315\sqrt{-3}} = (-2-5\sqrt{-3})+(-2+5\sqrt{-3}) = -4$, *woraus die andern Wurzeln* —13 *und* 17 *folgen.*

Nr. 106. Löse die folgenden Gleichungen durch die Cardan'sche Regel.

$x^3+3x\pm 14 = 0$.

Die Wurzeln sind:

$x = \sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1) = -2$,
und $x = 1\pm\sqrt{-6}$; *oder*

$x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2$ *und* $x = -1\pm\sqrt{-6}$.

$x^3-6x-40 = 0$.

$x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = (2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2}) = 4$
und $x = -2\pm\sqrt{-6}$.

$x^3-9x+28 = 0$.

$x = -4$ *und* $x = 2\pm\sqrt{-3}$.

$x^3+3x^2+9x-13 = 0$.

Die reducirte Gleichung $y^3+6y-20 = 0$ *giebt:*

$y = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3}) = 2$,
woraus

$x = 1$ *und* $x = -2\pm 3\sqrt{-1}$ *folgen.*

$x^3 - 6x^2 + 3x - 18 = 0.$

Die reducirte Gleichung $y^3 - 9y - 28 = 0$ *giebt* $y = 4$, *woraus* $x = 6$ *und* $x = \pm\sqrt{-3}$.

$x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0.$

Die reducirte Gleichung $y^3 + 9y + 6 = 0$ *giebt* $y = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$, *woraus* $x = 4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$ *und*

$$x = 4 + \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}}{2} \cdot \sqrt{-3} \text{ folgen.}$$

$x^3 + 6x^2 + 20x + 15 = 0.$

Die reducirte Gleichung $y^3 + 8y - 9 = 0$ *giebt*

$$y = \sqrt[3]{\frac{81 + \sqrt{12705}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{81 - \sqrt{12705}}{18}} =$$

$$y = \frac{3 + \sqrt{105}}{6} + \frac{3 - \sqrt{105}}{6} = 1,$$

woraus $x = -1$ *und* $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{-35}}{2}$ *folgen.*

$x^3 - 12x^2 + 36x - 7 = 0.$

Die reducirte Gleichung $y^3 - 12y + 9 = 0$ *giebt*

$$y = \sqrt[3]{\frac{-9 + \sqrt{-175}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9 - \sqrt{-175}}{2}} =$$

$$y = \frac{3 + \sqrt{-7}}{2} + \frac{3 - \sqrt{-7}}{2} = 3,$$

woraus $x = 7$ *und* $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ *folgen.*

$x^{3m} - px^{2m} + qx^m - r = 0.$

Die reducirte Gleichung $y^3 + (q - \frac{1}{3}p^2)\,y + \frac{1}{3}pq - r - \frac{2}{27}p^3 = 0$ *giebt die Werthe von* y, *aus denen sich jene von* $x = \sqrt[m]{y + \frac{1}{3}p}$ *ergeben. Ein Werth von* y *ist z. B.*

$$y = \sqrt[3]{\frac{r}{2} + \frac{p^3}{27} - \frac{pq}{6} + \sqrt{r^2 + \frac{q^3 + rp^3}{27} - \frac{1}{3}\left(\frac{3r}{2} + \frac{pq}{6}\right)^2}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{r}{2} + \frac{p^3}{27} - \frac{pq}{6} - \sqrt{r^2 + \frac{q^3 + rp^3}{27} - \frac{1}{3}\left(\frac{3r}{2} + \frac{pq}{6}\right)^2}}.$$

Nr. 107. Finde durch die Lehre der Permutationen die Wurzeln der Gleichung $x^3 + px + r = 0$.

Antw. *Die drei Gleichungen* $a + b + c = 0$, $ab + ac + bc = p$ *und* $abc = -r$ *würden immer wieder auf die vorgelegte Gleichung führen; dagegen kann man auf folgende Weise Functionen der drei Wurzeln* a, b, c *suchen. Die einfachste Form einer solchen Function ist* $la + mb + nc$ *und sie lässt die 6 Permutationen zu:*

$$la+mb+nc,\quad lc+ma+nb,\quad lb+mc+na,$$
$$lb+ma+nc,\quad la+mc+nb,\quad lc+mb+na.$$

Die Gleichung, durch welche diese Function bestimmt wird, ist also vom sechsten Grad; sie wäre aber löslich, wenn sie die Gestalt $z^6+Az^3+B=0$ annähme; indem man daraus $z_1{}^3=-\frac{1}{2}A+$ $+\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}$, $z_2{}^3=-\frac{1}{2}A-\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}$, und, wenn 1, α, α^2 die Kubik-Wurzeln von 1 sind, die sechs Wurzeln z_1, αz_1, $\alpha^2 z_1$, z_2, αz_2, $\alpha^2 z_2$ erhielte. Nimmt man zwei Werthe obiger Function $la+mb+nc$ als Werthe von z_1 und z_2 an, z. B. $la+mb+nc=z_1$ und $lb+ma+nc=z_2$, so müssen die andern vier Werthe der Function, damit sie Wurzeln der Gleichung $z^6+Az^3+B=0$ seien, denselben Bedingungen unterworfen sein, denen die Werthe von z unterliegen. Es muss demnach:

$$lc+ma+nb=\alpha(la+mb+nc),\qquad lb+mc+na=\alpha^2(la+mb+nc)$$
$$lc+mb+na=\alpha(lb+ma+nc),\qquad la+mc+nb=\alpha^2(lb+ma+nc)$$

oder
$$(l-\alpha n)c+(m-\alpha l)a+(n-\alpha m)b=0,$$
$$(l-\alpha n)c+(m-\alpha l)b+(n-\alpha m)a=0;$$
$$(l-\alpha^2 m)b+(m-\alpha^2 n)c+(n-\alpha^2 l)a=0,$$
$$(l-\alpha^2 m)a+(m-\alpha^2 n)c+(n-\alpha^2 l)b=0 \text{ sein.}$$

Da die Erfüllung dieser Gleichungen von den Werthen von a, b, c unabhängig sein muss, so müssen die einzelnen Coëfficienten $=0$ sein. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften von 1, α, α^2 erhält man $l=n\alpha$, $m=\alpha^2 n$ und $n=n$. Da also n noch willkürlich ist, so setzen wir es $n=1$, und erhalten hierdurch $l=\alpha$, $m=\alpha^2$ und daher $z_1=\alpha a+\alpha^2 b+c$ und $z_2=\alpha^2 a+\alpha b+c$. Bezeichnen wir also die Function $la+mb+nc$, deren Kubus nur die zwei Werthe $z_1{}^3$ und $z_2{}^3$ haben darf, mit z, so erhalten wir die oben angedeutete Gleichung $z^6+Az^3+B=0$, in welcher die Coëfficienten aber durch jene von $x^3+px+r=0$ ausgedrückt werden müssen. Berücksichtigt man die Eigenschaften von 1, α, α^2 und $a+b+c=0$, so ergiebt sich $B=[(a+b+c)^2-$ $-3(ab+ac+bc)]^3=-27p^3$ und $A=2(a^3+b^3+c^3)+12abc-$ $-3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+c^2b)=-27r$; demnach erhält man $z^6+27rz^3-27p^3=0$ und $z=3\sqrt[3]{-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ oder die sechs Wurzeln $z_1=3\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$, $z_2=$ $=3\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$, $z_3=\alpha z_1$, $z_4=\alpha z_2$, $z_5=\alpha^2 z_1$,

$z_4 = \alpha^2 z_2$. *Die drei Gleichungen* $z_1 = \alpha a + \alpha^2 b + c$, $z_2 = \alpha^2 a + \alpha b + c$ *und* $a + b + c = 0$ *geben dann die Wurzeln* $a = \frac{\alpha^2 z_1 + \alpha z_2}{3}$, $b = \frac{\alpha z_1 + \alpha^2 z_2}{3}$ *und* $c = \frac{z_1 + z_2}{3}$. *Da* z *drei Paar Werthe hat, so müsste man streng genommen untersuchen, welche von diesen sechs Werthen zu verbinden seien, um die richtigen Werthe von* a, b, c *zu liefern. Bei dieser Untersuchung darf man nur die Bedingung im Auge behalten, dass* $ab + ac + bc = p$ *sein müsse, was bei den oben bestimmten auch wirklich der Fall ist, indem* $ab + ac + bc = -\frac{1}{3} z_1 z_2$ *und* $z_1 z_2 = -3p$ *ist. Würde man die drei Werthe* z_1, αz_1, $\alpha^2 z_1$ *wirklich mit jenen* z_2, αz_2, $\alpha^2 z_2$ *combiniren, so erhielte man neun Systeme von Werthen für* a, b, c, *von denen aber drei unter sich gleich wären. Es geben nämlich sowohl* z_1 *und* z_2 *als auch* $\alpha^2 z_1$ *und* αz_2 *als auch* αz_1 *und* $\alpha^2 z_2$

die drei Wurzeln $\frac{\alpha^2 z_1 + \alpha z_2}{3}$, $\frac{\alpha z_1 + \alpha^2 z_2}{3}$, $\frac{z_1 + z_2}{3}$;

ebenso $\alpha^2 z_1$ *und* $\alpha^2 z_2$ *sowie* αz_1 *und* z_2 *sowie* z_1 *und* αz_2

die drei Wurzeln $\frac{z_1 + \alpha z_2}{3}$, $\frac{\alpha z_1 + z_2}{3}$, $\frac{\alpha^2 (z_1 + z_2)}{3}$;

ebenso αz_1 *und* αz_2 *sowie* $\alpha^2 z_1$ *und* z_2 *sowie* z_1 *und* $\alpha^2 z_2$,

die drei Wurzeln $\frac{z_1 + \alpha^2 z_2}{3}$, $\frac{\alpha^2 z_1 + z_2}{3}$, $\frac{\alpha (z_1 + z_2)}{3}$.

Da nun $ab + ac + bc$ *für die ersten drei Wurzeln* $= -\frac{1}{3} z_1 z_2 = p$; *für die nächsten drei aber* $= -\frac{1}{3} \alpha z_1 z_2 = \alpha p$ *und für die letzten drei endlich* $= -\frac{1}{3} \alpha^2 z_1 z_2 = \alpha^2 p$ *ist, so gehören die ersten drei Wurzeln der Gleichung* $x^3 + px + r = 0$; *die nächsten drei jener* $x^3 + \alpha p x + r = 0$ *und endlich die letzten drei der Gleichung* $x^3 + \alpha^2 p x + r = 0$ *an, alle neun vereinigen sie sich aber in der Gleichung* $x^9 + 3rx^6 + (3r^2 + p^3)x^3 + r^3 = 0$, *welche wieder die reducirende Gleichung* $z^6 + Az^3 + B = 0$ *hat.*

Nr. 108. Wenn die quadratischen Factoren in Des Cartes' Auflösung der biquadratischen Gleichung $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ die Form $x^2 + ax + b = 0$ und $x^2 - ax + c = 0$ haben, so finde man die reducirende Gleichung für b oder c, und zeige, dass sie auf eine Gleichung dritten Grades gebracht werden kann.

Antw. *Aus* $b + c - a^2 = p$, $a(c - b) = q$ *und* $bc = r$ *folgt die für* b *sowohl als für* c *gültige Gleichung:*

$b^6 - pb^5 - rb^4 + (2rp - q^2)b^3 - r^2b^2 - r^2pb + r^3 = 0$ *oder*

$\left(b + \frac{r}{b}\right)^3 - p\left(b + \frac{r}{b}\right)^2 - 4r\left(b + \frac{r}{b}\right) + 4rp - q^2 = 0.$

Die reducirende Gleichung für a aber ist:

$a^6 + 2pa^4 + (p^2 - 4r)a^2 - q^2 = 0.$ *Vergl. Nr.* 30.

Nr. 109. Wenn a eine Wurzel der Des Cartes'schen reducirenden kubischen Gleichung ist, wie heissen dann die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$?

Antw. *Die Wurzeln sind* $\frac{-\sqrt{a}}{2} \pm \sqrt{-\frac{q}{2} - \frac{a}{4} + \frac{r}{2\sqrt{a}}}$ *und* $\frac{+\sqrt{a}}{2} \pm \sqrt{-\frac{q}{2} - \frac{a}{4} - \frac{r}{2\sqrt{a}}}$, *oder, wenn* a_1, a_2, a_3 *die drei Wurzeln der reducirenden sind, so sind die Wurzeln der biquadratischen, für den Fall, dass r positiv ist:*

$\frac{1}{2}[-\sqrt{a_1} \pm (\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3})]$ *und* $\frac{1}{2}[\sqrt{a_1} \pm (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3})]$

und für den Fall, dass r negativ ist:

$\frac{1}{2}[-\sqrt{a_1} \pm (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3})]$ *und* $\frac{1}{2}[\sqrt{a_1} \pm (\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3})]$.

Nr. 110. Beweise, dass die Des Cartes'sche Lösung einer biquadratischen Gleichung stets gelingt, wenn alle Wurzeln reell, und zwei derselben gleich sind, und wende sie zur Auflösung der Gleichung $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$ an.

Beweis. *Streng genommen bedarf es gar keines Beweises, denn die Lösung gelingt stets, wenn die drei Wurzeln der reducirenden kubischen positiv sind. Diese Wurzeln sind aber, wie sich aus Nr.* 30 *und* $a + b + c + d = 0$ *ergiebt, nichts anderes als die drei Quadrate der Summen* $a + b = -(c + d)$, $a + c = -(b + d)$, $a + d = -(b + c)$, *müssen also nicht nur in dem oben angegebenen Fall, sondern stets positiv sein, wenn die vier Wurzeln* a, b, c, d *der vorgelegten biquadratischen Gleichung reell sind. — Man kann aber den Beweis für diesen speciellen Fall auch so führen: aus* $b + c + 2a = 0$ *folgt* $a = -\frac{1}{2}(b + c)$ *und die Coëfficienten von* $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ *sind* $p = bc - 3a^2$, $q = 2a(a^2 + bc)$ *und* $r = a^2bc$, *die reducirende kubische Gleichung ist* $y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$. *Untersucht man ihre Coëfficienten, so findet man, dass, weil* $(b + c)^2 > 4bc$ *ist, auch* $a^2 > bc$, *umsomehr also* $3a^2 > bc$, *oder p mithin auch* $2p < 0$ *sei. Ferner ist* $p^2 - 4r = (bc - 3a^2)^2 - 4a^2bc = (3a^2 - bc)^2 - 4a^2bc$; *da aber* $a^2 > bc$, *so folgt* $3a^2 - bc > 2a^2$ *oder* $(3a^2 - bc)^2 > 4a^4 > 4a^2bc$,

also $p^2 - 4r > 0$ *und die reducirende kubische Gleichung hat also lauter Zeichen-Wechsel, mithin entweder* 3 *reelle positive oder* 1 *reelle positive und* 2 *imaginäre Wurzeln. Dass die drei Wurzeln reell sind, könnte man nun dadurch nachweisen, dass man aus* $y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$ *das zweite Glied eliminirt, und nun in* $z^3 - (\frac{1}{3}p^2 + 4r)z - \frac{2}{27}p^3 + \frac{8}{3}rp - q^2 = 0$ *die Relation* $\frac{1}{27}(\frac{1}{3}p^2 + 4r)^3 > \frac{1}{4}(\frac{2}{27}p^3 - \frac{8}{3}rp + q^2)^2$ *beweist. Man kann sich aber auch hiervon auf folgendem Wege überzeugen. Wären nicht alle Wurzeln reell und positiv, so wäre es doch eine derselben, z. B.* y_1 *und dann wäre jedenfalls* $\sqrt{y_1}$ *reell, die beiden andern Wurzeln wären dann* $y_2 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ *und* $y_3 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, *daher* $\sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3} = \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{-1}} \pm \sqrt{\alpha - \beta\sqrt{-1}} = \sqrt{2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$; *da aber* $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > \alpha$ *ist, so wäre* $\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} = \sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ *reell und* $\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} = \sqrt{2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ *imaginär; man erhielte demnach nach dem allgemeinen Resultat* $x = \frac{1}{2}[\pm\sqrt{y_1} \pm (\sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3})]$ *der vorigen Aufgabe für* x *zwei reelle und zwei imaginäre Wurzel-Werthe, was gegen die ursprüngliche Annahme wäre. Da also die Wurzeln der reducirenden kubischen Gleichung in diesem Fall sämmtlich positiv sind, so kann die Lösung keinem Anstand unterliegen. Die Gleichung* $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$ *giebt erst* $x_1^4 - \frac{11}{2}x_1^2 + 3x_1 + \frac{45}{16} = 0$; *hieraus* $y^3 - 11y^2 + 19y - 9 = 0$ *mit den Wurzeln* 1, 1, 9. *Demnach sind* $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{1}{2}$ *die Werthe von* x_1 *und* 3, 3, -1 *und* $+1$ *jene von* x *selbst.*

Nr. 111. Löse folgende Gleichungen nach der Des Cartes'schen Methode auf:

$x^4 - 4x^3 - 8x + 32 = 0$ *giebt:*

$x_1^4 - 6x_1^2 - 16x_1 + 21 = 0$ *und* $y^3 - 12y^2 - 48y - 256 = 0$; $y = 16$ *oder* $= -2 \pm 2\sqrt{-3}$ *und* $x_1 = 1$ *oder* 3 *oder* $-2 \pm \sqrt{-3}$, *endlich* $x = 2$ *oder* 4 *oder* $-1 \pm \sqrt{-3}$.

$x^4 - 3x^2 - 4x - 3 = 0$ *giebt:*

$y^3 - 6y^2 + 21y - 16 = 0$; *hieraus* $y = 1$ *oder* $\frac{5 \pm \sqrt{-39}}{2}$,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ oder } \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 10 = 0$ *giebt:*

$x_1^4 - \frac{17}{2}x_1^2 - 10x_1 - \frac{175}{16} = 0$ *und* $y^3 - 17y^2 + 116y - 100 = 0$; $y = 1$ *oder* $8 \pm 6\sqrt{-1}$ *und* $x_1 = -\frac{5}{2}$ *oder* $\frac{7}{2}$ *oder* $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-1}$ *endlich* $x = -1$ *oder* 5 *oder* $1 \pm \sqrt{-1}$.

$x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ *giebt:*

$x_1^4-\frac{17}{2}x_1^2+\frac{225}{16}=0$ *und* $y^3-17y^2+16y=0$;
$y=0$ *oder* 1 *oder* 16 *und* $x_1=\pm\frac{5}{2}$ *oder* $\pm\frac{3}{2}$, *endlich*
$x=1$ *oder* -3 *oder* $+2$.

Natürlich ergiebt sich in diesem letztern Fall x_1 *auch unmittelbar durch Auflösung der Gleichung* $x_1^4-\frac{17}{2}x_1^2+\frac{225}{16}=0$ *nach* x_1^2.

Nr. 112. Erkläre die Euler'sche Lösung biquadratischer Gleichungen und zeige, dass die Wurzeln der dabei vorkommenden kubischen Gleichung viermal kleiner sind als jene der in der Des Cartes'schen Lösung vorkommenden kubischen Gleichung.

Antw. *Setze in der Gleichung* $x^4+px^2+qx+r=0$ *für* x *den Werth* $x=\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}$, *dann ist* $(u+v+w)^2+$ $+4(uv+uw+vw)+p(u+v+w)+[2p+4(u+v+w)](\sqrt{uv}+\sqrt{uw}+$ $+\sqrt{vw})+(8\sqrt{uvw}+q)x+r=0$. *Setze nun* $2p+4(u+v+w)=0$ *und* $8\sqrt{uvw}+q=0$; *suche* $u+v+w=-\frac{1}{2}p$ *und setze diese drei Werthe in der obigen Gleichung ein, so erhält man* $uv+uw+vw$ $=\frac{1}{16}(p^2-4r)$. *Da nun* $u+v+w=-\frac{1}{2}p$, $uv+uw+vw=$ $=\frac{1}{16}(p^2-4r)$ *und* $uvw=\frac{1}{64}q^2$ *ist, so sind* u, v, w *die Wurzeln der Gleichung* $y^3+\frac{p}{2}y^2+\frac{p^2-4r}{16}y-\frac{q^2}{64}=0$ *oder* $(4y)^3+$ $+2p(4y)^2+(p^2-4r)4y-q^2=0$ *und viermal kleiner als jene der in Nr.* 30 *oder* 108 *angegebenen Gleichung. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung selbst lassen sich in analoger Form wie jene in Nr.* 109 *darstellen.*

Nr. 113. Löse die Gleichung $x^4=12x+5$ nach der Methode des Waring.

Antw. *Ist allgemein die Gleichung* $x^4=px^2+qx+r$ *gegeben, so setze man* $x=u+v+w$, *so folgt hieraus:*

$$x^4=u^4+v^4+w^4+4(u^3v+vu^3+u^3w+uw^3+v^3w+vw^3)+$$
$$+6(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+12(u^2vw+uv^2w+uvw^2).$$

Diese Summe lässt sich nun aber folgendermassen zerlegen:

$$x^4=(u+v+w).(4u^2w+4v^2w)+(u+v+w)^2.(4uv+2w^2)+$$
$$+(u^2+v^2)^2-(w^2-2uv)^2$$
$$=x.4w(u^2+v^2)+x^2.(4uv+2w^2)+(u^2+v^2)^2-(w^2-2uv)^2.$$

Dies mit der ursprünglichen Gleichung verglichen, giebt die Gleichungen $4uv+2w^2=p$, $4w(u^2+v^2)=q$ *und* $(u^2+v^2)^2-$ $-(w^2-2uv)^2=r$. *Aus der ersten folgt:* $2uv=\frac{1}{2}p-w^2$; *aus der zweiten* $u^2+v^2=\frac{q}{4w}$ *und diese beiden Werthe in der dritten*

substituirt, geben $\frac{q^2}{16w^2}-(2w^2-\frac{1}{2}p)^2=r$ *oder* $w^6-\frac{1}{2}pw^4+\frac{p^2+4r}{16}w^2-\frac{q^2}{64}=0$. *Ist* w *gefunden, so folgen hieraus* u^2+v^2, *sowie* $2uv$, *also auch* $u+v$. *In obigem Zahlenbeispiel hat man:* $w^6+\frac{5}{4}w^2-\frac{9}{4}=0$ *oder* $y^3+5y-18=0$, *woraus* $y=2$ *oder* $=-1\pm2\sqrt{-2}$, *also wenn man nur den reellen Werth benutzt,* $w=\pm1$ *und* $u+v=\pm\sqrt{2}$ *oder* $=\pm2\sqrt{-1}$; *daher* $x=1\pm\sqrt{2}$ *oder* $=-1\pm2\sqrt{-1}$ *folgt.*

Es möge hier die Ferrari'sche Methode auch noch ihren Platz finden. Aus $x^4=px^2+qx+r$ *erhält man durch Ergänzung des Quadrats:* $(x^2+y)^2=px^2+qx+r+2yx^2+y^2=$ $=(p+2y)x^2+qx+r+y^2=A^2x^2+2ABx+B^2$. *Setzt man nun* $A^2=p+2y$, $2AB=q$, $B^2=r+y^2$, *so folgt* $4A^2B^2=q^2=$ $=4(p+2y).(r+y^2)$, *oder reducirt* $y^3+\frac{p}{2}y^2+ry+\frac{4pr-q^2}{8}=0$. *Aus dieser Gleichung folgt* y, *hieraus* A *und* B, *und aus* $x^2+y=$ $=\pm(Ax+B)$ *endlich auch* x. *In obigem Zahlenbeispiel erhält man wie bei Waring die reducirende* $y^3+5y-18=0$, *und aus* $y=2$ *die Werthe* $A=2$, $B=3$, *sohin* $x^2+2=\pm(2x+3)$ *oder obige Wurzeln.*

Nr. 114. Wenn $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ist, wie heissen dann die andern Wurzeln?

Antw.

$$\alpha-\beta\sqrt{-1} \text{ und } \tfrac{1}{2}[-(p+2\alpha)\pm\sqrt{p^2-4q-8\alpha^2+4\beta^2-4\alpha p}]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[-(p+2\alpha)\pm\sqrt{p^2-2q-2\left(\alpha^2-\beta^2+\frac{s}{\alpha^2+\beta^2}\right)}\right].$$

Nr. 115. Wenn das absolute Glied u einer Gleichung in Primfaktoren α, β, γ zerlegt wird, so dass $u=\alpha^m.\beta^n.\gamma^p$ ist, wie viel Theiler hat dann u?

Antw. *Da* α^m *die* $m+1$ *Theiler* $1, \alpha, \alpha^2, \ldots\ldots \alpha^{m-1}, \alpha^m$ *hat, so folgt als ganze gesuchte Anzahl Theiler* $(m+1).(n+1).$ $.(p+1)$.

Nr. 116. Löse folgende Gleichungen durch Factoren-Zerlegung des absoluten Gliedes.

$x^3-6x^2+5x+12=0$.

Die Wurzeln sind: 3, 4 *und* -1.

$x^3-9x^2+26x-24=0$.

Die Wurzeln sind: 2, 3, 4.

$x^4-6x^2-16x+21=0$.

Die Wurzeln sind: 1, 3, $-2\pm\sqrt{-3}$.

$x^4-4x^3-8x+32=0$.

Die Wurzeln sind: 2, 4, $-1\pm\sqrt{-3}$.

$x^4+x^3-29x^2-9x+180=0$.

Die Wurzeln sind: ± 3, 4 *und* -5.

$3x^3-25x^2+34x-12=0$.

Die Wurzeln sind: 1, $\frac{11\pm\sqrt{85}}{3}$.

$8x^3-26x^2+11x+10=0$.

Die Wurzeln sind: $\frac{5}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{41}}{8}$.

$8x^3-45x^2+73x-30=0$.

Die Wurzeln sind: 2, 3, $\frac{5}{8}$.

Siehe Nr. 119 *und* 120.

Nr. 117. Man zeige, wie bei der Lösung von Gleichungen durch Factoren-Zerlegung des absoluten Gliedes die Substitutionen vermieden werden können, und bestimme, ob 3, 5 und -5 Wurzeln der Gleichung $x^4-x^3-16x^2+55x-75=0$ sind.

Antw. *Ist a eine ganze Zahl und Wurzel der mit ganzen Coëfficienten behafteten Gleichung* $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots+Px^3+$ $+Qx^2+Rx+S=0$, *so müssen nach Nr.* 10 *die Ausdrücke*

$$R_1=\frac{S}{a}+R,\ Q_1=\frac{R_1}{a}+Q,\ P_1=\frac{Q_1}{a}+P,\ \ldots\ldots\ p_1=\frac{q_1}{a}+p$$

lauter ganze Zahlen und zuletzt noch $\frac{p_1}{a}+1=0$ *sein. Ein anderes, im Grunde nicht verschiedenes Erkennungs-Mittel ergiebt sich folgendermassen. Wenn a eine Wurzel obiger Gleichung ist, so muss diese durch* $x-a$ *ohne Rest theilbar sein; der Quotient sei* $x^{n-1}+p'x^{n-2}+q'x^{n-3}+\ldots\ldots+P'x^2+Q'x+R'=0$, *so muss er, mit* $x-a$ *multiplicirt, wieder obige Gleichung geben; multiplicirt man aber wirklich, so folgt*: $x^n+(p'-a)x^{n-1}+(q'-ap')x^{n-2}+$ $+\ldots\ldots+(Q'-aP')x^2+(R'-aQ')x-aR'=0$, *woraus ferner*:

$$-R'=\frac{S}{a},\ -Q'=\frac{R-R'}{a},\ -P'=\frac{Q-Q'}{a},\ \ldots\ldots -p'=\frac{q-q'}{a}$$

und endlich $-1=\frac{p-p'}{a}$ *folgt; man sieht also, dass wenn a eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist, die Differenzen* $R-R'$,

$Q-Q'$, ... *durch dieselbe ohne Rest theilbar sein müssen, und die letzte Division den Rest* -1 *geben muss. Die erhaltenen Quotienten sind, nachdem ihre Zeichen geändert wurden, nichts anderes als die Coëfficienten der Gleichung* $\frac{f(x)}{x-a}=0$. *Folgende Anhaltspunkte können aber die Anzahl nöthiger Versuche einschränken. Mache in der gegebenen Gleichung* $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots+S=0$ *die Substitution* $x=y+b$, *so wird das absolute Glied der transformirten Gleichung* $b^n+pb^{n-1}+qb^{n-2}+\ldots\ldots+S=S'$. *Bestimme nun die Theiler von* S' *und vermehre jeden derselben um* b; *bestimme ferner die Theiler von* S, *so sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung nur unter jenen Theilern von* S *zu suchen, die auch in den um* b *vermehrten Theilern von* S' *vorkommen. Oder auch: Da* $(f)x$ *durch* $x-a$ *ohne Rest theilbar ist, wenn* a *eine Wurzel von* $f(x)$ *ist, so folgt, dass dieser Quotient* $\frac{f(x)}{x-a}$ *für jeden ganzen Werth von* x *eine ganze Zahl sein müsse. Man berechne also* $f(x)$ *für einen beliebigen Werth* $x=\alpha$, *so sind die Wurzeln von* $f(x)$ *nur unter jenen Theilern des absoluten Glieds zu suchen, welche bei der Division* $\frac{f(\alpha)}{\alpha-a}$ *eine ganze Zahl geben. In dem vorliegenden Zahlenbeispiel sind nur* 3 *und* -5 *Wurzeln der Gleichung, die beiden andern sind* $\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}$.

Nr. 118. Wende die Regel der quadratischen Divisoren auf die Gleichung $x^4-17x^3+88x^2-172x+112=0$ an.

Antw. *Bei Zerlegung der Gleichung* $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ *in ihre quadratischen Factoren ist es klar, dass man immer auf die aus Nr.* 30 *bekannte Gleichung sechsten Grades kommen müsse, doch soll ihre Aufsuchung hier auf andere Weise als dort geschehen. Aus der Vergleichung der vorgelegten Gleichung mit jener* $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2++(bc+ad)x+cd=0$ *ergiebt sich:* $a+c=p$, $b+ac+d=q$, $bc+ad=r$, $cd=s$. *Aus den beiden mittlern dieser Gleichungen ergiebt sich* $b=\frac{a(q-ac)-r}{a-c}$ *und* $d=\frac{r-c(q-ac)}{a-c}$, *und da die erste* $c=p-a$ *liefert, so hat man* $b=\frac{a[q-a(p-a)]-r}{2a-p}$.

und $d = \dfrac{r-(p-a).[q-a(p-a)]}{2a-p}$, *und wenn man endlich diese Werthe in der vierten einsetzt, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction:*

$a^6 - 3pa^5 + (3p^2+2q)a^4 - p(p^2+4q)a^3 + (2p^2q+pr+q^2-4s)a^2 -$
$\quad - p(pr+q^2-4s)a + pqr - p^2s - r^2 = 0.$

Diese Gleichung kann aber für die Berechnung von a bequemer hergerichtet werden, wenn man das zweite Glied eliminirt, indem mit diesem auch die übrigen geraden Glieder verschwinden, und man $y^6 + (2q - \frac{3}{4}p^2)y^4 + (q^2 - p^2q + \frac{3}{16}p^4 + pr - 4s)y^2 - (\frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{2}pq + r)^2 = 0$ *erhält. In unserm Zahlenbeispiel nun wird diese letztere Gleichung* $y^6 - \frac{163}{4}y^4 + \frac{7171}{16}y^2 - \frac{93025}{64} = 0$, *ihre Wurzeln sind* $\pm\frac{5}{2}$, $\pm\frac{2+\sqrt{65}}{2}$, $\pm\frac{2-\sqrt{65}}{2}$; *hieraus folgen für a die Werthe:* -6, -11, $\frac{-15\pm\sqrt{65}}{2}$, $\frac{-19\mp\sqrt{65}}{2}$; *endlich für die vorgelegte Gleichung die Wurzeln* 2, 4, $\frac{11\pm\sqrt{65}}{2}$ *und die quadratischen Factoren* $(x^2-6x+8).(x^2-11x+14)=0$ *oder:*

$$\left(x^2 + \frac{-15+\sqrt{65}}{2}x + 11 - \sqrt{65}\right).\left(x^2 + \frac{-19-\sqrt{65}}{2}x + 22 + 2\sqrt{65}\right)$$

oder endlich noch:

$$\left(x^2 + \frac{-15-\sqrt{65}}{2}x + 11 + \sqrt{65}\right).\left(x^2 + \frac{-19+\sqrt{65}}{2}x + 22 - 2\sqrt{65}\right).$$

Nr. 119. Löse durch Factoren-Zerlegung des absoluten Gliedes die Gleichung $6x^4 + 53x^3 - 95x^2 - 25x + 42 = 0$ auf.

Antw. *Setzt man* $x = \frac{1}{6}y$, *so erhält man die Gleichung* $y^4 + 53y^3 - 570y^2 - 900y + 9072 = 0$, *welche nur ganze Wurzeln hat. Zwei derselben sind* 4 *und* 9, *daher x die Werthe* $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-11\pm\sqrt{93}}{2}$ *hat.*

Nr. 120. Es ist immer möglich, ohne Hülfe von Annäherungs-Formeln jene Wurzeln numerischer Gleichungen zu finden, welche entweder ganze Zahlen oder rationale Brüche sind.

Antw. *Wenn die Wurzeln ganze Zahlen sind, so ergeben sie sich durch Factoren-Zerlegung des absoluten Glieds und Versuche mit den Theilern. Sind die Wurzeln sämmtlich oder theilweise Brüche, so wird in der geordneten Gleichung das erste Glied einen Coëfficienten m haben, der ein gemeinschaftlicher Nenner der*

Wurzel-Brüche ist. Man verwandle also die gegebene Gleichung in eine solche, deren Wurzeln m mal grösser sind, so ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Nr. 121. Wenn a ein Näherungswerth einer Wurzel der Gleichung $x^3+px^2+qx=r$ ist, so dass $a^3+a^2p+aq=r_1$ wird, wie lässt sich dann ein noch näherer Werth von x bestimmen? Man wende dies auf die Gleichung $x^3-2x=5$ an.

Antw. $x = a+\frac{a(r-r_1)}{r_1+2a^3+a^2p} = a-\frac{a^3+a^2p+aq-r}{3a^2+2ap+q} =$
$= \frac{2a^3+a^2p+r}{3a^2+2ap+q}$.

Man thut aber gut, sich bei jeder Bestimmung zu überzeugen, ob man sich der Wurzel wirklich nähere oder ob man sich am Ende gar von ihr entferne. Diese Ueberzeugung verschafft man sich leicht, wenn man die letzte Decimalstelle des bestimmten Näherungs-Werthes um 1 vermehrt oder vermindert, diesen und den vorigen Annäherungs-Werth in die Gleichung einsetzt, und nun untersucht, ob die gewonnenen Resultate verschiedene Zeichen haben. Ist dies der Fall, so liegt nach Nr. 129 die wirkliche Wurzel zwischen den beiden eingesetzten Annäherungs-Werthen, und es ist hierdurch auch der Grad der Annäherung bestimmt. In obigem Zahlen-Beispiel sind die Näherungs-Werthe: 2, 2,1, 2,0946, 2,094551491, 2,09455148154 23266, 2,09455148154232659148238654057930. *die andern Wurzeln* $x=-1{,}04727\pm1{,}13594\sqrt{-1}$.

Nr. 122. Wenn die Werthe $a+z$, $a+z+h$, $a+z+h_1$ als Näherungs-Werthe der Wurzel a statt der Unbekannten in eine gegebene Gleichung eingesetzt werden, und die Resultate n, $n+\delta$ und $n+\delta_1$ ergeben, so lässt sich z annäherungsweise durch die Gleichung $z^2(h\delta_1-h_1\delta)+z(h^2\delta_1-h_1{}^2\delta)+nhh_1(h_1-h)=0$ bestimmen.

Beweis. *Ist a eine Wurzel der Gleichung* $x^m+px^{m-1}+$ $+qx^{m-2}+\ldots\ldots=0$, *so ist allgemein:* $(a+l)^m+p(a+l)^{m-1}+$ $+q(a+l)^{m-2}+\ldots\ldots=C_1+C_2l+C_3l^2+C_4l^3+\ldots\ldots$, *worin* $C_1=a^m+pa^{m-1}+qa^{m-2}+\ldots\ldots=0$, $C_2=ma^{m-1}+p(m-1)a^{m-2}+$ $+q(m-2)a^{m-3}+\ldots\ldots$, $C_3=\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}+\frac{p(m-1)(m-2)}{1.2}a^{m-3}+$ $+\frac{q(m-2)(m-3)}{1.2}a^{m-3}+\ldots\ldots$ *u. s. f. Setzt man nun für l*

nach einander die Werthe z, $z+h$ und $z+h_1$ ein, und vernachlässigt man die 3ten, 4ten und höhern Potenzen von l, so erhält man die Gleichungen: $n = C_2 z + C_3 z^2$, $n+\delta = C_2(z+h) + C_3(z+h)^2$ *und* $n+\delta_1 = C_2(z+h_1) + C_3(z+h_1)^2$. *Eliminirt man hieraus C_2 und C_3, so folgt:* $\frac{2nhz + h^2 n - \delta z^2}{h^2 z + z^2 h} = \frac{2nh_1 z + h_1^2 n - \delta_1 z^2}{h_1^2 z + z^2 h_1}$ *und hieraus obige Gleichung. Sie folgt noch leichter aus dem Taylor'schen Satze:* $f(x+l) - f(x) = df(x).l + \frac{d^2 f(x)}{1.2} l^2 + \frac{d^3 f(x)}{1.2.3} l^3 + \ldots$, *in welcher man auch nur l und l^2 berücksichtigt.*

Hat man zwei Näherungs-Werthe, a_1 und a_2, der Wurzel x einer auf 0 reducirten Gleichung gefunden, und bei deren Einsetzung die Fehler f_1 und f_2 erhalten, so kann man einen weitern Näherungs-Werth nach der Regula falsi bestimmen, nach welcher die Differenzen der Näherungs-Werthe den Fehler-Differenzen proportional sein sollen; man hat dann:

$$(a_1 - a_2) : (f_1 - f_2) = (a_1 - x) : f_1 = (a_2' - x) : f_2$$

und $$x = a_1 - \frac{f_1(a_1 - a_2)}{f_1 - f_2} = a_2 - \frac{f_2(a_1 - a_2)}{f_1 - f_2}.$$

Nr. 123. Bestimme annäherungsweise eine reelle Wurzel folgender Gleichungen:

$x^3 - x = 50$. 3,77449.

$x^3 - 6x + 1 = 0$. 2,36146; 0,16744; —2,52891.

$x^3 - 2x = 5$. 2,09455.

$x^3 - 2x^2 + 3x = 4$. 1,65062.

$x^3 + 2x = 30$. 2,89304.

$x^4 - 12x + 7 = 0$. 2,04727, 0,59368.

$x^3 + x^2 + x = 90$. 4,10283.

$x^4 + x = 3$. 1,16402, —1,45262.

$2x^4 - 16x^3 + 40x^2 - 30x + 1 = 0$.
1,28472; 3,20832; 3,47201; 0,03493.

$$\begin{cases} x^2 + xy = 5 \\ 2xy - y^2 = 2. \end{cases}$$
$x = \pm 1,95358$ *oder* $= \pm 1,47766$;
$y = \pm 0,60581$ *oder* $= \pm 1,90604$.

$$\begin{cases} x^2 + y = 157 \\ y^2 - x = 6. \end{cases}$$
$x = 12,35780$ *oder* $= 12,70136$;
$y = 4,28460$ *oder* $= -4,32450$.

$$\begin{cases} x^3 + y^2 = 12 \\ x^2 + y^3 = 8. \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 2{,}134028; \\ y &= 1{,}510482. \end{aligned}$$

Nr. 124. **Bestimme eine Wurzel der Gleichung $x^3+9x^2+4x = 80$ durch eine convergirende Reihe von Brüchen.**

Antw. *Man erhält für eine Theilbruch-Reihe die Gleichungen:* $x^3+9x^2+4x=80$ *und* $x=2+\frac{1}{x_1}$, $28x_1^3-52x_1^2-15x_1-1=0$ *und* $x_1=\frac{3x_2}{x_2+1}$, $242x_2^3-561x_2^2-48x_2-1=0$ *und* $x_2=\frac{3x_3}{x_3+1}$, $1340x_3^3-5340x_3^2-147x_3-1=0$ *und* $x_3=\frac{5x_4}{x_4+1}$, $3696x_4^2-14997x_4-82=0$ *und* $x_4=\frac{5x_5}{x_5+1}$, $17333x_5^2-75149x_5-82=0$ *und* $x_5=\frac{5x_6}{x_6+1}$, $57498x_6^2-375909x_6-82=0$ *und* $x_6=\frac{7x_7}{x_7+1}$, $185957x_7^2-2631527x_7-82=0$ *und* $x_7=\frac{15x_8}{x_8+1}$, $157828x_8-2631527=0$ *und* $x_8=\frac{17x_9}{x_9+1}$, *hieraus die Reihe:* $x=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}A+\frac{1}{5}B+\frac{1}{5}C+\frac{1}{5}D+\frac{1}{7}E+\frac{1}{15}F+\frac{1}{17}G+\ldots\ldots$ *und die Näherungs-Werthe:* $2,\ \frac{7}{3},\ \frac{22}{9},\ \frac{111}{45},\ \frac{556}{225},\ \frac{2781}{1125},\ \frac{19468}{7875},\ \frac{292021}{118125},\ \frac{4964358}{2008125}$. *Also* $x = 2{,}472136$ *oder* $= -6{,}472136$ *oder* -5. *Für einen Kettenbruch erhält man die Partial-Nenner:* 2; 8; 2; 8; 2; 8..... *und hieraus die Näherungs-Werthe:* $2,\ \frac{5}{2},\ \frac{42}{17},\ \frac{89}{36},\ \frac{754}{305},\ \frac{1597}{646},\ \frac{13530}{5473},\ \ldots\ldots$ *(Siehe die nächste Aufgabe.)*

Eine andere Annäherungsweise durch Reihen ist folgende: Ist $x+h$ eine Wurzel einer gegebenen Gleichung, also x ein bereits gefundener Annäherungs-Werth, so ist $f(x+h)=0=f(x)+df(x).h+\frac{d^2f(x)}{1.2}.h^2+\frac{d^3f(x)}{1.2.3}.h^3+\ldots\ldots$ *und um hierin h zu finden, setze man $h=a+b+c+e+\ldots\ldots$, wobei aber jeder Theil so klein sei, dass sich nur b mit a^2, c mit a^3 und ab, e mit a^4, a^2b, ac, b^2 u. s. f. vergleichen lasse, so erhält man durch diese Substitution die Gleichung:*

$$\begin{aligned}
0 = f(x) + adf(x) + \ & bdf(x) + \qquad cdf(x) + \qquad edf(x) + \ldots\ldots \\
& a^2d^2f(x) + abd^2f(x) + acd^2f(x) + \ldots\ldots \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}.b^2d^2f(x) + \ldots\ldots \\
& + \tfrac{1}{6}a^3d^3f(x) + \tfrac{1}{2}a^2bd^3f(x) + \ldots\ldots \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{24}a^4d^4f(x) + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

welches Verfahren sich so weit fortsetzen lässt als man will.

Wenn man nun hierin die Vertical-Colonnen einzeln $= 0$ *setzt, so ergeben sich hieraus die Werthe:* $a = -\frac{f(x)}{df(x)}$, $b = -\frac{d^2f(x).[f(x)]^2}{2[df(x)]^3}$, $c = [f(x)]^3.\left(-\frac{[d^2f(x)]^2}{2[df(x)]^5}+\frac{d^3f(x)}{6[df(x)]^4}\right)$, $e = [f(x)]^4.\left(-\frac{5[d^2f(x)]^3}{8[df(x)]^7}+\frac{5d^2f(x).d^3f(x)}{12[df(x)]^6}-\frac{d^4f(x)}{24[df(x)]^5}\right)\ldots$

Nr. 125. Man löse die Gleichung $x^3-7x+7=0$ durch Kettenbrüche, und bestimme die Genauigkeit der daraus abgeleiteten Näheruugs-Werthe:

Antw. *Man erhält die Gleichungen:* $x^3-7x+7=0$ *und* $x=-\left(3+\frac{1}{x_1}\right)$, $x_1^3-20x_1^2-9x_1-1=0$ *und* $x_1=20+\frac{1}{x_2}$, $181x_2^3-391x_2^2-40x_2-1=0$ *und* $x_2=2+\frac{1}{x_3}$. $197x_3^3-568x_3^2-695x_3-181=0$ *und* $x_3=3+\frac{1}{x_4}$, $2059x_4^3-1216x_4^2-1205x_4-197=0$ *und* $x_4=1+\frac{1}{x_5}$, $559x_5^3-2540x_5^2-4961x_5-2059=0$ *und* $x_5=6+\frac{1}{x_6}$, $2521x_6^3-2493x_6^2-7522x_6-559=0$ *und* $x_6=10+\frac{1}{x_7}$, $47879x_7^3-250158x_7^2-50669x_7-2521=0$ *und* $x_7=5+\frac{1}{x_8}$, $525091x_8^3-1038646x_8^2-468027x_8-47879=0$ und $x_8=2+\frac{1}{x_9}$, $937789x_9^3-1678481x_9^2-2111900x_9-525091=0$ und $x_9=2+\frac{1}{x_{10}}$, $209347x_{10}^3-2427644x_{10}^2-3948253x_{10}-937789=0$ *und* $x_{10}=13+\frac{1}{x_{11}}\ldots\ldots$

Ebenso ergeben sich für die zweite Wurzel die Gleichungen: $x^3-7x+7=0$ *und* $x=2-\frac{1}{x_1}$, $x_1^3-5x_1^2+6x_1-1=0$ *und* $x_1=3+\frac{1}{x_2}$, $x_2^3-3x_2^2-4x_2-1=0$ *und* $x_2=4+\frac{1}{x_3}$, $x_3^3-20x_3^2-9x_3-1=0$ *und* $x_3=20+\frac{1}{x_4}$; *dann folgen die Partial-Nenner des ersten Bruchs. Ebenso für die dritte Wurzel:* $x^3-7x+7=0$ *und* $x=1+\frac{1}{x_1}$, $x_1^3-4x_1^2+3x_1+1=0$ *und* $x_1=2+\frac{1}{x_2}$; $x_2^3+x_2^2-2x_2-1=0$ *und* $x_2=1+\frac{1}{x_3}$; $x_3^3-3x_3^2-4x_3-1=0$ *und* $x_3=4+\frac{1}{x_4}$, $x_4^3-20x_4^2-9x_4-1=0$,

woraus denn auch wieder die Partial-Nenner des ersten Bruchs folgen. *Man hat also als Wurzeln:*

$$-\left[3+\frac{1}{20+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{13+\ldots}\right]$$

oder

$$2-\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{20+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{2+\ldots}$$

oder

$$1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{20+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{5+\ldots}$$

und als Näherungs-Werthe dieser Wurzeln die Brüche:

$$-3,\ -\frac{61}{20},\ -\frac{125}{41},\ -\frac{436}{143},\ -\frac{561}{184},\ -\frac{3802}{1247},\ -\frac{38581}{12654},\ -\frac{196707}{64517},\ -\frac{413995}{141688},\ -\frac{1960697}{347893};$$

$$2,\ \frac{5}{3},\ \frac{22}{13},\ \frac{445}{263},\ \frac{912}{539},\ \frac{3181}{1880},\ \frac{4093}{2419},\ \frac{27739}{16394},\ \frac{281483}{166359},\ \frac{1435154}{848189};$$

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{19}{14},\ \frac{384}{283},\ \frac{787}{580},\ \frac{2745}{2023},\ \frac{3532}{2603},\ \frac{23937}{17641},\ \frac{242902}{179013};$$

oder die Werthe: —3,048917; 1,692017; 1,356895. *Sind* $\frac{z_1}{n_1}$ *und* $\frac{z_2}{n_2}$ *zwei auf einander folgende Näherungs-Werthe, so ist der Unterschied des letztern vom wahren Werth* $< \frac{1}{n_2(n_1+n_2)} < \frac{1}{n_2^2} < \frac{1}{n_1 \cdot n_2}$.

Nr. 126. Wenn a ein Näherungs-Werth von x in irgend einer Gleichung ist, und wenn b und c die Resultate sind, die sich ergeben, wenn man a für x in der ursprünglichen Gleichung und in ihrer Ableitung einsetzt, so ist ein näherer Näherungs-Werth: $x = a - \frac{b}{c}$.

Antw. *Folgt aus Nr. 122, wenn man nur die erste Potenz von l berücksichtigt. Nr. 148 enthält eine Gleichung, in welcher diese Annäherungs-Methode nicht anwendbar ist; fernere Beleuchtung der Methode würde hier zu weit führen, findet sich übrigens in jedem Lehrbuch. Eine Vorsichtsmassregel ist in Nr. 121 angedeutet; und ein weiterer Behelf liegt darin, dass wenn der wahre Werth der Wurzel zwischen a und α liegt, und die Einsetzung von*

α in der ursprünglichen Gleichung das Resultat β liefert, der wahre Wurzel-Werth zwischen $a-\frac{b}{c}$ *und* $\alpha-\frac{\beta}{c}$ *liegt.*

Nr. 127. Bestimme die Anzahl positiver und negativer Wurzeln der Gleichung: $x^5+4x^4-19x^3-34x^2+60x+36=0$, welche lauter reelle Wurzeln hat.

Antw. 2 *positive und* 3 *negative und zwar innerhalb der Grenzen*: -6, x_1, -5, -3, x_2, -2, -1, x_3, 0, 1, x_4, 2, 3, x_5, 4.

Nr. 128. Ebenso in der Gleichung $x^5-5x^4-15x^3+85x^2-$ $-26x-120=0$.

Antw. 3 *positive und* 2 *negative, nämlich* 2, 3, 5, -1 *und* -4.

Nr. 129. Wenn zwei Zahlen, a und b, in eine Gleichung $x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-\ldots\ldots=0$ statt der Unbekannten eingesetzt werden, und zwei mit verschiedenen Zeichen behaftete Resultate geben, so liegt wenigstens eine reelle Wurzel zwischen obigen Werthen a und b. Man beweise dies ohne die Gleichung in Factoren aufzulösen.

Antw. *Es sei P die Summe der positiven, N jene der negativen Glieder; für $x=a$ das Resultat der Substitution negativ, für $x=b$ hingegen positiv, so war im ersten Fall $P<N$, im zweiten aber $P>N$; bei der Zunahme, die x von a bis b erleidet, nehmen sowohl P als N zu, und wenn man die aufeinander folgenden Werthe von x nahe genug annimmt, so kann man auch die Werthe von P und N ganz allmälig zunehmen lassen. Da aber P im ersten Fall $<N$, im zweiten $>N$ war, so folgt, dass die Zunahme von P rascher erfolge als jene von N, dass es der Grösse P hierdurch möglich werde, den Ueberschuss von N allmälig zu vermindern, dann gänzlich aufzuheben und endlich umgekehrt die Grösse N selbst zu übertreffen. Es muss also mindestens einen Augenblick geben, wo P und N gleich sind, und jener Werth von x, bei dessen Substituirung dieser Augenblick eintritt, ist eine Wurzel der gegebenen Gleichung und zwar ist er jener von beiden Grenzen a und b näher, die abgesehen vom Zeichen, ein kleineres Resultat liefert. Damit ist aber nicht gesagt, dass zwischen a und b nur eine einzige Wurzel liege; es können diese Grenzen auch eine grössere, ungerade Anzahl Wurzeln einschliessen;*

ebenso wie zwei Grenzen, welche gleiche Zeichen liefern, eine gerade Anzahl Wurzeln einschliessen können. Um sicher zu gehen, muss man also den Unterschied $b - a$ kleiner als die kleinste Differenz der Wurzeln machen, und wie diese gefunden wird, lehrt Nr. 50. Ferner muss man vorher die gleichen Wurzeln der Gleichung abscheiden.

Nr. 130. Wenn man mit P die Summe der positiven Glieder einer Gleichung bezeichnet, und in dieser letztern für die Unbekannte nach und nach eine Reihe von Werthen einsetzt, so kann man dieselben so wählen, dass die aufeinander folgenden Zuwachse von P kleiner als irgend eine bestimmte Grösse D werden.

Beweis. *Nimmt man als ungünstigsten Fall alle Glieder der Gleichung positiv an, so ist:* $P_x = x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots$ *und geht hierin x in $x+h$ über, so wird:* $P_{x+h} = C_1 + C_2 h + + C_3 h^2 + C_4 h^3 + \ldots\ldots + C_{m+1} h^m$, *worin nach Nr. 122 das erste Glied C_1 nichts anderes als der ursprüngliche Werth P_x; die Summe der übrigen Glieder aber der von P_x erlittene Zuwachs $P_{x+h} - P_x$ ist, der unter der Grenze D bleiben soll. Ist nun C_g der grösste der Coëfficienten C_2, C_3, C_4, ..., so ist offenbar* $h(C_2 + C_3 h + C_4 h^2 + \ldots\ldots + C_{m+1} h^{m-1}) < C_g h(1 + h + h^2 + \ldots\ldots h^{m-1})$ *oder* $< C_g . h . \frac{1-h^m}{1-h}$ *und dieses, so lange $h < 1$, selbst wieder* $< \frac{C_g . h}{1-h}$. *Setzt man also* $\frac{C_g . h}{1-h} = D$, *so wird für* $h = \frac{D}{C_g + D}$ *obiger Zuwachs* $C_2 h + C_3 h^2 + \ldots\ldots + C_{m+1} h^m$ *unter der Grenze D bleiben. Enthält aber die Function negative Glieder, so kommen diese der Aufgabe zu Gute, indem dann $P_{x+h} - P_x$ noch weit mehr unter der Grenze D bleiben wird. Ist die Summe der negativen Glieder grösser als jene der positiven, so kehrt sich die Aufgabe um. — Ein anderer Beweis ergiebt sich aus dem Taylor'schen Satze:* $f(x+h) - f(x) = h\left(df(x) + \frac{d^2f(x)}{1.2} h + \frac{d^3f(x)}{1.2.3} h^2 + \ldots\ldots\right)$. *Nun kann man in dem eingeklammerten Ausdruck h so wählen, dass* $df(x) > \frac{d^2f(x)}{1.2} h + \frac{d^3f(x)}{1.2.3} h^2 + \ldots\ldots$, *also auch* $2df(x) > df(x) + + \frac{d^2f(x)}{1.2} h + \frac{d^3f(x)}{1.2.3} h^2 + \ldots\ldots$, *mithin* $f(x+h) - f(x) < h . 2df(x)$ *wird. Setzt man also* $h \overline{\gtrless} \frac{D}{2df(x)}$, *so wird für diesen Werth* $P_{x+h} - P_x < D$ *bleiben.*

Nr. 131. Wenn P und N der grösste positive und negative Coëfficient der Gleichung $x^n - px^{n-1} + \ldots\ldots + Px^{n-m} \ldots\ldots \mp Nx^{n-r} \ldots\ldots \pm u = 0$ sind, so ist eine obere Grenze der positiven Wurzeln $N+1$ und eine untere $\frac{u}{u+N}$ oder $\frac{u}{u+P}$, je nachdem u positiv oder negativ ist.

Beweis. *Nimmt man als ungünstigsten Fall alle Glieder mit Ausnahme des ersten als negativ und mit dem Coëfficienten N behaftet an, so muss für die obere Grenze $g^n - N(g^{n-1} + g^{n-2} + \ldots\ldots + g + 1) \geqq 0$, oder $g^n \geqq \frac{N(g^n - 1)}{g - 1}$ sein. Dieser Bedingung genügt man durch die Annahme $g^n = \frac{Ng^n}{g-1}$ oder $g = N+1$, die zugleich das erste Glied grösser als die Summe aller übrigen macht. Setzt man in der gegebenen Gleichung $x = \frac{1}{y}$, so erhält man die Gleichung der reciproken Wurzeln: $y^n \ldots\ldots \mp \frac{N}{u} y^r \ldots\ldots \mp \frac{P}{u} y^m \ldots \ldots \mp \frac{p}{u} y \pm \frac{1}{u} = 0$ und hierin als obere Grenzen nach dem eben Gesagten entweder $\frac{N}{u} + 1$ oder $\frac{P}{u} + 1$, je nachdem u positiv oder negativ ist; mithin sind die reciproken Werthe $\frac{u}{u+N}$ oder $\frac{u}{u+P}$ untere Grenzen für die gegebene Gleichung.*

Nr. 132. Wenn Mx^{n-m} das erste negative Glied der Gleichung $x^n + px^{n-1} + \ldots\ldots - Mx^{n-m} + \ldots\ldots = 0$ ist, und wenn P der grösste negative Coëfficient der Gleichung ist, dann ist $1 + \sqrt[m]{P}$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung.

Beweis. *Nimmt man als ungünstigsten Fall alle mit Mx^{n-m} anfangenden Glieder der Gleichung negativ und mit dem Coëfficienten P behaftet an, so erhält man jedenfalls ein positives Resultat, wenn man die Grenze g so wählt, dass $g^n + pg^{n-1} + \ldots\ldots > P(g^{n-m} + g^{n-m-1} + \ldots\ldots + 1)$ oder g^n allein $> P . \frac{g^{n-m+1} - 1}{g - 1}$ oder $g^n(g-1) > Pg^{n-m+1}$ oder $(g-1)g^{m-1} > P$ wird. Setzt man hierin $g = b + 1$, so muss die Bedingung $b(b+1)^{m-1} > P$ erfüllt werden, und dieser wird genügt, wenn man b so wählt, dass $b^m = P$ ist, woraus sich denn die oben angeführte Grenze ergiebt.*

Nr. 133. Wenn P der grösste und S der letzte negative Coëfficient der Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \ldots\ldots - Px^p + \ldots\ldots - Sx^s + \ldots\ldots + Tx + V = 0$ ist, so ist $\dfrac{V^{\frac{1}{s}}}{V^{\frac{1}{s}} + P^{\frac{1}{s}}}$ eine untere Grenze der positiven Wurzeln.

Beweis *ergiebt sich von selbst, wenn man die Gleichung der reciproken Wurzeln herstellt, hierfür nach Nr.* 132 *die obere Grenze sucht, und hiervon selbst wieder den reciproken Werth darstellt.*

Nr. 134. Wenn die Glieder einer Gleichung so geordnet werden, dass sie abwechselnd positiv und negativ sind, und wenn A_1, A_2, A_3, ... die Coëfficienten des 1ten, 3ten, 5ten ...... Gliedes; B_1, B_2, B_3, ... jene des 2ten, 4ten, 6ten ...... Gliedes sind, so ist der grösste der Brüche $\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_2}$, $\frac{B_3}{A_3}$, ... eine obere Grenze der positiven Wurzeln. Man wende dies zur Bestimmung einer obern Grenze der Wurzeln der Gleichung $x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0$ an.

Beweis *ergiebt sich von selbst, wenn man sich* $A_1x^n - B_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} - B_2x^{n-3} + \ldots = 0$ *in der Form* $x^{n-1}(A_1x - B_1) + x^{n-3}(A_2x - B_2) + x^{n-5}(A_3x - B_3) + \ldots\ldots = 0$ *anschreibt, und bedenkt, dass der grösste der Brüche* $\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_2}$, $\frac{B_3}{A_3}$, ... *alle Differenzen, also auch das Polynom positiv macht. In obigem Zahlenbeispiel erhält man die Grenze* 13, *die aber von der nächsten Wurzel* 3 *sehr weit entfernt ist. Ueber die Bestimmung näherer Grenzen siehe Nr.* 137.

Nr. 135. Wenn man in einer Gleichung jeden negativen Coëfficienten durch die Summe der Coëfficienten der positiven, ihm vorangehenden Glieder dividirt, so ist der um die Einheit vermehrte grösste dieser Brüche eine obere Grenze der positiven Wurzeln.

Beweis. *Aus* $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots\ldots + 1$ *folgt*

$$x^n = (x-1)x^{n-1} + (x-1)x^{n-2} + (x-1)x^{n-3} + \ldots\ldots + (x-1) + 1$$

und dies in die Summe $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots$ *der positiven Glieder substituirt, giebt dann:*

$$(x-1).x^{n-1} \left.\begin{matrix} +1 \\ +p \end{matrix}\right\} (x-1).x^{n-2} \left.\begin{matrix} +1 \\ +p \\ +q \end{matrix}\right\} (x-1).x^{n-3} + \ldots\ldots$$

Lässt man die negativen Glieder in ihrer Form und setzt man sie in die zugehörigen Colonnen ein, so wird z. B. $-sx^r$ *in die mit* $(x-1).x^r$ *multiplicirte Colonne einzusetzen sein, und der Coëfficient von* x^r *wird dort* $(1+p+q+\ldots\ldots)(x-1)-s$ *sein, worin* $1+p+q+\ldots\ldots$ *die Summe aller positiven Coëfficienten ist, die dem negativen s vorangehen. Damit also das mit* x^r *behaftete Glied positiv werde, muss* $(1+p+q+\ldots\ldots)(x-1)>s$ *oder* $x>1+\dfrac{s}{1+p+q+\ldots\ldots}$ *sein, und nimmt man von den so gefundenen Werthen von x den grössten, so wird für ihn das ganze Polynom positiv.*

Nr. 136. Die Wurzeln der Gleichung $x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-\ldots\ldots=0$ seien a, b, c, ... und jene der Gleichung $nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-\ldots\ldots=0$ seien α, β, γ; ferner seien die Resultate, die sich ergeben, wenn die Werthe α, β, γ in die erste Gleichung eingesetzt werden, P, Q, R, ... und die Resultate, die sich ergeben, wenn die Werthe a, b, c in die zweite Gleichung eingesetzt werden, p, q, r, ..., dann ist:

$$PQR\ldots\ldots : pqr\ldots\ldots = 1 : n^n.$$

Beweis *ergiebt sich von selbst, wenn man die Substitution in den Wurzelfactoren* $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots\ldots$ *und* $n(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2}+\ldots$ *vornimmt, indem man dann* $PQR\ldots : pqr\ldots = (-1)^{n(n-1)} : n^n = 1 : n^n$ *erhält, und zugleich sieht, dass die Aufgabe viel allgemeiner gestellt werden kann.*

Nr. 137. Man finde eine obere Grenze für die Wurzeln der folgenden Gleichungen:

$x^3-6x^2-25x-12 = 0.$

Obere positive Grenze 9; *obere negative (d. h. vom Zeichen abgesehen grösser als alle andern negativen Wurzeln)* -3.

$x^3-12x^2+41x-43 = 0.$

Obere Grenze 8.

$x^4-5x^3+6x^2-7x+8 = 0.$

Obere Grenze 4.

Die obere positive Grenze ergiebt sich, wenn man in der gegebenen Gleichung $y+a$ *statt* x *einsetzt, nach* y *ordnet, und nun jenen Werth von* a *sucht, der alle Coëfficienten positiv macht, indem für diesen Werth von* a *alle reellen Werthe von* $y=x-a$ *negativ, also* $a>x$ *wird. Zur Bestimmung der obern negativen*

Grenze wende man dasselbe Verfahren an, nachdem man zuvor die Zeichen der geraden Glieder der Gleichung geändert hat, um die negativen Wurzeln in positive zu verwandeln. Im ersten Zahlenbeispiel hat man $y^3+(3a\mp6)y^2+(3a^2\mp12a-25)y+$ $+a^3\mp6a^2-25a\mp12=0$, *worin bei der obern Zeichen-Annahme* $a=9$, *bei der untern* $a=3$ *alle Coëfficienten positiv macht.*

Nr. 138. Finde obere und untere Grenzen für die positiven Wurzeln der Gleichung $x^5+2x^4-50x^3-100x^2+49x+98=0$.

Antw. *Wendet man das Verfahren von Nr.* 137 *und* 139 *an, so erhält man als Grenzen zugleich zwei Wurzeln,* 7 *und* 1, *der Gleichung. Von den übrigen Verfahren giebt Nr.* 132 *die kleinste obere Grenze* 11, *und Nr.* 133 *die grösste untere Grenze* $\frac{1}{2}$.

Nr. 139. Bestimme eine untere Grenze für die positiven Wurzeln der Gleichung $x^4-3x^3-5x^2+2x+3=0$.

Antw. *Eine untere positive Grenze* $\frac{1}{2}$ *ergiebt sich durch Verbindung der in Nr.* 133 *und* 137 *angedeuteten Verfahren. Wie sich eine untere negative Grenze (vom Zeichen abgesehen kleiner als alle negativen Wurzeln) bestimmen lasse, ergiebt sich dann ebenfalls von selbst.*

Nr. 140. Finde untere Grenzen für die Wurzeln der folgenden Gleichungen:

$x^2+12x-20=0$.

Untere positive Grenze $\frac{4}{3}$, *negative* -13.

$x^3+8x^2-8x-64=0$.

Untere Grenze $\pm\frac{8}{3}$.

$x^4-5x^2-3=0$.

Untere Grenze $\pm\frac{24}{11}$ *oder* $\pm\sqrt{5}$, *erstere durch unmittelbare Bestimmung, letztere durch vorgängige Aufsuchung der untern positiven Grenze von* x^2.

Nr. 141. Finde eine obere Grenze für die positiven und eine untere für die negativen Wurzeln der Gleichung $x^3-4x^2-x+20=0$.

Antw. *Obere positive Grenze* $\frac{14}{5}$, *untere negative* $-\frac{16}{9}$.

Nr. 142. Man finde eine Zahl, die kleiner ist als die kleinste Differenz der Wurzeln der Gleichung $x^3-7x+7=0$.

Antw. *Die quadrirte Differenzen-Gleichung* y^3-42y^2+ $+441y-49=0$ *giebt die untere Grenze* $\frac{1}{9}$, *aus welcher die gesuchte Zahl* $\pm\frac{1}{3}$ *folgt.*

Nr. 143. Finde, zwischen welchen Wurzeln der Gleichung $x^3-7x^2+7x+10=0$ die Zahl 3 liegt.

Antw. *Für* $x = 3 + y$ *erhält man die Gleichung* $y^3 + 2y^2 - 8y - 5 = 0$, *deren eine positive Wurzel zwischen* 3 *und* 2 *und zwei negative Wurzeln zwischen* $-\frac{1}{2}$ *und* -4 *liegen. Bedenkt man ferner, dass die gegebene Gleichung zwei positive Wurzeln hat, so ergiebt sich als Reihe der Grenzen und Wurzeln:* 6, x_1, 5, 3, $2\frac{1}{2}$, x_2, 0, $-x_3$, -1.

Nr. 144. Das Quadrat einer der Wurzeln der Gleichung $x^3 - qx - r = 0$ liegt zwischen den Grenzen q und $\frac{1}{3}q$.

Beweis. *Aus* $x(x^2 - q) = r$ *folgt, dass für die positive Wurzel auch* $x^2 - q$ *positiv, also* $x^2 > q$, *ebenso dass für die negativen Wurzeln* $x^2 - q$ *negativ, also* $x^2 < q$ *sein müsse. Es ist also* q *nach zwei Seiten hin Grenze. Nennt man die positive Wurzel* c, *so ist* $x^3 - qx - r$ *durch* $x - c$ *ohne Rest dividirbar, und giebt* $x^2 + cx + c^2 - q = 0$ *und hieraus* $x^2 = q - \frac{1}{2}c^2 \pm c\sqrt{q - \frac{3}{4}c^2}$. *Da der Eigenthümlichkeit der Aufgabe nach alle Wurzeln reell sind, so muss* $q - \frac{3}{4}c^2$ *positiv, also* $c^2 < \frac{4}{3}q$ *sein. Für diese obere Grenze von* c^2 *erhält man einen einzigen Werth von* x^2, *nämlich* $\frac{1}{3}q$, *und dies ist mithin wieder nach zwei Seiten hin eine Grenze. Setzt man endlich in* $x^2 = q - \frac{1}{2}c^2 \pm c\sqrt{q - \frac{3}{4}c^2}$ *die untere Grenze* $c^2 = q$ *ein, so folgen die zwei Werthe* $x^2 = q$ *oder* 0; *man erhält daher die Reihe der Grenzen* 0, $(-x_1)^2$, $\frac{1}{3}q$, $(-x_2)^2$, q, $(+x_3)^2$, $\frac{4}{3}q$ *und kann sich synthetisch von ihrer Richtigkeit überzeugen, wenn man diese Grenzwerthe in der Gleichung* $y^3 - 2qy^2 + q^2y - r^2 = 0$, *in welcher* $y = x^2$ *ist, einsetzt und nun die Zeichen der Gleichungs-Werthe untersucht, sich hierbei aber erinnert, dass für reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung* $4q^3 > 27r^2$ *sein müsse.*

Nr. 145. Bestimme die rationalen Wurzeln der Gleichung $2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 12 = 0$.

Antw. -2, $+\frac{3}{2}$, *die andern* $\pm\sqrt{2}$.

Nr. 146. Bestimme die Anzahl imaginärer Wurzeln der Gleichung $x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 30x^2 + 6x - 36 = 0$.

Antw. *Die Gleichung muss wenigstens eine reelle Wurzel haben; sie ist* 6, *und wenn man sie abscheidet, bleibt* $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$, *welche Gleichung keinen positiven Werth von* x^2, *also nur imaginäre Werthe von* x *haben kann. Ein anderes Erkennungsmittel ist folgendes: Die gegebene Gleichung mit* $x + 1$ *multiplicirt giebt* $x^6 - 5x^5 - x^4 - 25x^3 - 24x^2 - 30x - 36 = 0$ *mit* 5

Zeichenfolgen, während eine einzige hätte entstehen sollen, also sind 4 Wurzeln der Gleichung imaginär.

Nr. 147. Wende die Newton'sche Regel zur Entdeckung imaginärer Wurzeln auf die Gleichung $x^6+3x^4-4x^2-12=0$ an.

Antw. *Der Euler'sche Beweis der Newton'schen Regel ist in Kurzem folgender: Hat* $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+\ldots\ldots$ *lauter reelle Wurzeln, so haben alle auf einander folgenden Ableitungen derselben ebenfalls nur reelle Wurzeln. Stellt man sie wirklich alle her, so kömmt man zuletzt auf eine Gleichung* $x^2+\frac{2}{n}px+\frac{2q}{n(n-1)}=0$, *in welcher, damit sie reelle Wurzeln habe* $\left(\frac{p}{n}\right)^2>\frac{2q}{n(n-1)}$ *oder* $p^2>\frac{2nq}{n-1}$ *sein muss. Nach Nr. 150 hat dann aber auch die Gleichung* $px^{n-1}+2qx^{n-2}+3rx^{n-3}+\ldots\ldots=0$ *lauter reelle Wurzeln, mithin haben es auch alle ihre Ableitungen, also auch jene:* $x^2+\frac{4q}{(n-1)p}x+\frac{6r}{(n-1)(n-2)p}=0$, *aus welcher für reelle Wurzeln die Bedingung* $q^2>\frac{3(n-1)}{2(n-2)}rp$ *folgt. Die Gleichung* $px^{n-1}+2qx^{n-2}+3rx^{n-3}+\ldots\ldots=0$ *wieder gliederweise mit 0, 1, 2, 3, ... multiplicirt, giebt dann die Gleichung* $qx^{n-2}+3rx^{n-3}+6sx^{n-4}+10tx^{n-5}+\ldots\ldots=0$, *die ebenfalls nur reelle Wurzeln hat. Es haben also auch ihre Ableitungen, mithin auch jene* $x^2+\frac{6r}{(n-2)q}x+\frac{12s}{(n-2)(n-3)q}=0$ *nur reelle Wurzeln und dies giebt das weitere Kennzeichen* $r^2>\frac{4(n-2)}{3(n-3)}qs$. *Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man* $n-1$ *Kennzeichen reeller Wurzeln, deren Nichterfüllung auf* $n-1$ *Paare imaginärer Wurzeln deuten würde. Da dies aber wegen der* n *Wurzeln der Gleichung unmöglich wäre, so haben die negativen Kennzeichen nur dann Werth, wenn sie sich nicht unmittelbar folgen, wenn also in den Zeichen der Werthe:* $p^2-\frac{2nq}{n-1}$, $q^2-\frac{3(n-1)}{2(n-2)}rp$ *u. s. w. Wechsel eintreten. Daraus ergiebt sich die Regel: Man schreibe über die Glieder der Gleichung die sich aus obiger Entwickelung ergebenden Brüche und unter das erste und letzte Glied das Zeichen +; untersuche bei jedem Glied, ob das Quadrat seines Coëfficienten grösser oder kleiner sei, als das Product des über ihm stehenden Bruchs in das Product der beiden nächsten*

rechts und links stehenden Coëfficienten, und setze im ersten Fall ein +, im zweiten ein — unter das Glied, dann hat die Gleichung wenigstens so viel imaginäre Wurzeln als Zeichen-Wechsel entstanden sind.

$$\frac{2n}{n-1} = \frac{12}{5} \quad \frac{3(n-1)}{2(n-2)} = \frac{15}{8} \quad \frac{4(n-2)}{3(n-3)} = \frac{16}{9} \quad \frac{5(n-3)}{4(n-4)} = \frac{15}{8} \quad \frac{6(n-4)}{5(n-5)} = \frac{12}{5}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x^6 & + & 0.x^5 & + & 3x^4 & + & 0.x^3 & - & 4x^2 & + & 0.x & -12 & = 0 \\ + & & - & & + & & + & & + & & - & + & \end{array}$$

$$p^2 < \frac{2nq}{n-1}, \quad q^2 > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}pr, \quad r^2 > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}qs, \quad s^2 > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}rt, \quad t^2 < \frac{6(n-4)}{5(n-5)}su.$$

Die Gleichung hat also zwei Paar imaginäre Wurzeln; sie sind ebenso wie jene in der vorausgegangenen Aufgabe: $\pm\sqrt{-2}$ *und* $\pm\sqrt{-3}$.

Nr. 148. Bestimme die Anzahl reeller Wurzeln der Gleichung $x^7 - 14x^4 + 90 = 0$.

Antw. *Ist μ die Anzahl Wechsel, ν die Anzahl Folgen der Zeichen, zwischen denen eine gerade Anzahl Glieder oder keines fehlt, und m die Anzahl Zeichen-Wechsel, sowie n die Anzahl Zeichen-Folgen, zwischen denen eine ungerade Anzahl Glieder fehlt, so hat die Gleichung höchstens $\mu + m$ positive und höchstens $\nu + m$ negative, also höchstens $\mu + \nu + 2m$ reelle Wurzeln, mithin, wenn sie vom p^{ten} Grade ist, und in ihr h Glieder fehlen, $p - (\mu + \nu + 2m)$ imaginäre Wurzeln. In dem Zahlenbeispiel sind demnach 4 imaginäre und 3 reelle Wurzeln, und von letztern 2 positiv und 1 negativ. Man erhält nach dem bekannten und in jedem neuen Lehrbuch erklärten Sturm'schen Verfahren:*

Substituirte Werthe		$-\infty$ *oder* -2	-1	0	1	2	$+\infty$ *oder* 3	
Ursprüngl. Function	x^7-14x^4+90	—	+	+	+	—	+	*Zeichen bei den aufeinander folgenden Substitutionen obiger Zahlen in die Functionen.*
Erste Ableitung	x^6-8x^3	+	+	0	—	0	+	
Vereinfachte Reste	x^4-15	+	—	—	—	+	+	
bei Bestimmung	$8x^3-15x^2$	—	—	0	—	+	+	
des	$-15x^2+64$	—	+	+	+	+	—	
gemeinschaftlichen	$-8x+15$	+	+	+	+	—	—	
Theilers	-1	—	—	—	—	—	—	
Anzahl Zeichen-Wechsel jeder Colonne		4	3	3	3	2	1	
Reelle Wurzeln		1 *negative*				1 *positive*	1	

Es liegt also eine Wurzel zwischen -2 *und* -1, *eine zwischen* 1 *und* 2 *und eine dritte zwischen* 2 *und* 3.

Nr. 149. Bestimme mit Hülfe der abgeleiteten Gleichung, ob $x^5-5x^3+3=0$ reelle Wurzeln habe.

Antw. *Bei der Anwendung der Lehre des Kleinsten und Grössten auf die Gleichungen folgt, dass wenn* $a>b>c\ldots\ldots$ *die reellen Wurzeln der ersten Ableitung einer Gleichung sind, die Substituirung der Werthe* ∞, a, b, c, ... $-\infty$ *in die ursprüngliche Gleichung abwechselnd die grössten und kleinsten Gleichungs-Werthe, also abwechselnd positive und negative Resultate geben müsse, und dass dann die reellen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung (für welche eben die in* 0 *liegenden Uebergänge von den grössten zu den kleinsten Werthen und umgekehrt stattfinden) zwischen jenen Werthen* ∞, a, b, c, ... $-\infty$ *eingeschaltet sind. Wird demnach für* $x=a$ *der Gleichungs-Werth negativ, so liegt eine reelle Wurzel der ursprünglichen Gleichung zwischen* ∞ *und* a, *ausserdem nicht; ebenso liegt eine solche zwischen* a *und* b, *wenn* $x=a$ *einen negativen und* $x=b$ *einen positiven Gleichungs-Werth giebt, ausserdem nicht. Man schreibe sich also alle Wurzeln der abgeleiteten Gleichung der Grösse nach in einer Reihe an, setze darunter die Zeichen* — + — + ..., *setze ferner diese Wurzeln nach einander in die ursprüngliche Gleichung ein, und schreibe die Zeichen der hierdurch erhaltenen Gleichungs-Werthe unter die Wurzeln in eine zweite Reihe, dann hat die ursprüngliche Gleichung so viele imaginäre Wurzeln als Verschiedenheiten in den unter einander stehenden Zeichen ein-*

treten, und ausserdem noch so viele als die abgeleitete Gleichung selbst imaginäre Wurzeln besitzt. In obigem Zahlenbeispiel hat die abgeleitete Gleichung $x^4-3x^2=0$ *die vier Wurzeln* $\pm\sqrt{3}$ *und zweimal* 0 *und man findet, dass die ursprüngliche Gleichung* 3 *reelle Wurzeln und zwar eine zwischen* $+\infty$ *und* $+\sqrt{3}$, *eine zwischen* $+\sqrt{3}$ *und* 0 *und endlich eine zwischen* $-\sqrt{3}$ *und* $-\infty$ *hat. Eine Aufzählung sämmtlicher von* **Euler** *für Gleichungen der Form* $x^n+px^r+q=0$ *aufgefundenen Resultate würde hier zu weit führen, dagegen mag das Resultat der* **Fourier'schen** *Prüfung, deren Grundzüge in jedem Lehrbuch aufgeführt sind, hier noch seinen Platz finden.*

Substituirte Werthe		$-\infty$ oder -3	-2	-1	0	1	2	$+\infty$ oder 3	
Ursprüngl. Function	x^5-5x^3+3	−	+	+	+	−	−	+	*Zeichen bei den auf einander folgenden Substitutionen obiger Zahlen in die Functionen.*
Vereinfachte									
1te Ableitung	x^4-3x^2	+	+	−	− 0 −	−	+	+	
2te „	$2x^3-3x$	−	−	+	+ 0 −	−	+	+	
3te „	$2x^2-1$	+	+	+	−	+	+	+	
4te „	x	−	−	−	− 0 +	+	+	+	
5te „	1	+	+	+	+	+	+	+	
Anzahl Zeichen-Wechsel jeder Colonne		5	4	4	4 oder 2	1	1	0	
Verschwundene Wechsel		1			2	1		1	
Wurzeln		1 *negative*			2 *imaginäre*	1 *positive*		1 *positive*	

wonach eine Wurzel zwischen -3 *und* -2; *eine zwischen* 0 *und* 1 *und eine zwischen* 2 *und* 3 *liegt.*

Nr. 150. Die Anzahl imaginärer Wurzeln einer Gleichung $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots=0$ wird nicht vermehrt, wenn man die Glieder mit den auf einander folgenden Gliedern der Reihe 0, 1, 2, 3, 4, ... multiplicirt.

Beweis. *Setzt man den Satz als bekannt voraus, dass die abgeleitete Gleichung zum mindesten* $m-1$ *reelle Wurzeln habe, wenn die ursprüngliche deren* m *enthält, so ergiebt sich der Beweis folgendermassen: Hat* $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+\ldots\ldots=0$ m *reelle und* $n-m$ *imaginäre Wurzeln, so hat auch die Gleichung* $1+py+qy^2+ry^3+\ldots\ldots=0$, *die aus der ersten durch die Substitution* $x=\frac{1}{y}$ *hervorgegangen ist, ebenso viele reelle und ima-*

gināre Wurzeln. Ihre Ableitung $p+2qy+3ry^2+\ldots\ldots=0$ *wird dann aber mindestens* $m-1$ *reelle also auch* $n-m$ *imaginäre Wurzeln haben und dieselbe Anzahl hat die aus dieser Ableitung durch abermalige Substitution* $y=\frac{1}{x}$ *hervorgehende Gleichung* $px^{n-1}+2qx^{n-2}+3qx^{n-3}+\ldots\ldots=0$, *welche aus der gegebenen auf die oben angeführte Art entsteht. Man kann den Satz ebenso wie jenen in Nr.* 91 *weiter ausdehnen.*

Nr. 151. Wenn mehrere auf einander folgende Glieder einer Gleichung fehlen, und die rechts und links der fehlenden folgenden Glieder dasselbe Zeichen haben, so kann die Gleichung nicht so viel reelle Wurzeln haben als ihr Grad anzeigt.

Beweis *ergiebt sich von selbst, wenn man sich die fehlenden Glieder mit den Coëfficienten* ± 0 *eingeschaltet denkt, und nun die Anzahl Zeichen-Wechsel und Folgen untersucht.*

Nr. 152. Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ die Wurzeln der Gleichung $x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-\ldots\ldots=0$ sind, wenn m dieser Wurzeln reell sind, und wenn man die Gleichung in eine andere verwandelt, deren Wurzeln $(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha-\gamma)^2$, $(\beta-\gamma)^2\ldots\ldots$ sind, so ist das letzte Glied der transformirten Gleichung positiv oder negativ, je nachdem $m.\frac{m-1}{2}$ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Beweis *ergiebt sich von selbst, wenn man die quadrirte Differenzen-Gleichung* $X=0$ *in zwei Factoren* $X_1X_2=0$ *zerlegt denkt, deren einer* $X_1=0$ *nur die quadrirten Differenzen der reellen Wurzeln unter sich, und deren zweiter* $X_2=0$ *nur die quadrirten Differenzen der imaginären Wurzeln unter sich und mit den reellen enthält. Die erste Gleichung* $X_1=0$ *wird vom* $\frac{m(m-1)}{2}$*ten Grad sein und lauter positive Wurzeln, also lauter Zeichen-Wechsel enthalten; ihr absolutes Glied wird also positiv oder negativ sein, je nachdem* $\frac{m(m-1)}{2}$ *gerade oder ungerade ist; der zweite Factor* $X_2=0$ *aber, der nur negative und imaginäre Wurzeln besitzt, hat jedenfalls ein positives absolutes Glied, welches also bei der Multiplication* X_1X_2 *das Zeichen des absoluten Glieds von* X_1 *nicht mehr alterirt.*



